МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Базовая кафедра менеджмента и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
_______________ Е.И. Луковникова
«_____» _____________ 20 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Б1.В.06

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ

09.03.03 Прикладная информатика

ПРОФИЛЬ ПОДГОТОВКИ

Прикладная информатика в экономике

Программа академического бакалавриата

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ **Стр.**

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Вид деятельности выпускника

Дисциплина охватывает круг вопросов, относящихся к научно-исследовательскому виду профессиональной деятельности выпускника в соответствии с компетенциями и видами деятельности, указанными в учебном плане.

Цель дисциплины

Теоретическая и практическая подготовка в области общенаучных исследований количественной стороны массовых социально-экономических процессов на основе их моделирования с помощью методов исследования операций.

Задачи дисциплины

- освоение обучающимися методики постановки и решения различных видов оптимизационных задач, анализа получаемых результатов.

Код компетенции	Содержание компетенций	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3
ОПК – 2	способность анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования	**знать:** – Методы системного анализа и математического моделирования **уметь:** - анализировать социально-экономические задачи и процессы **владеть:** – способностью анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования
ПК – 23	способность применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач	**знать:** - основы системного подхода **уметь:** - применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач **владеть:** - способностью применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.В.06 Исследование операций и методов оптимизаций относится к вариативным дисциплинам.

Дисциплина «Исследование операций и методов оптимизаций» базируется на знаниях полученных при изучении таких учебных дисциплин, как «Теория систем и системный анализ», «Дискретная математика».

Основываясь на изучении перечисленных дисциплин, Исследование операций и методов оптимизаций представляет основу для изучения дисциплин: Математическое и имитационное моделирование, Количественные методы финансового анализа.

Такое системное междисциплинарное изучение направлено на достижение требуемого ФГОС уровня подготовки по квалификации бакалавр.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Распределение объема дисциплины по формам обучения

Форма обучения	*Курс*	*Семестр*	*Трудоемкость дисциплины в часах*						*Курсовая работа*	*Вид промежу точной аттеста ции*
			Всего часов (с экз.)	*Аудиторных часов*	*Лекции*	*Лабораторные работы*	*Практические занятия*	*Самостоятельная работа*		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Очная	2,3	4,5	324	122	52	70	-	166	5КР	Зачет, экзамен
Заочная	3	-	324	32	12	-	20	283	КР	экзамен
Заочная (ускоренное обучение)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Очно-заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

3.2. Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости

Вид учебных занятий	*Трудо-емкость (час.)*	*в т.ч. в интерактив ной, актив-ной, иннова-циионной формах, (час.)*	*Распределение по семестрам, час*	
			4	*5*
1	**2**	**3**	**4**	**5**
I. Контактная работа обучающихся с преподавателем (всего)	122	22	54	68
Лекции (Лк)	52	10	18	34
Лабораторные работы (ЛР)	70	12	36	34
Курсовая работа	+	-	-	+
Групповые (индивидуальные) консультации	+	-	+	+
II.Самостоятельная работа обучающихся (СР)	166	-	90	76
Подготовка к лабораторным работам	58	-	30	28
Подготовка к экзамену в течение семестра	36	-	-	36
Подготовка к зачету	60	-	60	-
Выполнение курсовой работы	12	-	-	12
III. Промежуточная аттестация зачет	+	-	+	-
экзамен	36	-	-	36
Общая трудоемкость дисциплины ……. час.	324	-	144	180
зач. ед.	9	-	4	5

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий

- для очной формы обучения:

№ раз-дела и темы	*Наименование раздела и тема дисциплины*	*Трудоем-кость, (час.)*	*Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)*		
			учебные занятия		*самостоятельная работа обучаю-щихся**
			лекции	*лабораторные работы*	
1	2	3	4	5	6
1.	**Предмет, метод и основные задачи исследования операций**	**30**	**6**	**-**	**24**
1.1	Модель. Модель исследования операций. Основные понятия.	5	2	-	3
1.2	Сущность оптимизации. Структура оптимизационных задач	15	2	-	13
1.3	Классификация задач математического программирования	10	2	-	8
2.	**Постановка и методы решения задач линейного программирования**	**54**	**22**	**18**	**14**
2.1	Каноническая и стандартная ЗЛП. Математические основы решения ЗЛП: линейно-независимые векторы, свободные и базисные переменные	8	2	2	4
2.2	Общее и базисное решение системы линейных уравнений	4	2	2	-
2.3	Графический способ решения ЗЛП. Основные теоремы линейного программирования	8	2	2	4
2.4	Сущность и основные этапы симплекс-метода	4	2	2	-
2.5	Постановка двойственных ЗЛП. Теоремы двойственности	4	2	1	1
2.6	Экономическая интерпретация двойственности	6	2	1	3
2.7	Анализ оптимального решения на чувствительность	6	2	2	2
2.8	Распределительные ЗЛП. Постановка транспортных задач.	4	2	2	-
2.9	Решение транспортных задач	4	2	2	-
2.10	Многопродуктовые модели. Перевозка с промежуточными пунктами	3	2	1	
2.11	Задача о назначениях	3	2	1	-
3.	**Постановка и методы решения задач нелинейного**	**65**	**8**	**22**	**35**

	программирования				
3.1	Структура нелинейной оптимизационной модели. Причины нелинейности. Основные теоремы нелинейного программирования	20	2	5	13
3.2	Основные методы решения нелинейных оптимизационных задач	10	2	5	3
3.3	Постановка и решение задач стохастического программирования	20	2	6	12
3.4	Примеры задач стохастического программирования	15	2	6	7
4.	**Постановка и методы решения задач дискретного программирования**	**48**	**6**	**12**	**30**
4.1	Структура дискретной оптимизационной модели. Постановка задачи дискретного программирования	24	2	2	20
4.2	Примеры задач дискретного программирования	12	2	5	5
4.3	Алгоритмы и методы решения задач дискретного программирования	12	2	5	5
5.	**Постановка и методы решения задач динамического программирования**	**45**	**6**	**12**	**27**
5.1	Структура динамической оптимизационной модели. Постановка задачи динамического программирования	20	2	2	16
5.2	Примеры задач динамического программирования	10	2	5	3
5.3	Алгоритмы и методы решения задач динамического программирования	15	2	5	8
6.	**Многоцелевая оптимизация**	**46**	**4**	**6**	**36**
6.1	Структура многокритериальной и векторной оптимизационной модели. Постановка задач многоцелевой оптимизации	26	2	3	21
6.2	Алгоритмы и методы решения задач многокритериальной оптимизации	20	2	3	15
	ИТОГО	**288**	**52**	**70**	**166**

- для заочной формы обучения:

№ раз-дела и темы	*Наименование раздела и тема дисциплины*	*Трудоем-кость, (час.)*	*Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)*		
			учебные занятия		*самостоятельная работа обучаю-щихся**
			лекции	*практические работы*	
1	2	3	4	5	6
1.	**Предмет, метод и основные задачи исследования операций**	**30**	**2**	**-**	**28**
1.1	Модель. Модель исследования операций. Основные понятия.	5		-	5
1.2	Сущность оптимизации. Структура оптимизационных задач	15	2	-	13
1.3	Классификация задач математического программирования	10	-	-	10
2.	**Постановка и методы решения задач линейного программирования**	**54**	**2**	**5**	**47**
2.1	Каноническая и стандартная ЗЛП. Математические основы решения ЗЛП: линейно-независимые векторы, свободные и базисные переменные	8	-	-	8
2.2	Общее и базисное решение системы линейных уравнений	4	0,5	0,5	3
2.3	Графический способ решения ЗЛП. Основные теоремы линейного программирования	8	0,5	0,5	7
2.4	Сущность и основные этапы симплекс-метода	4	-	1	3
2.5	Постановка двойственных ЗЛП. Теоремы двойственности	4	1	1	2
2.6	Экономическая интерпретация двойственности	6	-	-	6
2.7	Анализ оптимального решения на чувствительность	6	-	-	6
2.8	Распределительные ЗЛП. Постановка транспортных задач.	4	-	1	3
2.9	Решение транспортных задач	4	-	1	3
2.10	Многопродуктовые модели. Перевозка с промежуточными пунктами	3	-	-	3
2.11	Задача о назначениях	3	-	-	3
3.	**Постановка и методы решения задач нелинейного программирования**	**65**	**2**	**5**	**58**
3.1	Структура нелинейной оптимизационной модели. Причины нелинейности.	20	-	1	19

	Основные теоремы нелинейного программирования				
3.2	Основные методы решения нелинейных оптимизационных задач	10	2	1	7
3.3	Постановка и решение задач стохастического программирования	20	-	1	19
3.4	Примеры задач стохастического программирования	15	-	2	13
4.	**Постановка и методы решения задач дискретного программирования**	**48**	**2**	**4**	**42**
4.1	Структура дискретной оптимизационной модели. Постановка задачи дискретного программирования	24	2	-	22
4.2	Примеры задач дискретного программирования	12	-	2	10
4.3	Алгоритмы и методы решения задач дискретного программирования	12	-	2	10
5.	**Постановка и методы решения задач динамического программирования**	**45**	**2**	**3**	**40**
5.1	Структура динамической оптимизационной модели. Постановка задачи динамического программирования	20	2	-	18
5.2	Примеры задач динамического программирования	10	-	-	10
5.3	Алгоритмы и методы решения задач динамического программирования	15	-	3	12
6.	**Многоцелевая оптимизация**	**46**	**2**	**3**	**41**
6.1	Структура многокритериальной и векторной оптимизационной модели. Постановка задач многоцелевой оптимизации	26	2	-	24
6.2	Алгоритмы и методы решения задач многокритериальной оптимизации	20	-	3	17
	ИТОГО	**315**	**12**	**20**	**283**

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам

Раздел 1. Предмет, метод и основные задачи исследования операций (Лекция-дискуссия)

1.1 Модель. Модель исследования операций. Основные понятия.

Модель - материальный или абстрактный объект, находящийся в определенном соответствии и исследуемым объектом, несущим о нем определенную информацию и способный его замещать на определенных этапах познания.

Моделирование - это процесс исследования реальной системы, включающий построение модели, изучение его свойств и перенос получаемых сведений на объект.

Исследование операций - методология применения математических количественных методов для обоснования решения задач во всех областях целенаправленной деятельности, соответствующие методы и модели позволяют получать решения наилучшим образом отвечающие целям организации.

Операция - система действий направленная на достижение определенной цели, всегда является управляемым мероприятием.

Управление - существует возможность выбора параметров, ее организацию.

Решение - определенный набор выбираемых параметров.

Элементы решения - отдельные параметры в виде чисел, векторов, функций, физических признаков.

Если элементами решения можно распоряжаться в определенных пределах, то заданное условие следует единожды фиксировать и не могут быть нарушены.

Этапы построения математической модели:

1. Содержательное описание объекта (цель, элементы, взаимосвязи, состояние, среда) в итоге строят концептуальную модель.
2. Формализации операции - на этом этапе анализируется множество характеристик объекта, выбираются наиболее существенные , их них выбираются управляемые и нс управляемые, вводятся их символьные обозначения, определяются основные элементы оптимизационных задач.
3. Проверка адекватности - все ли параметры включены в модель, все ли несущественные факторы исключены, правильно ли отображены связи между параметрами, правильно ли заданны ограничения на параметры.
4. Корректировка модели - уточнение сведении об объекте и о параметрах модели, вносятся изменения в модель и повторяется проверка адекватности.

1.2 Сущность оптимизации. Структура оптимизационных задач.

Оптимальным является решение, которое по определенным признакам предпочтительнее других решений.

Оптимальным решением является такой выбор значения переменных при которых достигается максимальное или минимальное значение критерия эффективности наблюдается заданные ограничения.

Математическим исследованием операции является:

- Математическое программирование
- Сетевое моделирование
- Аппарат теории вероятности
- Методы прогнозирования временных рядов
- Теория игр и принятия решений
- Методы и теории нечетных множеств

Общий вид задачи математического моделирования

1. S(x) —> (min) - целевая функция
2. 1(x) < B - система ограничений

3. Целевая функция - показатель качества принимаемых решений экстремум которой необходимо найти ***x*= {ХЦ** - управляемая переменная (переменная внутренняя и изменяемая , которая входит в целевую функцию и принадлежит области допустимых решений, которые задаются системой ограничений. Область может быть представлена частью пространства, может существовать в виде точки или быть пустой в случае противоречивости системы ограничений.)

1) Допустимость - не отрицательность $\boldsymbol{X_t}$.
2) В - границы области допустимости.

1.3 Классификация задач математического программирования

Все экономические задачи, решаемые с применением математического программирования, отличаются альтернативностью решения и определенными ограничивающими условиями. Решить такую задачу – значит выбрать из всех допустимо возможных (альтернативных) вариантов лучший, оптимальный. Важность и ценность использования в экономике метода математического программирования состоят в том, что оптимальный вариант выбирается из достаточно значительного количества альтернативных вариантов.

Задачи математического программирования классифицируются в зависимости от вида *целевой функции* и свойств допустимой *области ограничений* G.

К ним относятся задачи: нелинейного программирования, линейного программирования, целочисленного программирования, дробно-линейного программирования, параметрического программирования, сепарабельного программирования, квадратичного программирования, динамического программирования, стохастического программирования, геометрического программирования и другие.

Существуют различные признаки классификации этих задач.

Наиболее важный классификационный признак – ***выпуклость***. По этому признаку все задачи математического программирования разделяются на *выпуклые* и *невыпуклые*.

Задача математического программирования называется *выпуклой*, если она состоит в максимизации (минимизации) выпуклой вверх (вниз) целевой функции на выпуклом множестве, в противном случае задача называется *невыпуклой*.

Если задача оптимизации (1) является *невыпуклой*, то для ее решения нужно определить все точки локальных максимумов, а затем, сравнив значения целевой функции в них, определить точку глобального максимума. Если точек локальных максимумов много, то решение задачи усложняется.

Однако если задача (1) является *выпуклой*, то ее решение существенно упрощается. В выпуклой задаче локальный экстремум одновременно является и глобальным. Выпуклая задача может иметь только один строгий экстремум и все сводится к нахождению этого единственного экстремума.

Для решения выпуклых задач разработаны многочисленные численные методы, приспособленные для решения на ЭВМ, связанные с понятием градиента целевой функции и основной идеей о том, что функция наиболее быстро убывает, если двигаться в направлении, противоположном градиенту. К ним относятся метод градиентного спуска, метод сопряженных градиентов и т.д. Но есть и методы, основанные на других идеях: метод штрафных функций, многочисленные варианты метода случайного поиска и т.д.

Раздел 2. Постановка и методы решения задач линейного программирования (Лекция-дискуссия)

2.1 Каноническая и стандартная ЗЛП. Математические основы решения ЗЛП: линейно-независимые векторы, свободные и базисные переменные

Объекты экономики линейны, эти задачи наиболее изучены, разработаны конечные методы решения и программы для ЭВМ. Имеет широкое практическое применение, многие нелинейные задачи после введения дополнительных ограничений могут быть приведены к линейным задачам.

Линейное программирование - раздел математического программирования изучающий методы решения задач, которые характеризуются линейной зависимостью и линейным критерием.

Чтобы ЗЛП имела решение необходимо, чтобы система ограничений была совместна. Это возможно, если ранг m системы (число линейно независимых уравнений) был не больше числа неизвестных n. Случай m> n невозможен. При m= n система имеет единственное решение, которое определяется методами обычной алгебры. Если m< n, то система имеет m линейно независимых векторов – базис, через которые любой вектор системы может быть выражен как линейная комбинация. Таких базисов может быть несколько, но не больше, чем C_n^m. Переменные ЗЛП, соответствующие m векторам базиса, являются базисными, остальные переменные – свободные.

Базисом называют любой набор m переменных такой, что определитель, составленный из коэффициентов при этих переменных, отличен от нуля. Соответствующее решение называю базисным решением.

Переменные, входящие в базис, называют базисными (б.п.), остальные n – m переменных называют свободными.

Чтобы получить простейшее частное решение системы необходимо свободные переменные приравнять нулю, учитывая при этом неотрицательность всех переменных.

Допустимым базисным решением (ДБР) является такое, при котором все переменные неотрицательны. В противном случае базисное решение недопустимо.

Частное допустимое базисное решение, с которого начинают решение, называют начальным допустимым базисным решением (НДБР).

Чтобы найти НДБР, удобно ЗЛП записать в каноническом виде.

Канонический вид ЗЛП – это такой стандартный вид, в котором в каждом i-ом уравнении найдется такая переменная $x_{\lambda I}$, что коэффициент перед ней в данном уравнении равен +1, а в других уравнениях и в выражении целевой функции эти коэффициенты равны нулю. Если при этом все b ≥ 0, то говорят о допустимом каноническом виде, в противном случае – о недопустимом.

Например.

1 Случай. Исходная задача ЗЛП содержит все ограничения со знаком $\leq$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad x_j \geq 0, \; j=\overline{1,n}, \; b_i \geq 0, \; i=\overline{1,m},$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max.$$

Стандартная форма ЗЛП является одновременно и каноническим допустимым видом.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad x_j \geq 0, \; j=\overline{1,n}, \; b_i \geq 0, \; i=\overline{1,m},$$

$x_{n+i} \geq 0$, $i=\overline{1,m}$ - дополнительные, уравновешивающие переменные

$$F(x) = -\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min.$$

При этом $x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$ - свободные переменные, $x_{n+I} = b_i$, $i = \overline{1, m}$ - $i = \overline{1, m}$ - базисные переменные – НДБР.

2 Случай. Ограничения исходной ЗЛП содержат неравенства разных знаков и уравнения.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = \overline{1, m_1}$, $x_j \ge 0$, $j = \overline{1, n}$,

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$, $i = \overline{m_1 + 1, m_2}$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = \overline{m_2 + 1, m}$, $b_i \ge 0$, $i = \overline{1, m}$,

F(x) = $\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max$.

Стандартная форма ЗЛП не совпадает с каноническим видом.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$, $i = \overline{1, m_1}$,

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$, $i = \overline{m_1 + 1, m_2}$,

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = \overline{m_2 + 1, m}$,

$x_{n+i} \ge 0$, $i = \overline{1, m}$ - дополнительные, уравновешивающие переменные.

F(x) = - $\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min$.

Чтобы построить канонический вид и получить НДБР используют **метод искусственного базиса.** В каждое уравнение, не содержащее переменную, создающую канонический вид, вводят искусственную неотрицательную переменную.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$, $i = \overline{1, m_1}$,

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + x_{n+m2+k} = b_i$, $i = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $k = \overline{1, m_2 - m_1}$,

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+m2+k} = b_i$, $i = \overline{m_2 + 1, m}$, $k = \overline{m_2 - m_1 + 1, m - m_2}$,

F(x) = - $\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min$.

Новые искусственные переменные создают канонический вид. Однако, вводя в ограничения-равенства искусственную переменную, изменяют исходные условия. Чтобы преобразованная задача соответствовала исходной, необходимо, чтобы в окончательном решении искусственные переменные равнялись нулю. Этого можно достичь, если вспомогательная целевая функция, равная сумме искусственных переменных, будет равна нулю, то естьb

G(x) = $\sum_{k=1}^{m-m2} x_{n+m2+k} \to \min$ илиG(x) = $\sum_{i=m1+1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=m1+1}^{m} a_{ij} x_j + \sum_{i=m1+1}^{m2} x_{n+i} \to \min$.

Оптимальное решение вспомогательной задачи соответствует НДБР исходной задачи.

2.2 Общее и базисное решение системы линейных уравнений

Рассмотрим систему из ***n*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными (такие системы линейных уравнений называются ***определенными*)*:**

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned}
\quad (2.15)
$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называют определителем системы (2.15):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Решить систему уравнений (2.15) можно различными методами, в частности методом Крамера. В основе решения системы уравнений (2.15) методом Крамера лежит следующая теорема.

Теорема Крамера. Если определитель Δ системы (2.15) отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти по формуле

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1,n}.$$

В этой формуле Δ_j является определителем, полученным из определителя системы Δ путем замены столбца у столбцом свободных членов.

Систему ***n*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными (2.15) можно записать в матричном виде: ***AX = B,*** где ***A*** – квадратная матрица порядка ***n,*** составленная из коэффициентов при неизвестных; ***X*** – вектор-столбец из неизвестных; ***B*** – вектор-столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Если ***A*** – невырожденная матрица, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$, то можно определить A^{-1}. С учетом этого имеют место матричные соотношения:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\ B,\quad E \cdot X = A^{-1}\ B,\quad X = A^{-1}\ B. \quad (2.16)$$

Обратная матрица может быть определена на базе следующей теоремы.

Теорема 2.1. Если определитель матрицы ***A*** не равен нулю, то матрица ***A*** имеет обратную матрицу A^{-1}, которая находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A},$$

где $\tilde{A}$ – матрица, ***присоединенная*** к матрице ***A.***

Матрица $\tilde{A}$ составляется из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Таким образом, соотношение (2.16) лежит в основе решения системы уравнений (2.15) методом обратной матрицы (функция = МУМНОЖ (МОБР(Л), ***B***) **Мастера функций** MS Excel).

Рассмотрим систему ***m*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными (при ***m<n*** такие системы называются ***неопределенными***):

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \quad (2.17)
\end{aligned}
$$

или в векторной записи: $A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = B$, где $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, ..., $A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – соответствующие вектор-столбцы.

Запишем ***расширенную*** матрицу этой системы в виде

$$
\begin{array}{c}
\quad\quad A_1 \quad\; A_2 \quad \cdots \quad A_n \quad B \\
\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).
\end{array}
$$

Элементарными преобразованиями системы (2.17) (или матрицы $\hat{A}$) называются следующие преобразования:

• перестановка любых двух уравнений;

• умножение обеих частей одного из уравнений на любое отличное от нуля число;

• прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число, отличное от нуля;

• вычеркивание нулевой строки (уравнения с нулевыми коэффициентами и свободными членом, равным 0).

Можно показать, что элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в эквивалентную систему. Две системы линейных уравнений называются ***эквивалентными,*** или ***равносильными,*** если каждое решение первой системы (если они существуют) является решением второй, и наоборот. Соответствующие расширенные матрицы также называются эквивалентными.

При практическом решении системы линейных уравнений ***методом Жордана – Гаусса*** последовательно над строками матрицы $\hat{A}$ выполняют элементарные преобразования, так что некоторое неизвестное исключается из всех уравнений, кроме одного, т.е. в составе расширенной матрицы формируется единичная подматрица.

В процессе решения могут встретиться следующие случаи.

1. Будет получена матрица $\hat{A}'$, эквивалентная матрице $\hat{A}$, в левой части некоторой строки ее стоят нули, а в правой – число, отличное от нуля, что соответствует уравнению $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_1', (b_1' \quad 0)\neq$

Это признак несовместности системы (2.17), т.е. система не имеет решений.

2. В результате преобразований получилась матрица $\hat{A}'$ вида

$$
\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n' \end{pmatrix}.
$$

В этом случае система (2.17) совместна, определенная и имеет единственное решение: $x_1 = b_1', x_2 \quad b_2', \ldots = x_n \quad b_n'$.

3. На некотором этапе получилась расширенная матрица вида

$$
\hat{A}' = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1r+1}' & \cdots & a_{1n}' & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2r+1}' & \cdots & a_{2n}' & b_2' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{rr+1}' & \cdots & a_{rn}' & b_r' \end{array}\right).
$$

Система совместна и имеет бесчисленное множество решений. ***Общее решение*** системы можно записать в виде

$$x_1 = b_1' - a_{1r+1}'x_{r+1} - \dots - a_{1n}'x_n$$
$$x_2 = b_2' - a_{2r+1}'x_{r+1} - \dots - a_{2n}'x_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x_r = b_r' - a_{rr+1}'x_{r+1} - \dots - a_{rn}'x_n.$$

Придавая каждой из стоящих в правых частях равенств переменных $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ произвольные значения, будем получать ***частные решения*** системы.

Неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ называются ***базисными,*** или ***основными,*** они соответствуют линейно-независимым векторам $A_1, \dots, A_r$

Таким образом, любые ***r*** переменных называются базисными (основными), если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля, а остальные (***n – r***) переменных называются ***свободными,*** или ***неосновными. Базисным решением*** системы уравнений называется частное решение, в котором неосновные переменные имеют нулевые значения. Каждому разбиению на основные и неосновные переменные соответствует одно базисное решение, а количество способов разбиения не превышает величины

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Если все компоненты базисного решения неотрицательны, то такое решение называется ***опорным.***

2.3 Графический способ решения ЗЛП. Основные теоремы линейного программирования

Существуют два наиболее распространенных способа решения задач линейного программирования (ЗЛП): **графический метод** и симплекс-метод. Графический метод существенно нагляднее и обычно проще для понимания и решения (хотя занимает много времени, так как требует тщательного построения чертежа). Также этот метод позволяет практически одновременно найти решение на минимум и максимум, тогда как симплекс-методом придется делать "два подхода".

Основные **шаги по решению ЗПЛ графическим методом** следующие: построить область допустимых решений задачи (выпуклый многоугольник), который определяется как пересечение полуплоскостей, соответствующих неравенствам задачи, построить линию уровня целевой функции, и, наконец, двигать линию уровня в нужном направлении, пока не достигнем крайней точки области - оптимальной точки (или множества). При этом можно найти единственное оптимальное решение (точку), множество (отрезок) или ни одного (область пустая или не ограниченная в нужном направлении).

Основные теоремы линейного программирования

Чтобы найти оптимальное решение среди бесчисленного множества допустимых решений системы ограничений в задаче линейного программирования любого вида, понадобится ряд теорем, к рассмотрению которых мы и переходим.

Теорема 1. *Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.*

Множество решений задачи линейного программирования определяется совокупностью линейных ограничений, поэтому такое множество геометрически представляет собой выпуклый многогранник или неограниченную многогранную область, за исключением тех случаев, когда система ограничений несовместна.

Теорема 2. *Если существует, и притом единственное, оптимальное решение задачи линейного программирования, то оно совпадает с одной из угловых точек множества допустимых решений.*

Эта теорема позволяет сделать вывод, что поиски оптимального решения можно ограничить перебором конечного числа угловых точек. Однако для отыскания угловых точек требуется построение области решений системы ограничений. Это построение возможно только для двух- или трёхмерного пространства, а в общем случае задача остаётся неразрешимой. Следовательно, нужно располагать каким-то аналитическим методом, позволяющим находить координаты угловых точек. Для этого понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 3. *Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка области допустимых решений системы ограничений.*

Теорема 4 (обратная). *Каждой угловой точке множества допустимых решений системы ограничений соответствует допустимое базисное решение.*

Следствие. *Если существует, и притом единственное, оптимальное решение задачи линейного программирования, то оно совпадает с одним из допустимых базисных решений системы ограничений.*

Справедливость этого утверждения вытекает из теорем 2 и 4.

Итак, оптимум линейной формы нужно искать среди конечного числа допустимых базисных решений. Однако даже в простейших задачах линейного программирования (при небольших значениях m и n) нахождение оптимального решения путём рассмотрения всех базисных решений является крайне трудоёмким процессом, поскольку число базисных решений может быть весьма велико. Поэтому нужна какая-то вычислительная схема, позволяющая осуществлять переход от одного допустимого базисного решения к другому, при котором линейная форма или приблизилась к оптимуму, или, по крайней мере не изменила своего значения. Такой вычислительной схемой является, например, **симплекс-метод решения задач линейного программирования**.

2.4 Сущность и основные этапы симплекс-метода

Данный метод является методом целенаправленного перебора опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет за конечное число шагов либо найти оптимальное решение, либо установить, что оптимальное решение отсутствует.

Основное содержание симплексного метода заключается в следующем:

1. Указать способ нахождения оптимального опорного решения
2. Указать способ перехода от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному, т.е. указать способ улучшения опорного решения
3. Задать критерии, которые позволяют своевременно прекратить перебор опорных решений на оптимальном решении или следать заключение об отсутствии оптимального решения.

Алгоритм симплексного метода решения задач линейного программирования

Для того, чтобы решить задачу симплексным методом необходимо выполнить следующее:

1. Привести задачу к каноническому виду
2. Найти начальное опорное решение с "единичным базисом" (если опорное решение отсутствует, то задача не имеет решение ввиду несовместимости системы ограничений)
3. Вычислить оценки разложений векторов по базису опорного решения и заполнить таблицу симплексного метода
4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается
5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора находят все оптимальные решения

2.5 Постановка двойственных ЗЛП. Теоремы двойственности

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу линейного программирования, называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Связь исходной и двойственной задач заключается главным образом в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Основные утверждения о взаимно двойственных задачах содержатся в следующих теоремах.

Первая теорема двойственности. Если одна задача из пары двойственных обладает оптимальным решением, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения соответствующих целевых функций равны

$$\max Z = \min f.$$

Если же у одной из этих задач целевая функция не ограничена, то двойственная ей задача не имеет допустимых решений. Наконец, если одна из этих задач не имеет допустимых решений, то двойственная ей задача либо также не имеет допустимых решений, либо имеет неограниченную целевую функцию.

Вторая теорема двойственности. Для того, чтобы два допустимых решения $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $У=(y_1, y_2, ..., y_m)$ пары двойственных задач были оптимальными необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли так называемым «условиям дополняющей нежесткости»:

1) $$x_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j) = 0, \; j = 1, 2, ..., n;$$

2) $$y_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i) = 0, i = 1, 2, ..., m,$$

т.е. чтобы равнялось нулю произведение значений любой переменной одной задачи на разность между значениями левой и правой частей соответствующего ограничения двойственной задачи.

Третья теорема двойственности (теорема об оценках). Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов ограничений исходной задачи на экстремальное значение ее целевой функции Z_{max}, т.е.

$$y_i = \frac{\partial Z \max}{\partial b_i}.$$

2.6 Экономическая интерпретация двойственности

Задача рассчитывается как задача распределения ресурсов

$$F = \sum_{j=1}^{0} c_j x_j \to max$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} b_j y \to min$$

i=1 … → m ресурс

j= 1 … → n вид деятельности

C_j - прибыль приходящихся на ед продукцию j вида произвольной деятельности.

a_ij - расход и того ресурса запасы которого ограничены

b_j на ед продукции j вида

Экономическая интерпретация переменных

Fmax = Zmin ΣB_i y_j анализируется с точки зрения размерности входящих в нее величин

F = [руб]

У = [руб/ед ресурса] – ценность каждого ресурса (теневые цены)

Для оценки приоритета ресурса → можно определить приоритетное направление прироста ресурсов

F<Z

Прибыль < общая ценность ресурсов

До тех пор пока прибыль меньше суммарной ценности ресурсов решения остаются неоптимальными. Оптимальность достигается тогда когда F=Z
Модель линейного программирования можно рассматривать как оператор описывающий-взаимосвязь между входом и выходом
Система остается в нестабильном состоянии до тех пор пока вход>выхода при равенстве прибыли общей ценности ресурсов
Экономическая интерпретация ограничений
На любом этапе симплекс метода элемент в Z строке при b_i равен разности между правой и левой частями ограничений двойственной задачи
$Z_i=\Sigma a_{ij} y_i-c_j$ с точки зрения размерности входящих в него величин
Так как c_j представляет собой удельную прибыль то и $\Sigma a_{ij} y_i$ должна соответствовать удельным затратам. Суммарная оценка всех ресурсов используемых при производстве продукций
Размерность позволяет записать
(Прибыль(руб))/(ед.прод.)= (издержки в руб.)/(на ед.прод.)- (прибыль в руб.)/(ед.прод.)
В зависимости то знак равенства левая часть будет представлять либо прибыль либо издержки
Условия оптимальности заключается в том , что вид производственной деятельности не представленный в текущем решении = базисные переменные $x_j\neq0$ должен вводится с отличным от нуля и положительным уровнем использования $Z_j\geq0$ то результат данного вида деятельности не приведет к увеличению прибыли (целевой функции)
Экономическая интерпретация этого условия с учетом размерности выглядит
Неиспользуемый вид деятельности может быть представлен только в том случае
$\Sigma a_{ij} y_i-c_j<0$
Оценка всех ресурсов, используемая при производстве j вида – прибыль от реализации <0
Пока прибыль > суммарную оценку ресурсов уровень использования данного вида производственной деятельности увеличивается.
Любое дальнейшее повышение уровня приведет к тому что оценка превысит прибыль

Экономическая интерпретация двойственности
Улучшение операционных характеристик системы может быть достигнуто. Увеличение вкладов в целевую функцию связано с факторами неподдающихся управлению
Увеличение лимита ресурсов (поддается управлению) перспективное направление их прироста можно выделить с учетом двойственных оценок
Уменьшение потребления ресурсов (управляемый и реализуется за счет ресурсосберегающих технологий)

2.7 Анализ оптимального решения на чувствительность

Анализ моделей на чувствительность позволяет выявить ***чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходных условий***, например:
1) изменениям запасов исходных продуктов,
2) изменениям рыночного спроса на изделия,
3) изменениям рыночных цен на изделия.

Каждое ***ограничение задачи линейного программирования*** представляется прямой, соответствующей уравнению ограничений линейной модели. ***Анализ моделей на чувствительность проводится после получения оптимального решение задачи. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели.*** **В задаче о производстве красок, например, может представить интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличение и уменьшение спроса или изменения запасов исходных продуктов. Можно проанализировать влияние на оптимальное решение изменения рыночных цен.**

При таком анализе рассматривается некоторая совокупность оптимизационных моделей. Это придает модели определенную динамичность, позволяющую провести анализ влияния возможных изменений исходных условий на полученное оптимальное решение.

Динамические характеристики модели фактически отображают аналогичные характеристики, свойственные реальным процессам. Отсутствие анализа, позволяющего выявить влияние возможных изменений параметров модели на оптимальное решение, может привести к тому, что полученное статическое решение устареет еще до своей реализации.

Для проведения анализа модели на чувствительность будем использовать графический метод.

Первая задача анализа на чувствительность. На сколько можно сократить или увеличить запасы ресурсов?

После нахождения оптимального решения представляется вполне логичным выяснить, как отразится на оптимальном решении изменение запасов ресурсов. Особенно важно проанализировать следующие два аспекта.

1. *На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции z?*
2. *На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?*

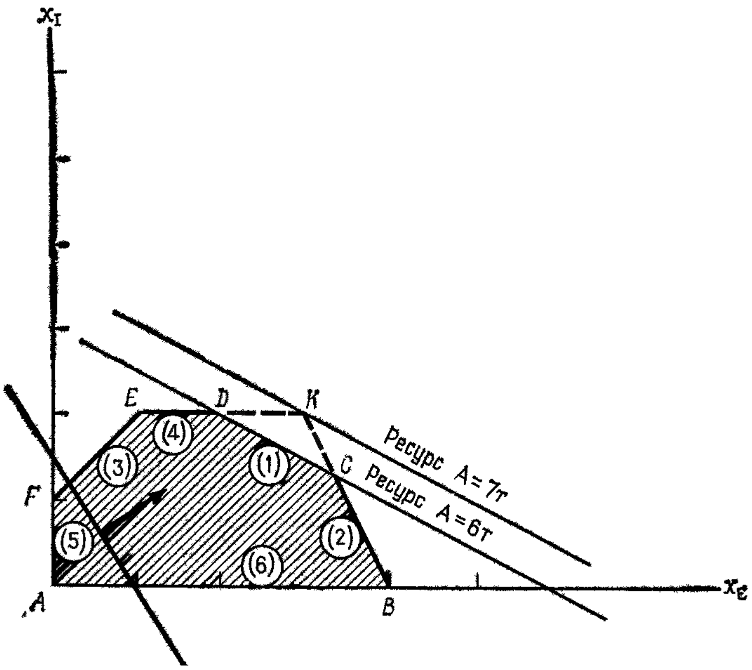
Так как величина запаса каждого из ресурсов фиксируется в правых частях ограничений, этот вид анализа обычно идентифицируется как анализ модели на чувствительность к правой части (ограничений). Прежде чем ответить на поставленные вопросы, классифицируем ограничения линейной модели как связывающие (*активные*) и несвязывающие (*неактивные*) ограничения. Прямая, представляющая связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку. В противном случае соответствующее ограничение будет не связывающим. На рис. 1 связывающими ограничениями являются только ограничения (1) и (2), которые лимитируют запасы исходных продуктов (ресурсов) A и B.

Если некоторое ограничение является связывающим, логично отнести соответствующий ресурс к разряду дефицитных ресурсов , так как он используется полностью. Ресурс, с которым ассоциировано *несвязывающее* ограничение, следует отнести к разряду недефицитных ресурсов (т. е. имеющихся в некотором избытке). Таким образом, при анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяются:

1. предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение
2. предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного ранее оптимального значения целевой функции.

Информация, полученная в последнем случае, особенно полезна в тех ситуациях, когда излишки недефицитного ресурса могут быть использованы для других целей. Отметим, что увеличение избыточного ресурса не скажется на оптимальном решении (избыточный ресурс станет еще более избыточным). Очевидно, что сокращение дефицитного ресурса не улучшит значения целевой функции.

Вернемся к примеру о производстве красок. В рассмотренном примере используемые продукты A и B (ограничения (1) и (2)) являются дефицитными ресурсами. Рассмотрим сначала ресурс A. Из рис. 6 видно, что при увеличении запаса этого ресурса прямая (1) (или отрезок CD) перемещается вверх параллельно самой себе, постепенно "стягивая" в точку треугольник CDK. (*Стороны CK и DK этого треугольника представляют собой продолжения прямых, соответствующих ограничениям (2) и*



(4).)

Рис. 6. $C:(3\frac{1}{3},1\frac{1}{3});\ z=12\frac{1}{3};\ K:(3,2);\ z=13.$

В точке К ограничения (2) и (4) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка К, а пространством (допустимых) решений становится многоугольник ABKEF. В точке К ограничение (1) (для ресурса А) *становится избыточным*, так как любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение.
Таким образом, объем ресурса А не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение (1) становится избыточным, т. е. прямая (1) проходит через новую оптимальную точку К. Этот предельный уровень определяется следующим образом. Сначала нужно найти координаты точки К, в которой пересекаются прямые (2) и (4),

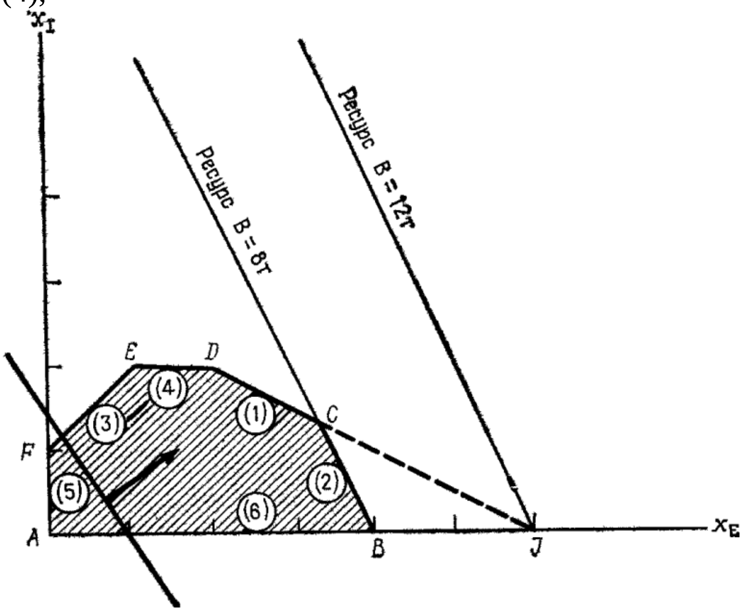


Рис. 7. $C:(3\frac{1}{3},1\frac{1}{3});\ z=12\frac{1}{3};\ J:(6,0);\ z=18$

т. е. находится решение системы уравнений

$2x_E + x_I = 8$ (*прямая* (2)),

$x_I = 2$ (*прямая* (4)).

В результате получается xE=3 и xI=2. Затем путем подстановки координат точки К в левую часть ограничения (1) определяется максимально допустимый запас ресурса А: $x_E + 2x_I = 3 + 2 \times 2 = 7$т. При этом $z = 3x_E + 2x_I = 3\times 3 + 2 \times 2 = 13т$ Рис. 7 иллюстрирует ситуацию, когда рассматривается вопрос о целесообразности увеличения запаса дефицитного ресурса (2) (исходного продукта В). Новой оптимальной точкой становится точка J, где пересекаются прямые (6) и (1), т. е. xI=0 и $x_E + 2x_I = 6$ Отсюда следует, что xE=6, xI=0 причем запас продукта В можно увеличить до значения, равного $2x_E + x_I = 2 \times 6 + 1 \times 0 = 12$т. При этом $z = 3x_E + 2x_I = 3 \times 6 + 2 \times 0 = 18m$

Рассмотрим теперь вопрос об уменьшении правой части не связывающих ограничений. Ограничение (4), xI=2, фиксирует предельный уровень спроса на краску I. Из рис. 2 следует, что, не изменяя оптимального решения, прямую (4) (ED) можно опускать вниз до пересечения с оптимальной точкой С. точка С имеет координаты $x_E = 3\frac{1}{3}$ и $x_I = 1\frac{1}{3}$ уменьшение спроса, на краску I до величины $x_I = 1\frac{1}{3}$ никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения. Рассмотрим ограничение (3), $-x_E + x_I \le 1$ которое представляет соотношение между спросом на краску I и спросом на краску Е. И в этом случае правую часть ограничения можно уменьшать до тех пор, пока прямая (3) (EF) не достигнет точки С. При этом правая часть ограничения (3) станет равной $-x_E + x_I = (-3\frac{1}{3}) + 1\frac{1}{3} = -2$ что позволяет записать это ограничение в виде $-x_E + x_I \le -2$ или в эквивалентной форме: $x_E - x_I \ge 2$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если спрос на краску Е превысит спрос на краску I не более чем на 2т.

Результаты проведенного анализа можно свести в следующую таблицу.

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, т	Максимальное изменение дохода от реализации z, тыс. долл.
1	Дефицитный	7-6=+1	$13\text{-}12^2/_3=+^1/_3$
2	Дефицитный	12-8=+4	$18-12\frac{2}{3} = +5\frac{1}{3}$
3	Недефицитный	-2-1=-3	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$
4	Недефицитный	$1^1/_3\text{-}2=\text{-}^1/_3$	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$

Вторая задача анализа на чувствительность.
Увеличение объема какого из ресурсов наиболее выгодно?
В первой задаче анализа на чувствительность мы исследовали влияние на оптимум увеличения объема дефицитных ресурсов (т. е., изменения связывающих ограничений). При ограничениях на затраты, связанные с дополнительным привлечением ресурсов, естественно задать вопрос: какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? С помощью методов линейного программирования удается ответить и на такой вопрос.
Для этого вводится характеристика ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, выражаемая через соответствующее приращение оптимального значения целевой функции. Такую характеристику для рассматриваемого примера можно получить непосредственно из таблицы, в которой приведены результаты решения первой задачи анализа на чувствительность.

Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса i через yi Величина yi, определяется из соотношения

$$y_i = \frac{\text{Максимальное приращение оптимального значения } z}{\text{Максимально допустимый прирост объёма ресурса } i}$$

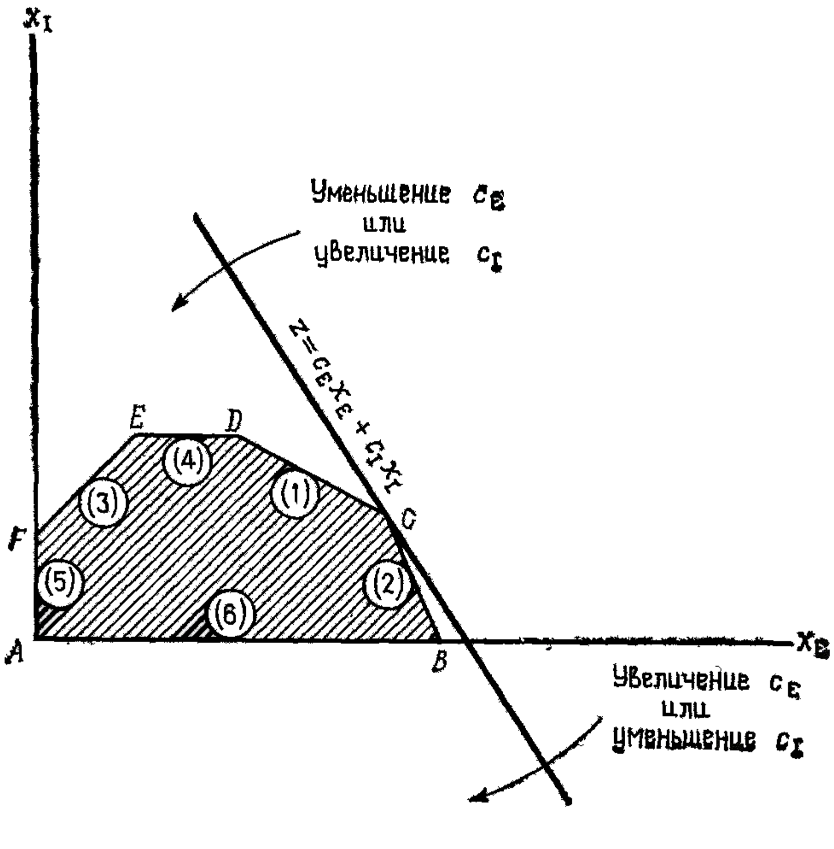
Воспользовавшись данными указанной таблицы, для ограничения (1) (продукт А) получим $y_i = \frac{13 - 12\frac{2}{3}}{7-6} = \frac{1}{3}$ *тыс. долл./тонна А.*

Аналогичным образом можно определить ценность единицы каждого из ресурсов и представить результаты в следующей таблице:Аналогичным образом можно определить ценность единицы каждого из ресурсов и представить результаты в следующей таблице:

Ресурс	Тип ресурса	Значение y_i, тыс. долл./тонна
1	**Дефицитный**	$y_1 = 1/3$
2	**Дефицитный**	$y_2 = 4/3$
3	**Недефицитный**	$y_3 = 0$
4	**Недефицитный**	$y_4 = 0$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса 2 (продукт В) и лишь затем-на увеличение ресурса 1 (продукт А). Что касается недефицитных ресурсов, то, как и следовало ожидать, их объем увеличивать не следует.

Третья задача анализа на чувствительность. *В каких пределах допустимо изменение коэффициентов целевой функции?* Изменение коэффициентов целевой функции, которые определяются ценами на готовую продукцию, оказывает влияние на наклон прямой, которая представляет эту функцию в принятой системе координат. Очевидно, что идентификация конкретной угловой точки в качестве оптимума зависит прежде всего от наклона этой прямой. Это означает, что вариация коэффициентов целевой функции может привести к изменению совокупности связывающих ограничений и, следовательно, статуса того или иного ресурса (т. е. сделать недефицитный ресурс дефицитным, и наоборот). Таким образом, в рамках анализа модели на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции могут исследоваться следующие



вопросы.

Рис. 8.

 Каков диапазон изменения (увеличения или уменьшения) того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

 Насколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Обсудим эти вопросы на нашем примере. Рассматривая первый вопрос, обозначим через cE и cI доходы фирмы от продажи 1 т краски E и 1 т краски I соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде: $z = c_E x_E + c_I x_I$

Из рис. 8 видно, что при увеличении cE или уменьшении cI прямая, представляющая целевую функцию z, вращается (вокруг точки C) по часовой стрелке. Если же cE уменьшается или cI увеличивается, эта прямая вращается в противоположном направлении - против часовой стрелки. Таким образом, точка C будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых, соответствующих ограничениям (1) и (2). Когда наклон прямой z станет равным наклону прямой для ограничения (1), получим две альтернативные оптимальные угловые точки C и D. Аналогично, если наклон прямой z станет равным наклону прямой для ограничения (2), будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки B и C. (Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же оптимальное значение z может достигаться при различных значениях переменных.

Как только наклон прямой z выйдет за пределы указанного выше интервала, получим некоторое новое оптимальное решение (точка B или точка D).

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим, каким образом можно найти допустимый интервал изменения cE, при котором точка C остается оптимальной. Исходное значение коэффициента cI=2 оставим неизменным. Из рис. 8 видно, что значение cE можно увеличивать до тех пор, пока прямая z не совпадет с прямой (2), или уменьшать, пока прямая z не совпадет с прямой (1). Эти крайние значения коэффициента cE можно определить из равенства наклонов прямой z и прямой (2) (максимальное значение cE) и равенства наклонов прямой z и прямой (1) (минимальное значение cE). Так как тангенс угла наклона для прямой z равен cE/2,.а для прямых (1) и (2) соответственно 1/2 и 2/1, минимальное значение cE определяем из равенства $c_E / 2 = \frac{1}{2}$, *откуда* $\min c_E = 1$,

а максимальное значение cE находим из равенства $c_E / 2 = \frac{2}{1}$, *откуда* $\max c_E = 4$.

Интервал изменения cE, в котором точка C по-прежнему остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством 1.

2.8 Распределительные ЗЛП. Постановка транспортных задач

К распределительным задачам относятся экономико-математические задачи, связанные с распределением ресурсов по работам, которые необходимо выполнить. В случае если ресурсов достаточно, чтобы каждую работу выполнить наиболее эффективно, задача не возникает. В противоположном случае перераспределение ресурсов с одной работы на другую приводит к изменению общей эффективности всех работ, вместе взятых. Поэтому распределительная задача заключается в отыскании наилучшего распределения ресурсов, при котором оптимизируется соответствующая целевая функция. В зависимости от задачи целевой функцией может быть максимизация общего *дохода* либо минимизация *затрат*.

Такие задачи чаще всего приводятся к линейному виду (иногда искусственно за счет упрощений) и решаются методами *линейного программирования*. Симплексный метод является универсальным методом решения задач линейного программирования. В тоже время существует множество задач, которые в силу своей специфики могут быть решены более простыми методами.

К числу указанных задач относятся такие широко распространенные задачи, как *транспортная задача линейного программирования*, *задача о назначения х*и многие другие.

Постановка транспортной задачи общего вида

Классическая постановка транспортной задачи общего вида такова.
Имеется m пунктов отправления («поставщиков») и n пунктов потребления («потребителей») некоторого одинакового товара. Для каждого пункта определены:
a_i– объемы производства i -го поставщика, $i = 1, \dots, m$;
b_j – спрос j-го потребителя, $j= 1,\dots,n$;
c_{ij} – стоимость перевозки одной единицы продукции из пункта A_i– i-го поставщика, в пункт B_j – j-го потребителя.

Для наглядности данные удобно представлять в виде таблицы, которую называют таблицей стоимостей перевозок.

Поставщики ↓ Потребители →	1	2		n	запасы
A_1	11	12		1n	a_1
A_2	21	22		2n	a_2
…					
A_m	m1	m2		mn	a_m
Потребности	1	2		n	

Требуется найти план перевозок, при котором бы полностью удовлетворялся спрос всех потребителей, при этом хватало бы запасов поставщиков и суммарные транспортные расходы были бы минимальными.
Под планом перевозок понимают объем перевозок, т.е. количество товара, которое необходимо перевезти от i-го поставщика к j-му потребителю. Для построения математической модели задачи необходимо ввести $m{\cdot}n$ штук переменных x_{ij}, $i= 1,\dots, n$, $j= 1, \dots, m$, каждая переменная x_{ij} обозначает объем перевозок из пункта A_i в пункт B_j. Набор переменных $X = \{x_{ij}\}$ и будет планом, который необходимо найти, исходя из постановки задачи.

Ограничения задачи примут вид:

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min & \text{– условие минимизации суммарных транспортных расходов;} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = 1,\dots,m & \text{– ограничения по запасам;} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \ge в_j,\ j = 1,\dots,n & \text{– ограничения по потребностям;} \\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n & \text{– условие неотрицательности.} \end{cases} \qquad (1)$$

Это условие для решения закрытых и открытых транспортных задач (ЗТЗ). Очевидно, что для разрешимости задачи 1 необходимо, чтобы суммарный спрос не превышал объема производства у поставщиков:

$$\sum_{j=1}^{n} в_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Если это неравенство выполняется строго, то задача называется **«открытой» или «несбалансированной»**, если же $\sum\limits_i a_i = \sum\limits_j в_j$, то **задача называется «закрытой» транспортной задачей**, и будет иметь вид (2):

$$\begin{cases} f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ j = 1,\ldots,m; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i,\ j = 1,\ldots,n,\ x_{ij} \geq 0; \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} в_j. \end{cases}$$

$\sum_i a_i = \sum_i в_i$ – условие сбалансированности. Это условие для решения закрытых транспортных задач (ЗТЗ).

В силу ограничений (2) нетрудно увидеть, что ЗТЗ является задачей ЛП и может быть решена симплекс-методом после приведения ее к специальному виду. Но структура системы ограничений имеет некоторою специфику, а именно: каждая переменная x_{ij} входит ровно два раза в неравенства системы, и все переменные входят в неравенства системы с коэффициентом 1. В силу этой специфики существует более простой метод решения, называемый *методом потенциалов*, который, по сути, является некоторой модификацией симплекс-метода. По-прежнему идеей является переход от одного опорного плана к другому, обязательно «лучшему» с точки зрения значения целевой функции. Каждому опорному плану также соответствует своя распределительная таблица. Переход осуществляется от одного плана к другому, пока полученный план не будет удовлетворять условию оптимальности. Необходимо научиться строить первоначальный опорный план. В качестве первоначального плана годится любое решение системы уравнений (2). Заметим, что это система линейных уравнений, состоящая из $m + n$ уравнений с $m*n$ неизвестными. Можно доказать, что линейно независимых уравнений в системе (2) $m + n - 1$, ввиду условия сбалансированности, т.е. базисных переменных должно быть $m + n - 1$. Итак, в качестве плана будем представлять себе таблицу размера $m \cdot n$, в которой должно быть занято $m + n - 1$ клеток, отвечающих базисным переменным x_{ij}.

Транспортные задачи с неправильным балансом

В рассмотренной модели транспортной задачи мы предполагали, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

Такая задача называется задачей с правильным балансом, а ее модель — закрытой. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а ее модель — открытой. Решение задачи с неправильным балансом сводится к решению задачи с правильным балансом введением в ее математическую модель фиктивного поставщика или фиктивного потребителя. Тарифы на перевозку грузов от таких поставщиков или к таким потребителям полагаются равными *0* (т.е. фактически соответствующие перевозки не производятся). В случае превышения общего запаса продукции над потребностью, т.е. если

$$\sum_{i=1}^{k} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

в рассмотрение вводится фиктивный потребитель с потребностью

$$b_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

и тарифами на перевозку $c_{i(k+1)} = 0$. Если же

$$\sum_{i=1}^{k} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

то вводится фиктивный поставщик, запасы которого равны

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{k} a_i;$$

с тарифами на перевозку $c_{(n+1)j}=0$. Этим приемом задача сводится к закрытой транспортной задаче, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи. Заметим, что при составлении начального опорного решения для ускорения вычислений в последнюю очередь следует (хотя и не обязательно) распределять запасы фиктивного поставщика и удовлетворять запросы фиктивного потребителя, несмотря на то, что им соответствуют наименьшие тарифы на перевозку (равные *0*).

Построение первоначального опорного плана по правилу наименьшей стоимости

Построение плана по правилу наименьшей стоимости заключается в следующем. Рассматриваем матрицу (таблицу) транспортных расходов, стоимостей, данную изначально в качестве условия задачи. Выбираем клетку с минимальной ценой перевозки (клетка с номером i, j) и помещаем в эту клетку наименьшее из чисел $\{a_i, b_j\}$. Затем исключаем из рассмотрения строку, соответствующую поставщику (если a_i меньшее), или столбец, соответствующий потребителю (если $в_j$ меньшее). Исключение строки означает, что запасы i-го потребителя удовлетворены. Из оставшейся таблицы снова выбираем наименьшую стоимость, и т.д. продолжаем до тех пор, пока все запасы не исчерпаны, а потребности не удовлетворены. Проверьте, что сумма чисел в каждой строке получившейся таблицы равна a_i, а сумма чисел в каждом столбце равна $в_j$, что и требовалось. Число занятых клеток должно равняться $m + n – 1$, в противном случае, если занятых клеток меньше, чем $m + n – 1$, дополним таблицу необходимым количеством нулей (нулевых перевозок) и будем считать эти клетки с нулями занятыми так, чтобы общее количество занятых клеток равнялось равно $m + n – 1$. Нули поставим в клетки, соответствующие минимальной стоимости.

Метод потенциалов

При построении плана мы ставим задачу найти хоть какой-нибудь, не обязательно лучший, оптимальный план, удовлетворяющий ограничениям задачи. Теперь нам хотелось бы уметь отвечать на вопрос: является ли найденный опорный план оптимальным, и если нет, то «улучшать» его. Эту задачу решает метод потенциалов, предложенный в 1949 г. советскими учеными Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным. теоретической основой метода является теорема.

Теорема. Если для некоторого опорного плана $X = \{x_{ij}\}$ транспортной задачи можно подобрать систему из $m + n$ чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots v_n$, называемых потенциалами, то план оптимален тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1. $u_i+v_j=c_{ij}$ для всех $x_{ij} > 0$ (1)
2. $u_i+v_j \le c_{ij}$ для всех $i = 1,m$, $j = 1,n$

где (c_{ij}) – матрица стоимостей перевозок.

Доказательство теоремы опускаем, оно основывается на рассмотрении двойственной задачи к исходной транспортной. Итерация метода потенциалов состоит из трех шагов.

I шаг (вычисление потенциалов).

Условие (1) представляет собой систему из ($m + n – 1$) линейных уравнений с ($m + n$) неизвестными потенциалами. Поэтому одно из неизвестных полагаем равным 0 для определенности, затем последовательно находим остальные потенциалы.

II шаг (проверка плана на оптимальность).

Для проверки плана на оптимальность необходимо проверить условие (2). Для занятых клеток это условие выполняется, именно на них достигается равенство. Остается посчитать суммы $u_i + v_j$ для свободных клеток. Если $u_i + v_j \le c_{ij}$, то, по теореме, план является оптимальным и задача решена.

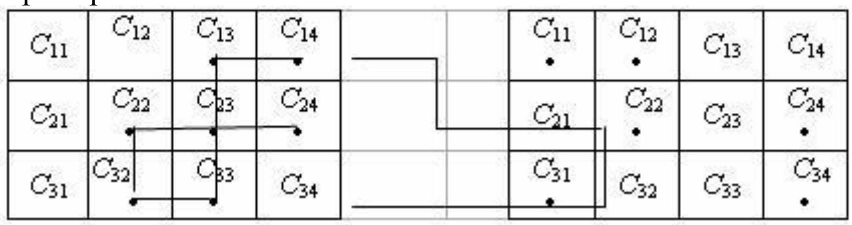
III шаг (улучшение плана).

Для проведения операции улучшения плана нам понадобится понятие цикла.

Определение. Циклом будем называть набор клеток матрицы перевозок, в котором две и ровно две соседние клетки расположены в одной строке или в одном столбце, и первая и последняя клетки набора лежат тоже в одной строке или столбце.

Графически нетрудно представить цикл в виде ломаной, каждое звено которой лежит в строке или в столбце, причем в каждой строке или столбце не более чем по одному звену.

Примеры:



С понятием цикла связаны важные свойства планов:

1. допустимый план является опорным, когда из занятых этим планом клеток нельзя образовать ни одного цикла;
2. если имеем опорный план, то для каждой свободной клетки можно образовать единственный цикл, содержащий данную клетку и некоторые из занятых.

Улучшение плана производится по следующей схеме. В подчеркнутых клетках табл. 2 находим клетку с наибольшей разностью $u_i + v_j - c_{ij}$, т.е. где условие (2) нарушается максимально.

Затем для этой клетки, согласно утверждению 2, строим единственный цикл. Набор клеток в цикле помечаем поочередно знаками «+» и «–», начиная с «+» в свободной клетке. Начиная с клетки (1, 1), где условие (2) нарушено максимально, строим цикл. Клетку (1, 1) помечаем знаком «+». Цикл единственен, у нас все занятые клетки вошли в цикл, но это необязательно. Строим новый план x^n по правилу:

$$x_{ij}^{n} = \begin{cases} x_{ij} - \Delta & \text{для клеток с «–»,} \\ x_{ij} + \Delta & \text{для клеток с « + »,} \\ x_{ij} & \text{для клеток, не входящих в цикл.} \end{cases}$$

Замечание. Если транспортная задача является задачей открытого типа, в которой условие баланса не выполняется, а именно сумма запасов больше суммы потребностей, то решить такую задачу можно по предложенной схеме методом потенциалов, введя дополнительного потребителя, с потребностью равной разности балансов и нулевыми стоимостями перевозок от каждого поставщика к этому потребителю.

Виды транспортных задач

1. Классическая транспортная задача (перевозка грузов от поставщиков к потребителям);
2. Задача коммивояжера;
3. Задача о назначениях;

Методы решения транспортных задач

1. Классическая транспортная задача (перевозка грузов от поставщиков к потребителям);
   Методы решения: метод потенциалов, симплексный метод;
2. Задача коммивояжера;
   Методы решения: метод ветвей и границ, венгерский метод, метод минимальных линий;
3. Задача о назначениях;
   Методы решения: венгерский метод, метод Мака, метод минимальных линий.

2.9 Решение транспортных задач

Транспортная задача (задача Монжа - Канторовича) - математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов из аккумулятора к приемникам с минимизацией затрат на перемещение. Для простоты понимания рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления (например, складов) в пункты потребления (например, магазины), с минимальными общими затратами на перевозки. Математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид:

где: Z - затраты на перевозку грузов

X - объем груза; C - стоимость (тариф) перевозки единицы груза;

A - запас поставщика;

B - запрос потребителя;

m - число поставщиков;

n - число потребителей.

Решить транспортную задачу можно различными методами, начиная от симплекс-метода и простого перебора, и заканчивая методом графов. Один из наиболее применяемых и подходящих для большинства случаев методов – итерационное улучшение плана перевозок. Суть его в следующем: находим некий опорный план и проверяем его на оптимальность ($Z \to \min$). Если план оптимален – решение найдено. Если нет – улучшает план столько раз, сколько потребуется, пока не будет найден оптимальный план. Ниже приведен алгоритм решения транспортной задачи в самом общем виде:

1. Построение транспортной таблицы.
2. Проверка задачи на закрытость.
3. Составление опорного плана.
4. Проверка опорного плана на вырожденность.
5. Вычисление потенциалов для плана перевозки.
6. Проверка опорного плана на оптимальность.
7. Перераспределение поставок.
8. Если оптимальное решение найдено, переходим к п. 9, если нет – к п. 5.
9. Вычисление общих затрат на перевозку груза.
10. Построение графа перевозок.

1. Построение транспортной таблицы.

Строим таблицу, где указываем запасы материалов, имеющиеся на складах поставщиков (Ai), и потребности заводов (Bj) в этих материалах. В нижний правый угол ячеек таблицы заносим значение тарифов на перевозку груза (Cij).

2. Проверка задачи на закрытость Обозначим суммарный запас груза у всех поставщиков символом A, а суммарную потребность в грузе у всех потребителей – символом B. Тогда: Транспортная задача называется закрытой, если $A = B$. Если же $A \neq B$, то транспортная задача называется открытой. В случае закрытой задачи от поставщиков будут вывезены все запасы груза, и все заявки потребителей будут удовлетворены. В случае открытой задачи для ее решения придется вводить фиктивных поставщиков или потребителей. Проверим задачу на закрытость: $A = 10 + 20 + 30 = 60$ $B = 15 + 20 + 25 = 60$ $A = B$, следовательно данная транспортная задача – закрытая.

3. Составление опорного плана Составляет предварительный (опорный) план перевозок. Он не обязательно должен быть оптимальный. Это просто своеобразный «черновик», «набросок», улучшая который мы постепенно придем к плану оптимальному. Есть разные методы нахождения опорного плана. Наиболее распространены следующие:

а) Метод Северо-Западного угла.

Суть метода проста - ячейки транспортной таблицы последовательно заполняются максимально возможными объемами перевозок, в направлении сверху вниз и слева направо. То есть сперва заполняется самая верхняя левая ячейка ("северо-западная" ячейка), потом следующая справа и т.д. Затем переходят на новую строку и вновь заполняют ее слева направо. И так пока таблица не будет заполнена полностью.

б) Метод минимального элемента.

Метод заключается в том, что для заполнения ячеек транспортной таблицы выбирается клетка с минимальным значением тарифа. Затем выбирается следующая клетка с наименьшим тарифом и так продолжается до тех пор, пока таблица не будет заполнена (все запасы и потребности при этом обнулятся).

в) Аппроксимация Фогеля.

Основа метода в нахождении разности (по модулю) между парой минимальных тарифов в каждой строке и столбце. Затем в строке или столбце с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Затем все эти действия повторяются заново, только при этом уже не учитываются заполненные клетки.

г) Метод двойного предпочтения.

Суть метода в том, что отмечаются клетки с наименьшим тарифом по строкам, а затем по столбцам. Затем ячейки заполняются в следующей очередности: сначала клетки с двумя отметками, потом с одной, наконец без отметок.

4. Проверка опорного плана на вырожденность.

Клетки таблицы, в которые записаны отличные от нуля перевозки, называются базисными, а остальные (пустые) - свободными. План называется вырожденным, если количество базисных клеток в нем меньше, чем $m + n - 1$. Если во время решения задачи получился вырожденный план, то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток нулевую перевозку и превратив, тем самым, эти клетки в базисные (общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменятся). Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. План должен быть ациклическим! План называется ациклическим, если его базисные клетки не содержат циклов. Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ниже приведен пример цикла: Ломаная линия может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла. Кол-во базисных клеток = 5 $m + n – 1 = 3 + 3 – 1 = 5$ Следовательно, первоначальный план перевозок – невырожденный.

5.Вычисление потенциалов для плана перевозки.

Для анализа полученных планов и их последующего улучшения удобно ввести дополнительные характеристики пунктов отправления и назначения, называемые потенциалами. Этот метод улучшения плана перевозок называется методом потенциалов. Есть другие методы итерационного улучшения плана перевозок, но здесь мы их рассматривать не будем. Итак, сопоставим каждому поставщику Ai и каждому потребителю Bj величины Ui и Vj соответственно так, чтобы для всех базисных клеток плана было выполнено соотношение: $Ui + Vj = Cij$ Добавим к транспортной таблице дополнительную строку и столбец для Ui и Vj. Предположим, что $U1 = 0$. Тогда мы сможем найти $V3 = C13 – U1 = 1 – 0 = 1$. Зная V3, мы теперь можем найти U3: По аналогии вычисляем все оставшиеся потенциалы:

6. Проверка плана на оптимальность методом потенциалов. Для каждой свободной клетки плана вычислим разности $\Delta Cij = Cij – (Ui + Vj)$ и запишем полученные значения в левых нижних углах соответствующих ячеек. План является оптимальным, если все разности $\Delta Cij \geq 0$. В данном случае план – неоптимальный ($\Delta C22 < 0$), и его следует улучшить путем перераспределения поставок.

7. Перераспределение поставок. Найдем ячейку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной разностью ΔCij и построим цикл, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными. Такой цикл всегда существует и единственен. Отметим ячейку с отрицательной разностью ΔCij знаком «+», следующую знаком «-», и так далее, поочередно. Затем находим минимальной значение груза в ячейках цикла имеющих знак «-» (здесь это 5) и вписываем его в свободную ячейку со знаком «+». Затем последовательно обходим все ячейки цикла, поочередно вычитая и прибавляя к ним минимальное значение (в соответствии со знаками, которыми эти ячейки помечены: где минус - вычитаем, где плюс - прибавляем). Получим новый опорный план перевозок: Так как базисных клеток стало больше, чем $m + n – 1$, то базисную клетку с нулевым значением делаем свободной: Снова вычисляем значения потенциалов и разности ΔCij: На этот раз все разности ΔCij ячеек положительные, следовательно, найдено оптимальное решение.

8. Если оптимальное решение найдено, переходим к п. 9, если нет – к п. 5. У нас оптимальное решение найдено, поэтому переходим к пункту 9.

9. Вычисление общих затрат на перевозку груза Вычислим общие затраты на перевозку груза (Z), соответствующие найденному нами оптимальному плану, по формуле: Zmin = 10 · 1 + 15 · 3 + 5 · 2 + 15 · 1 + 15 · 2 = 110 ден. ед. Общие затраты на доставку всей продукции, для оптимального решения, составляют 110 ден. ед. 10. Построение графа перевозок Найдя оптимальный план перевозок, построим граф. Вершинами графа будут «склады» и «магазины». В вершинах укажем соответствующие объемы запасов и потребностей. Дугам, соединяющим вершины графа, будут соответствовать ненулевые перевозки. Каждую такую дугу подпишем, указав объем перевозимого груза.

2.10 Многопродуктовые модели. Перевозка с промежуточными пунктами

Транспортная задача с промежуточными пунктами.

Одно практически важное обобщение классической транспортной задачи связано с учетом возможности доставки товара от i-го источника j-му стоку по маршруту, проходящему через некоторый промежуточный пункт (склад). Так, например, промежуточные пункты являются составной частью распределительной системы любой крупной компании, имеющей сеть универсальных магазинов во многих городах. Такая компания обычно имеет зональные оптовые базы (источники), снабжающие товарами более мелкие региональные склады (промежуточные пункты), откуда эти товары поступают в розничную торговую сеть (стоки). При этом товар для каждого фиксированного стока в общем случае может быть доставлен не из любого источника и по маршрутам, не обязательно проходящим через все промежуточные пункты. Кроме того, промежуточные пункты могут обладать вполне определенной спецификой. Так, например, при транспортировке товара от источника к стоку по маршруту, проходящему через склад, часть товара может быть использована для создания неприкосновенного запаса на складе.

Задачу выбора плана перевозок товаров от источников стокам с учетом промежуточных пунктов, обеспечивающего минимальные транспортные затраты и потребности стоков, в исследовании операций называют транспортной задачей с промежуточными пунктами. Для приобретения практических навыков в построении математических моделей таких задач обратимся к следующему примеру.

На рис. 2.1-1 представлена схема размещения складов, на которой указаны: а) склады в виде узлов сети с номерами от 1 до 8; б) избыток товара на складе, который должен быть перераспределен в системе складов (указан в квадратных скобках рядом с узлом сети положительным числом и выражен в единицах измерения товара); в) недостаток товара на складе, который должен быть устранен за счет его поставок с других складов системы (указан в квадратных скобках рядом с узлом сети отрицательным числом); г) возможность перевозки товара со склада i на склад j (ориентированная дуга от круга с номером i к кругу с номером j); д) затраты, связанные с перевозкой единицы товара со склада i на склад j (величина c_{ij} рядом с соответствующей ориентированной дугой, выраженная в денежных единицах).

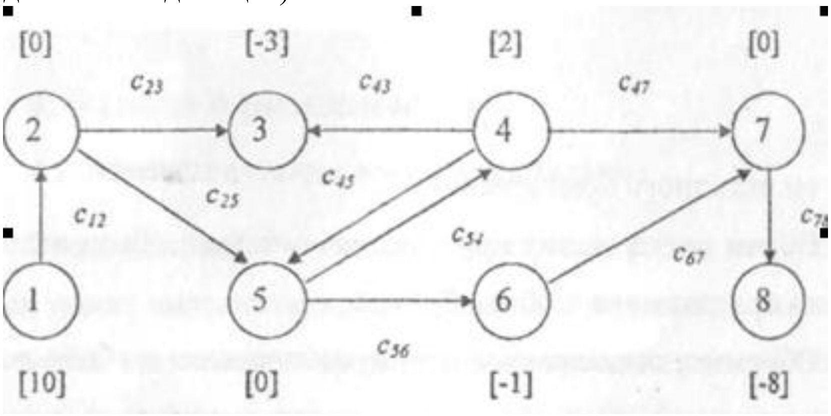


Рисунок 2.1-1

На рис. 2.1-1 видно, что суммарный избыток товара, имеющийся на складах системы с номерами 1 и 4, равен суммарному недостатку товара, имеющемуся на складах с номерами 3, 6 и 8 той же системы. Перераспределение товара может происходить через склады с номерами 2, 4-7, которые в рассматриваемой задаче и являются промежуточными или транзитными пунктами. Истинным пунктом отправления является лишь склад с номером 1, на котором имеется избыток товара и с которого товар можно только вывозить, а истинными пунктами назначения являются склады с номерами 3 и 8, на которых есть недостаток товара, и на эти склады товары можно только завозить. Заметим также, что между складами с номерами 4 и 5 возможны перевозки в обоих направлениях, но в общем случае $c_{45} \neq c_{54}$ (например, наличие одностороннего движения по кратчайшему маршруту).
Объемы спроса и предложения, соответствующие этим пунктам отправления и назначения, вычисляются следующим образом.
Объем предложения истинного пункта отправления = объем исходного предложения.
Объем предложения транзитного пункта = объем исходного предложения + объем буфера.
Объем спроса истинного пункта назначения = объем исходного спроса.
Объем спроса транзитного пункта = объем буфера.
Объем буфера должен быть таким, чтобы вместить объем всего предложения (или спроса).
Пусть J —множество номеров складов, на которые товар может быть доставлен с k-то склада, а I — множество номеров складов, с которых товар может быть доставлен на k-й склад. T_k — величина чистого запаса товара, равная объему исходного предложения или исходного спроса. Тогда математическую модель данной задачи можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in I}^{m} \sum\limits_{j \in J}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \\ \sum\limits_{j \in J}^{n} x_{ij} = S_i \\ \sum\limits_{i \in I}^{m} x_{ij} = D_j \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \in N \cup \{0\} \\ \sum\limits_{j \in J}^{n} x_{kj} + x_{kk} = T_k + B \\ \sum\limits_{i \in I}^{n} x_{ik} + x_{kk} = B. \end{cases}$$

2.11 Задача о назначениях

Предположим, что имеется n различных работ, каждую которых может выполнить любой из n привлеченных исполнителей. Стоимость выполнения *i*-й работы j-ым исполнителем известна и равна c_{ij} (в условных денежных единицах). Необходимо распределить исполнителей по работам (назначить одного исполнителя на каждую работу) так, чтобы минимизировать суммарные затраты, связанные с выполнением всего комплекса работ.

В исследовании операций задача, сформулированная выше известна как задача о назначениях. Введем переменные x_{ij}, принимающие значение 1 в случае, когда *i*-ю работу выполняет *i*-й исполнитель и значение 0 во всех остальных случаях, ij = 1, n. Тогда ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\_ i = 1,...n,$$

гарантирует выполнение каждой работы лишь одним исполнителем, ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\_ j = 1,...n,$$

гарантирует, что каждый из исполнителей будет выполнять лишь одну работу. Стоимость выполнения всего комплекса работ равна

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Таким образом, задачу о назначениях можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij},\_ i = 1,...,n; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij},\_ j = 1,...,n; \\ x_{ij} \in \{0\},\_ i = 1,...,n,\_ j = 1,...,n. \end{cases}$$

Задача о назначениях является частным случаем *классической транспортной задачи*, в которой надо положить n=m, $S_i = 1$, i = 1,...,n, $D_j = 1$, j = 1,...,n. При этом условие , i,j = 1,...,n, означает выполнение *требования целочисленности* переменных x_{ij}. Это связано с тем, что мощности всех источников и стоков равны единице, откуда следует, что в допустимом целочисленном решении значениями переменных могут быть только 0 и 1.

Как частный случай классической транспортной задачи, задачу о назначениях можно рассматривать как задачу линейного программирования. Поэтому в данном случае используют терминологию и теоретические результаты линейного программирования.

В задаче о назначениях переменное x_{ij}, может принимать значение 0 или 1. При этом в любом допустимом решении лишь и переменных могут принимать значения 1. Таким образом, любое допустимое базисное решение задачи о назначениях будет вырожденным.

На практике встречаются задачи о назначениях, в постановках которых параметр c_{ij} для i.j = 1,...,n понимается как эффективность выполнения i-й работы j-м исполнителем. В этих случаях нужно так распределить работы между исполнителями, чтобы суммарная

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max$$

эффективность их выполнения был бы максимальной, т.е.

где максимум ищется при указанных выше ограничениях.

Раздел 3. Постановка и методы решения задач нелинейного программирования
(Лекция-дискуссия)

3.1 Структура нелинейной оптимизационной модели. Причины нелинейности. Основные теоремы нелинейного программирования

Задачами нелинейного программирования (ЗНЛП) являются такие, которые содержат нелинейную целевую функцию и (или) нелинейные ограничения. В реальных экономических задачах это соответствует тому, что результаты или эффективность изменяются

непропорционально изменению масштаба используемых ресурсов по различным причинам, например:
-деления издержек по производству и реализации продукции на переменные и условно-постоянные;
-насыщения спроса на товары;
-влияния внешних факторов.

Виды задач нелинейного программирования

Задачи, в которых и (или) ограничение бесконечно-конечны
Задачи, в которых целевая функция содержит и(или) ограничения содержат случайные величины - стохастические
Выпуклое программирование, в котором целевые функции являются выпуклыми если максимизируются
Выпуклость функции - сто свойства дуга кривой линии лежит не выше своей хорды
Задачи квадратичного (сепарабельного) программирования - целевая функции представляет собой сумму нескольких линейных функций.

В общем виде задача нелинейного программирования (ЗНП) формулируется следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min) \quad (4.1.1)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, i = \overline{1, m_1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, i = \overline{m+1, m_2}; \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, i = \overline{m+2, m} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

где
x_j – управляющие переменные или решения ЗНП, $j = \overline{1, n}$;
b_j – фиксированные параметры, $i = \overline{1, m}$;
f, g_i, $i = \overline{1, n}$ – заданные функции от n переменных.
Если f и g_i линейны, то (4.1.1), (4.1.2) переходит в задачу линейного программирования.
Решить задачу нелинейного программирования – это значит найти такие значения управляющих переменных x_j, $j = \overline{1, n}$, которые удовлетворяют системе ограничений (4.1.2) и доставляют максимум или минимум функции f.
Для задачи нелинейного программирования, в отличие от линейных задач, нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции (4.1.1) и ограничений (4.1.2) разработано несколько специальных методов решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, ряд приближенных методов решения, графический метод.
Теорема Куна-Таккера для задачи нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств
Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$\min\limits_{\mathbf{X}\in D} \Phi(\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}^*) = \Phi^*,$	(1)

где $\Phi(\mathbf{X})$ – произвольная функция, $D = \{\mathbf{X} | g(\mathbf{X}) \ge 0\} = \{\mathbf{X} | g_i(\mathbf{X}) \ge 0, i \in [1, m]\} \subset R^n$ - не пустое, ограниченное замкнутое множество.
Нам понадобятся далее понятия множителей Лагранжа и функции Лагранжа для задачи нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств. Функция Лагранжа для задачи (1) с ограничениями (2) определяется формулой

$L(\mathbf{X}, \lambda) = \Phi(\mathbf{X}) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}) + \lambda^T g(\mathbf{X}),$	(2)

где $\lambda=(\lambda_i, i\in[1,m])$ - $(m*1)$-вектор множителей Лагранжа.

Нам понадобятся также понятия активных и неактивных ограничений. В точке локального минимума задачи (1), (2) каждое из ограничений $g_i(\mathbf{X}^*)\geq 0, i\in[1,m]$ выполняется либо в виде равенства $g_i(\mathbf{X}^*)=0$, либо в виде неравенства $g_i(\mathbf{X}^*)>0$. Ограничения первого вида называются *активными ограничениями*. Остальные ограничения называются *неактивными ограничениями*.

Кроме того, нам понадобится также понятие условия регулярности для задачи нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств. Если точка $\mathbf{X}^*\in D$ и ограничения $g_{i_j}(\mathbf{X}^*)\geq 0, i_j\in[1,s], s\leq m$ активны, то условие линейной независимости векторов называется условием регулярности ограничивающих функций $\nabla g_{i_j}(\mathbf{X}^*)\geq 0, i_j\in[1,s]$ в точке $\mathbf{X}^*$. Это условие означает, что, например, при n =2 количество ограничивающих функций, проходящих через точку $\mathbf{X}^*$, не должно превышать 2 и в точке $\mathbf{X}^*$ векторы $\nabla g_1(\mathbf{X})$, $\nabla g_2(\mathbf{X})$ не должны быть коллениарны Например, на рис. 1 в ситуации (а) количество ограничивающих функций, проходящих через точку $\mathbf{X}^*$, превышает размерность вектора варьируемых параметров, в ситуации (б) в точке $\mathbf{X}^*$ градиенты $\nabla g_1(\mathbf{X})$, $\nabla g_2(\mathbf{X})$ ограничивающих функций коллениарны.

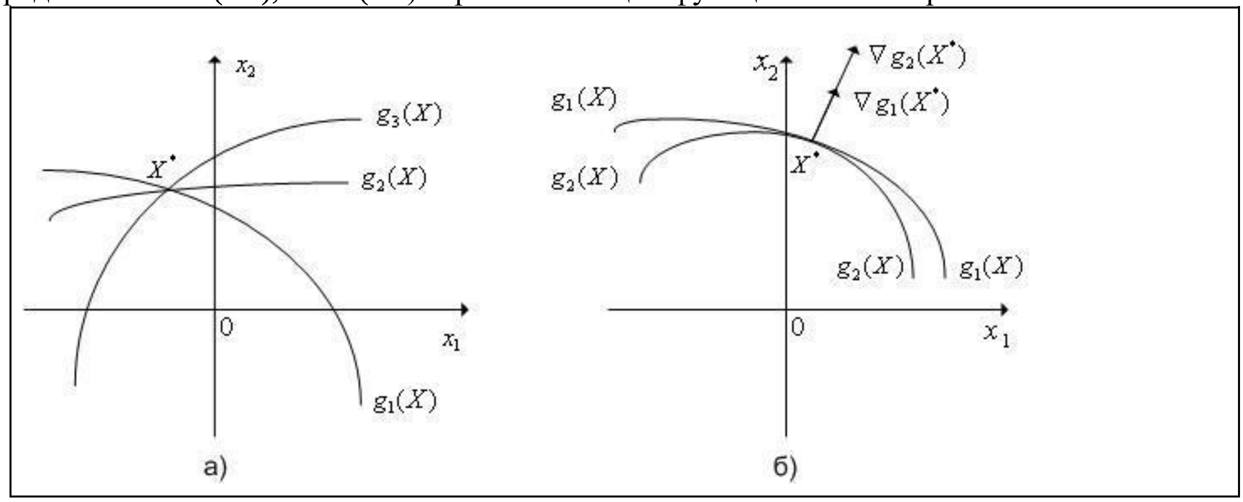


Рис. 1. Ситуации, в которых не выполняется условие регулярности двумерной задачи.

Исключительно большое значение в теории и практике решения задач нелинейного программирования имеет следующая теорема (*теорема Куна-Таккера для задачи условной оптимизации с ограничениями типа неравенств*).

Теорема 1 (Куна-Таккера). Пусть функция $\Phi(\mathbf{X})$ и функции $g_i(\mathbf{X})\geq 0, i\in[1,m]$ имеют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $\mathbf{X}^*$ и пусть эта точка является точкой локального минимума функции $\Phi(\mathbf{X})$ при ограничениях $g_i(\mathbf{X}^*)\geq 0$, удовлетворяющих в точке $\mathbf{X}^*$ условию регулярности ограничивающих функций. Тогда существуют такие неотрицательные множители Лагранжа $\lambda_i, i\in[1,m]$, что для функции Лагранжа $L(\mathbf{X},\lambda)$ точка $\mathbf{X}^*$ является стационарной точкой функции, т.е.

$\nabla_X L(\mathbf{X}^*,\lambda)=\nabla\Phi(\mathbf{X}^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla g_i(\mathbf{X}^*)=0 \bullet$	(3)

Заметим, что в отличие от правила множителей Лагранжа, теорема 1 требует знакоопределенности множителей Лагранжа $\lambda_i, i\in[1,m]$. Отметим также, что теорема не запрещает того, чтобы все множители Лагранжа $\lambda_i, i\in[1,m]$ были равны нулю.

Поясним смысл теоремы на примере.

Пример 1

Рассмотрим двумерную (n=2) задачу нелинейного программирования (1), (2), в которой область допустимых значений D задается тремя ограничивающими функциями, т.е. $D=\{\mathbf{X}|g(\mathbf{X})\geq 0\}=\{\mathbf{X}|g_i(\mathbf{X})\geq 0, i\in[1,3]\}\subset R^2$. Положим, что множество D имеет вид, представленный на рис. 2.

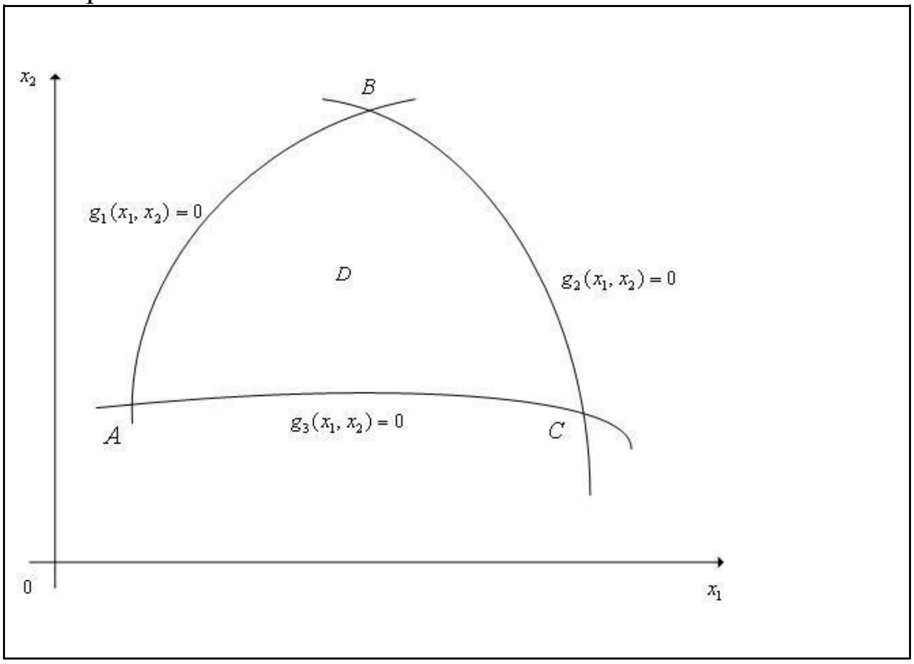


Рис. 2. К прим. 1.

Для всех граничных точек области D, очевидно, выполняются условия регулярности ограничивающих функций.

Если точка $\mathbf{X}^*$ находится внутри множества D (т.е. является стационарной точкой функции $\Phi(\mathbf{X})$), то теорема будет справедлива, если положить все множители Лагранжа $\lambda_i, i\in[1,m]$ равными нулю.

Пусть теперь точка $\mathbf{X}^*$ находится на одной из дуг, например, на дуге AB, т.е. пусть ограничение $g_1(\mathbf{X})\geq 0$ является активным ограничением, а остальные ограничения – неактивными ограничениями. Тогда в этой точке $g_1(\mathbf{X}^*)=0$ и справедливость теоремы вытекает из правила множителей Лагранжа для задачи с ограничениями типа равенств, если положить $\lambda_2=\lambda_3=0$.

Пусть, наконец, точка $\mathbf{X}^*$ находится в одной из угловых точек множества D, например, в точке B, т.е. пусть ограничения $g_1(\mathbf{X})\geq 0$, $g_2(\mathbf{X})\geq 0$ являются активными ограничениями, а ограничение $g_3(\mathbf{X})\geq 0$ - неактивным ограничением. Тогда можно положить $\lambda_3=0$ и справедливость теоремы вытекает из правила множителей Лагранжа для задачи с ограничениями типа равенств ●

Теорема 1 означает, что в ее условиях вместо задачи условной оптимизации (1), (2) можно решать задачу безусловной оптимизации $\min\limits_{\mathbf{X}\in R^n}\left(\Phi(\mathbf{X})+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{X})\right)$.

Необходимым условием существования локального минимума этой задачи в некоторой точке $\mathbf{X}^*\in R^n$ является условие $\nabla_X\left(\Phi(\mathbf{X}^*)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{X}^*)\right)=0$. (см. Теорему 2.1).

Широко известна другая форма теоремы 1, которую мы сформулируем в виде следствия этой теоремы.

Следствие. В условиях теоремы 1 существуют такие неотрицательные множители Лагранжа $\lambda_i, i \in [1,m]$, что имеют место следующие равенства:

$\nabla_X L(\mathbf{X}^*,\lambda)=0;$	(4)
$\nabla_X L(\mathbf{X}^*,\lambda)=g(\mathbf{X}^*)\geq 0\bullet$	(5)

Здесь равенство (5) повторяет равенство (4), а справедливость равенства (6) следует из того факта, что по условиям теоремы точка $\mathbf{X}^*$ удовлетворяет всем ограничениям, т.е. $g_i(\mathbf{X}^*)\geq 0, i\in[1,m]$/

Заметим, что из (6) следует справедливость еще одного полезного равенства $\lambda^T \nabla_\lambda L(\mathbf{X}^*,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{X}^*)=\lambda^T g(\mathbf{X}^*)\geq 0.$

3.2 Основные методы решения нелинейных оптимизационных задач (Лекция-дискуссия)

Нелинейное программирование. Оно объединяет методы решения задач, которые описываются нелинейными соотношениями. Постановка и решение задач нелинейного программирования принципиально не отличаются от постановки и решения задач линейного программирования. К задачам нелинейного программирования относятся задачи оптимизации производства для большинства предприятий, поскольку в настоящее время они действуют на неоднородном рынке в условиях монополистической конкуренции и спрос на их продукцию зависит от цены.

Широко распространенный метод решения нелинейных задач состоит в применении так называемых *кусочно-линейных приближений*. Что это такое? Вы можете определить окружность с любой степенью точности, вписывая в нее многоугольник. Точно так же можно любые кривые приближенно определять, соединяя прямыми отдельные точки этих кривых. ФУНКЦИЯ, изображенная кривой, становится, как говорят, кусочно-линейной, т. е. ломаной, состоящей из прямых кусков (отрезков). Нелинейные задачи, преобразованные таким образом в линейные, решаются хорошо отработанными методами решения задач линейного программирования.

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом вариации произвольной постоянной.

Вернемся к поставленной задаче:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$u = \int M(x,y)dx + C(y).$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y).$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$[C'(y)]'_x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

$$C(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C$$

Из этого уравнения определим переменную функцию С1(х):

$$u = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) dx \right] dy + C.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) dx \right] dy = C.$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$(3x^2 + 10xy) dx + (5x^2 - 1) dy = 0.$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.
При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

3.3 Постановка и решение задач стохастического программирования

При перспективном и оперативном планировании работы предприятия возникает необходимость в учете ряда случайных факторов, существенно влияющих на процесс производства. К таким факторам относятся спрос, который не всегда может быть предсказуем, непредусмотренные сбои в поступлении сырья, энергии, рабочей силы, неисправности и аварии оборудования. Еще больше случайных факторов необходимо учитывать при планировании производства, эффективность которого зависит от климатических условий, урожайности и т.д. Поэтому, например, задачи планирования лесного производства целесообразно ставить и исследовать в терминах и понятиях стохастического программирования, когда элементы задачи линейного программирования (матрица коэффициентов А, вектора ресурсов b, вектора оценок c) часто оказываются случайными. Подобного типа задачи ЛП принято классифицировать как задачи стохастического программирования (СП).
Подходы к постановке и анализу стохастических задач существенно различаются в зависимости от последовательности получения информации - в один прием или по частям. При построении стохастической модели важно также знать, необходимо ли принять единственное решение, не подлежащее корректировке, или можно по мере накопления информации один или несколько раз корректировать решение. В соответствии с этим в стохастическом программировании исследуются одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные задачи.
В *одноэтапных* задачах решение принимается один раз и не корректируется. Они различаются по показателям качества решения (по целевым функциям), по характеру ограничений и по виду решения.
Задача СП может быть сформулирована в М- и Р- постановках по отношению к записи целевой функции и ограничений.
Случайны элементы вектора с (целевая функция).
При М-постановке целевая функция W записывается в виде

$$W = M(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j) \rightarrow \min(\max) \quad (6)$$

что означает оптимизацию математического ожидания целевой функции. От математического ожидания целевой функции можно перейти к математическому ожиданию случайной величины c_j

$$W = M(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j) = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \rightarrow \min(\max) \quad (7)$$

При Р- постановке имеем:

- при максимизации

$$W = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq W_{min}\right) \to max, \qquad (8)$$

где W_{min} - предварительно заданное допустимое наихудшее (минимальное) значение целевой функции.

- при минимизации

$$W = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq W_{max}\right) \to max, \qquad (9)$$

где W_{max} - предварительно заданное допустимое наихудшее (максимальное) значение целевой функции.

Суть Р-постановки заключается в том, что необходимо найти такие значения x_j, при которых максимизируется вероятность того, что целевая функция будет не хуже предельно допустимого значения.

Ограничения задачи, которые должны выполняться при всех реализациях параметров условий задачи, называются *жесткими* ограничениями. Часто возникают ситуации, в которых постановка задачи позволяет заменить жесткие ограничения их усреднением по распределению случайных параметров. Такие ограничения называют *статистическими*:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \leq \bar{b}_i . \qquad (10)$$

В тех случаях, когда по содержательным соображениям можно допустить, чтобы невязки в условиях не превышали заданных с вероятностями, небольшими а $_i$>0, говорят о стохастических задачах с *вероятностными* ограничениями:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \leq \bar{b}_i\right\} \geq \alpha_i , \qquad (11)$$

т.е. вероятность выполнения каждого заданного ограничения должна быть не менее назначенной величины а $_i$. Параметры а $_i$ предполагаются заданными или являются решениями задачи более высокого уровня.

Представленные задачи как в М-, так и в Р- постановках непосредственно решены быть не могут. Возможным методом решения этих задач является переход к их детерминированным эквивалентам. В основе этого перехода лежит использование закона распределения случайной величины. В инженерной практике наиболее часто используется нормальный закон распределения, поэтому дальнейшие зависимости приведем для этого случая.

Принимаем, что a_{ij}, b_i, c_j подчинены нормальному закону распределения. В этом случае будет справедлива следующие детерминированные постановки:

- Р - постановка целевой функции, максимизация:

$$W = \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - W_{min}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}} \to max, \qquad (12)$$

где $\bar{c}_j$ и s $_j$ - математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины c_j.

- Р - постановка целевой функции, минимизация:

$$W = \frac{W_{max} - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}} \to max. \quad (13)$$

- *Вероятностные* ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \le \bar{b}_i - t_{\alpha} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}, \quad (14)$$

где $\bar{a}_{ij}, \sigma_{ij}^2, \bar{b}_i, \theta_i^2$ - соответственно, математические ожидания и дисперсии случайных величин a_{ij} и b_i; t_{α} - значение центрированной нормированной случайной величины в нормальном законе распределения, соответствующей заданному уровню вероятности соблюдения ограничений a_i.

Несколько замечаний к приведенным зависимостям:

- задача стохастического программирования сведена к задаче нелинейной оптимизации и может быть решена одним из рассматриваемых ранее методов;
- сравнение ограничения ресурса в стохастическом программировании и аналогичным ограничением в задаче линейного программирования показывает, что учет случайного характера величин a_{ij} и b_i приводит к уменьшению располагаемого ресурса на величину

$$t_{\alpha} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}, \quad (15)$$

т.е. к необходимости в дополнительном ресурсе. Однако этот дополнительный ресурс может оказаться неиспользованным, но для гарантированного выполнения плана его иметь необходимо.

Приведенные формулы (4) и (5) могут быть использованы для систем независимых случайных величин. Однако для технических систем, как правило, случайные параметры являются зависимыми. Причем эта зависимость не функциональная, а корреляционная. Поэтому для анализа случайных факторов, заданных распределением, широкое применение нашли теория марковских процессов и метод статистического моделирования (метод Монте-Карло).

В задачах принятия оптимальных решений широкое применение получил метод Монте-Карло. Основными особенностями этого метода, основанного на многократном повторении одного и того же алгоритма для каждой случайной реализации, являются: универсальность (метод не накладывает практически никаких ограничений на исследуемые параметры, на вид законов распределения); простота расчетного алгоритма; необходимость большого числа реализаций для достижения хорошей точности; возможность реализации на его основе процедуры поиска оптимальных параметров проектирования. Отметим основные факторы, определившие применение метода статистического моделирования в задачах исследования качества при проектировании: метод применим для задач, формализация которых другими методами затруднена или даже невозможна; возможно применение этого метода для машинного эксперимента над не созданной в натуре системы, когда натурный эксперимент затруднен, требует больших затрат времени и средств или вообще не допустим по другим соображениям.

3.4 Примеры задач стохастического программирования

В моделях математического программирования некоторые или все параметры, показатели качества и ограничения могут оказаться неопределенными или случайными.
Стохастическое программирование (СП) – раздел математики, занимающийся условными экстремальными задачами, в которых параметры условий или составляющие решений являются случайными.
Случаи, когда опыт, статистика или исследование процесса позволяют устанавливать вероятностные характеристики задач, называются *ситуациями, связанными с риском.*
Случаи, когда неизвестны статистические особенности процесса, называются *неопределенными ситуациями*.
Стохастическое программирование используется для решения задач двух типов.
1. В задачах первого типа прогнозируются статистические характеристики множества одинаковых экстремальных систем. Это задачи *пассивного* СП.
2. В задачах второго типа строятся алгоритмы планирования и управления в условиях неполной информации. Это задачи *активного* СП.
В зависимости от постановки задачи стохастического программирования её решения или планы могут вычисляться в двух видах:
1) в *чистых стратегиях*, когда результатом будет вектор оптимального плана или решения задачи. Решения в чистых стратегиях называются *решающими правилами;*
2) в *смешанных стратегиях*, когда определяется вероятностное распределение компонент оптимального плана или решения, которые в этом случае называются *решающими распределениями.*

При построении моделей управления в условиях неполной информации существует два подхода к использованию информации:
- в первом случае *решение предшествует наблюдению*, тогда решающие правила и решающие распределения зависят только от детерминированных параметров и статистических характеристик случайных параметров условий задачи, т. е. являются *априорной информацией*,
- во втором случае *наблюдения предшествуют решению*, тогда решающие правила и решающие распределения определяются *апостериорной информацией,* появляющейся в результате наблюдения за конкретной реализацией параметров условий задачи.

Решающие распределения представляют собой функции, таблицы или инструкции, устанавливающие зависимость решения от некоторой априорной или апостериорной информации.
Задача планирования добычи угля в априорных решающих правилах
В угольной промышленности технико-экономические показатели сильно зависят от природных факторов, которые не всегда могут быть предсказаны заранее. Это:
- мощность и угол падения пластов,
- обводнённость участков,
- склонность к выбрасыванию газов,
- физико-механические свойства угля и пород,
- надежность оборудования, эксплуатационные расходы.

Природные условия сказываются на надежности оборудования, эксплуатационных расходах и т. д. и, в конечном счете, на области определения допустимых решений. Поэтому выбор оптимального проекта плана (решения) – это задача стохастического программирования.
Для простоты допускается:
- показатель плана определяется средним значением суммарных затрат,
- область определения плана задается спросом на добываемый уголь (требуемый объем добычи) и фондом заработной платы.

Задача планирования угледобычи следующая.
Для i шахты заранее разрабатывается несколько вариантов развития. Требуется установить наиболее рациональный, с точки зрения объединения шахт, вариант развития каждой шахты.

Пусть $x_{ij} = 1$, если для i -й шахты принят j-й вариант, иначе $x_{ij} = 0$. По каждой шахте реализуется только один вариант, т. е. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,m}$.

$c_{ij}(w)$ - годовые затраты на добычу угля в i-й шахте по j-му варианту при реализации w случайных параметров, зависящих от природных факторов.

$d_{ij}(w)$ - годовой объем добычи угля в i-й шахте по j-му варианту при реализации w случайных природных факторов.

$k_{ij}(w)$ - годовой фонд зарплаты i -й шахты по j-му варианту развития при реализации w случайных природных факторов.

d — требуемая в соответствии с планом более высокого уровня годовая добыча угля по объединению в целом.

k - общий фонд зарплаты по объединению.

α_d , α_k - заданные вышестоящей организацией вероятности соблюдения ограничений по обеспечению спроса и по фонду зарплаты соответственно. В этом случае целевая функция соответствует М-модели

$$M\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(w)x_{ij}\right\} \to \min . \qquad (10.5)$$

Ограничения имеют характер построчных вероятностных ограничений по соблюдению спроса и фонда заработной платы

$$P\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(w)x_{ij} \ge d\right\} \ge \alpha_d , \qquad (10.6)$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(w)x_{ij} \le k\right\} \ge \alpha_k . \qquad (10.7)$$

В целом это типичная модель задачи стохастического программирования.

Раздел 4 Постановка и методы решения задач дискретного программирования

4.1 Структура дискретной оптимизационной модели. Постановка задачи дискретного программирования

От целочисленных задач принято отличать так называемые **дискретные задачи** математического программирования, в которых областью допустимого изменения каждой переменной является не множество целых неотрицательных чисел, а некоторое заданное конечное множество. Такие задачи (на конечных множествах) могут быть формально сведены к целочисленным.

Исследования в этом направлении, начатые еще в шестидесятые годы прошлого столетия, к настоящему времени продвинулись настолько далеко, что сейчас мы уже вправе говорить о самостоятельном разделе математического программирования – **дискретном программировании**. В литературе употребляется также термин ***" целочисленное программирование " и реже – " комбинаторное программирование "***. Однако нам представляется, что термин " дискретное программирование " наиболее полно отражает специфику вопроса, хотя при его использовании и возникает некоторая опасность смешения дискретного программирования и, скажем, дискретного анализа.

Постановка задачи линейного программирования

Линейное программирование является составной частью более общего метода — математического программирования. Математическое программирование позволяет находить наилучшие планы распределения ограниченных ресурсов для достижения требуемой цели – решения задачи. Линейное программирование может быть использовано как один из методов оптимизации решения. Наилучший результат здесь достигается не за счет выделения дополнительных сил и средств или иных ресурсов, а за счет их рационального распределения.

Решение, наилучшим образом соответствующее целевой установке и удовлетворяющее условиям задачи, называется оптимальным планом .

Линейное программирование от других видов математического программирования отличается тем, что математическая модель, соответствующая целевой установке задачи, может быть записана с помощью линейных соотношений вида:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n = c_0 \qquad (6.1)$$

где c_j — j - e — известные коэффициенты;

x_j - j - e — неизвестные переменные $(j = 1, 2, ..., n)$.

В общем виде постановка задачи линейного программирования выглядит следующим образом.

Условия задачи задаются в виде системы линейных уравнений или неравенств, которые представляют ограничения, налагаемые на использование имеющихся ресурсов:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (6.2)$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i;$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m;$$

где

$$j = 1, 2, ...n; i = 1, 2, ..., m; m < n$$
$$x_j \geq 0 (j = 1, 2, ...n)$$

.

Искомые величины $(x_1, x_2, ..., x_n)$ не могут быть отрицательными; a_{ij}, b_i — известные постоянные величины, характеризующие условия задачи.

Целевая функция задается в виде такой линейной формы:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n \qquad (6.3)$$

где c_j — постоянные коэффициенты, которые обычно называют коэффициентами стоимости $(j = 1, 2, ..., n)$.

Целевую функцию по условиям задачи требуется обратить в минимум или максимум. В некоторых задачах выражения (6.2.) задаются в виде неравенств. В этих случаях, вводя в каждое линейное ограничение дополнительные неотрицательные неизвестные $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$,

можно привести систему линейных ограничений к виду (6.2.).

Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования рассмотрим на примере.

Пример

Четыре вида овощей $(m = 4)$ необходимо распределить по шести транспортным средствам $(n = 6)$.

Распределение овощей по транспортным средствам сопряжено с необходимостью учета ряда ограничений, которые могут быть описаны системой четырех уравнений с шестью неизвестными, аналогичными системе 6.2.

$$\left.\begin{array}{r}4x_1 + x_4 = 16; \\ 2x_2 + x_5 = 10; \\ x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 76; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_6 = 24; \\ x_j \geq 0 (j = 1, ..., 4)\end{array}\right\} \qquad (6.4)$$

Смысл первого уравнения в нашем примере означает, что овощ типа 1, общий ресурс которого составляет 16 единиц, может размещаться в количестве четырех единиц на транспортном средстве первого типа и одной единицы на транспортном средстве четвертого типа. Аналогично и второе уравнение и так далее.

Последнее условие говорит о том, что число типов транспортного средства не может быть отрицательным.

Необходимо определить, какое количество транспортного средства каждого типа следует иметь, чтобы общие потери в них были минимальными.

Оплата за конкретное транспортное средство (в тысячах рублей) задана следующей таблицей.

Тип единицы транспорта, j	1	2	3	4	5	6
Стоимость перевозки на транспорте данного типа, c_j	0,4	0,5	0,2	0,8	0,6	0,3

В соответствии с приведенными данными, целевая функция, подлежащая оптимизации, примет вид:

$$y = 0,4x_1 + 0,5x_2 + 0,2x_3 + 0,8x_4 + 0,6x_5 + 0,3x_6 \qquad (6.5)$$

.

Решение задачи сводится к выполнению ограничений, заданных уравнением (6.4.)

В этом примере, когда $n - m = 2$, каждое из ограничительных линейных уравнений (6.4.), а также линейная функция (6.5.), могут быть представлены геометрически в двухмерном пространстве (на плоскости), что дает возможность весьма наглядно интерпретировать основные идеи метода линейного программирования.

4.2 Примеры задач дискретного программирования

В качестве примера прикладных задач дискретного программирования можно рассмотреть следующие задачи.

- Задачи планирования перевозок.
- Задачи размещения и специализации.
- Задачи логического проектирования.
- Задачи теории расписаний.
- Другие прикладные задачи.

Простейшей и наиболее популярной задачей планирования перевозок является транспортная задача

Широкий класс дискретных моделей возникает при формулировке задач о перевозках, связанных с использованием неделимых транспортных единиц. К изучению некоторых моделей такого рода сейчас мы и переходим.

Рассмотрим ***распределительную задачу.*** Эта математическая модель широко освещалась в литературе под самыми различными названиями (обобщенная транспортная задача, задача о взвешенном распределении, λ - задача о расстановке флота и др.). Опишем ее в следующей интерпретации.

Обобщенная транспортная задача, задача о взвешенном распределении, λ -задача, задача о расстановке флота и др.

Пусть имеется n транспортных линий (скажем, пассажирских); по j -й линии нужно выполнить b_j рейсов $(j = 1, 2, ..., n)$. В наличии имеются транспортные единицы m типов. Резервы полезного времени транспортной единицы типа i составляют

$a_i (i = 1, 2, ..., m)$. На выполнение транспортной единицей типа i рейса j требуется время t_{ij}, а затраты на рейс составляют c_{ij}. Требуется указать наиболее экономную расстановку транспортных единиц по линиям.
Обозначая через x_{ij} количество рейсов, которое транспортная единица i должна выполнить по линии j, приходим к следующей задаче. Требуется минимизировать

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad (7.1)$$

при условиях

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \quad (7.2)$$

- целые, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..n$,

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, ..., m \quad (7.3)$$

,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, ...n \quad (7.4)$$

.
Здесь условия (7.3.) выражают ограничения по фондам времени каждой транспортной единицы, а условия (7.4.) говорят о том, что все рейсы должны быть выполнены.
К совершенно аналогичной модели приводит близкая к описанной задача о выборе средства доставки груза.
Задача о выборе средства доставки груза.
Пусть через $i = 1, 2, ..., m$ обозначены грузообразующие пункты с объемами груза в них a_i. Имеется средств доставки груза (видов транспорта); грузоподъемность j - го средства доставки составляет p_j, а наличный его парк равен $N_j, j = 1, 2, ...n$. Грузы подлежат доставке в один центральный пункт (склад); затраты при осуществлении одной единицей средства доставки j рейса от пункта i до склада равны c_{ij}. Требуется составить наиболее экономный план доставки.
Через x_{ij} обозначим количество средств доставки типа j, отправляющееся из пункта i.
Тогда задача сведется к минимизации целевой функции вида (7.1.) при условиях (7.2.) и

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \geq a_i, i = 1, 2, ..., m \quad (7.5)$$

,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = N_j, j = 1, 2, ...n \quad (7.6)$$

4.3 Алгоритмы и методы решения задач дискретного программирования

Дискретное программирование используется для решения задач с детерминированной целевой функцией при ограничениях на значения переменных.
Примерами таких задач являются: определение очередности выполнения работ, назначение ресурсов по объектам использования, выбор маршрута на сети "задача о коммивояжере".

Основной особенностью является то, что все или некоторые переменные должны принимать только целочисленные (дискретные) значения. Обычно это бывает при описании неделимых объектов (людей, машин и т.п.) или при наложении жестких ограничений типа равенств.

При решении задач возникают сложности с выбором специальных дополнительных ограничений для отсечения области решений с нецелочисленными переменными, которые часто приходится выбирать по эвристическим правилам.

Различают два класса методов решения задач дискретного программирования: методы отсечения и комбинаторные методы.

Методы отсечений используются при решении линейных целочисленных задач без булевых переменных. Их идея заключается в ослаблении ограничений (за счет отказа от требований целочисленности) и решении обычной задачи линейного программирования. Затем, если полученное оптимальное решение не удовлетворяет требованию целочисленности, вводят специальные дополнительные требования, тем самым отсекая некоторую область возможных решений, и вновь решают задачу линейного программирования с проверкой результатов на целочисленность переменных.
Процесс повторяется до выполнения требований по целочисленности. Для решения целочисленных задач используется алгоритм Гомори и алгоритм Дальтона и Ллевелина.
Комбинаторные методы используются для решения нелинейных задач с булевыми переменными. Для таких задач используется так называемый аддитивный алгоритм, вычислительные операции в котором осуществляют вычитанием. Идея аддитивного алгоритма заключается в переборе 2N возможных решений (где N — число булевых переменных) и выбор лучшего из них.

Раздел 5. Постановка и методы решения задач динамического программирования (Лекция-дискуссия)

5.1 Структура динамической оптимизационной модели. Постановка задачи динамического программирования

Многошаговый или многоэтапный класс задач. Обеспечивает получение нескольких последовательных оптимальных решений для каждого этапа, таким образом, чтобы обеспечить оптимальное развитие в целом.
- экономические процессы зависят от времени
- являются управляемыми
-решения сводятся с распределением и перераспределением ресурсов
-началом шага является момент принятия решения (обычно год).
Планируется деятельность нескольких предприятий за определенный период времени, состоящий из нескольких этапов.
Известно начальное состояние системы, характиризуемое количество средств, уже вложенных в развитие предприятия и конечное состояние. Как распределить основные средства чтобы к концу периода E доход был max.
$P_1, P_2, P_n -$ предприятия
T – период времени
t_i -количество этапов
D – сумма выделенных средств
S_0 – начальное состояние
$S_к$ – конечное состояние
W – суммарный доход
x_{ij} - размер средств
Совокупность управлений выразится системой векторов n-мерного пространства.
$$\begin{cases} U_1 = (x_{11}; x_{12} \dots x_{1n}) \\ U_2 = (x_{21}; x_{22} \dots x_{2n}) \end{cases}$$
Суммарный доход за все годы зависит от данной системы.
Необходимо выбрать такое управление чтобы W$\rightarrow max$.
Недостатки метода
- при большом количестве этапов решение громоздкое
-в качестве решения будут найдены точки внутри области
-не применим, если неизвестные дискретные числа

Динамическое программирование позволяет не только упростить, но и решать задачи к которым нельзя применить методы анализа.
Упрощение за счет уменьшения количества вариантов т.к. предполагается многократное решение.
Минус – не существует универсальных методов.
Методика решения зависит от специфики.
Трудоемкость решения.
Общая постановка.
Некоторая управляемая физическая система находится в первоначальном состоянии S в течении времени ее состояние меняется $S_0 \ni S_0$ количество состояний U. в конце $S_к \ni S'_к$ с процессом изменения связан численный критерий W. U – множество возможных управлений.
Из множества U найти такое U', которое переведет систему из начального состояния в конечное таким образом, что W(U) принимает оптимальное значение.

5.2 Примеры задач динамического программирования

Метод динамического программирования рассматривает многостадийные процессы принятия решения. При постановке задачи динамического программирования формируется некоторый критерий. Процесс разбивается на стадии (шаги), в которых принимаются решения, приводящие к достижению общей поставленной цели. Таким образом, метод динамического программирования — это метод пошаговой оптимизации.
Введем функцию f_r определяющую минимальную длину пути из начальной вершины в вершину /. Обозначим через *S*- длину пути между вершинами *inj,afj*— наименьшую длину пути между вершиной *j* и начальной вершиной. Выбирая в качестве *i* такую вершину, которая минимизирует сумму *(S- + fj),* получаем уравнение

$$f_i = \min_{i \neq j} \{S_{ij} + f_j\} \text{ либо } f_i = \min_{i \neq j} \{S_{ji} + f_j\}.$$

Трудность решения этого уравнения состоит в том, что неизвестная функция входит в обе части равенства. В такой ситуации приходится прибегать к классическому методу последовательных приближений (итераций), используя рекуррентную формулу

$$f_i^{(k+1)} = \min_{i \neq j} \{S_{ij} + f_j^{(k)}\},$$

гд*tfj*$^{k)}$ — *k-e* приближение функции.
Возможен другой подход к решению поставленной задачи с помощью метода стратегий. При движении из начальной точки *i* в конечную точку *к* получается приближение = S_{ik}, где S_{ik} — длина пути между точками *i* и *к.*
Следующее приближение — поиск решения в классе двузвенных ломаных. Дальнейшие приближения отыскивают в классе трехзвенных, четырехзвенных и других ломаных.

5.3 Алгоритмы и методы решения задач динамического программирования

Динамическое программирование особенно эффективно для задач, условия которых позволяют составить сетевой график перехода от этапа к этапу, где узлы сети будут соответствовать различным значениям переменных, а дуги — допустимым вариантам решения.

Основным принципом, положенным в основу метода динамического программирования, является принцип оптимальности, суть которого заключается в том, что каждое последующее решение строится оптимальным образом независимо от решений, получаемых на всех предыдущих этапах, кроме последнего. Чтобы реализовать этот принцип, необходимо в исходной задаче определить:
¨ этапы решений (подзадачи, на которые она декомпозируется);
¨ управляемые переменные (варианты решений) на каждом этапе;
¨ информацию для решения задачи на каждом этапе;

¨ рекуррентные вычислительные процедуры, связывающие соседние этапы.
Другими словами, в методе динамического программирования искусственно создаются условия для независимой оптимизации на отдельном г по результатам только предыдущего, причем с гарантией того, что «ученное решение будет находиться в области допустимых.

Различают прямые и обратные методы оптимизации. Они отличаются друг от друга различным представлением переменной и видом рекуррентных соотношений.

Пример решения задачи динамического программирования

Задача. Планируется распределение начальной суммы средств $e^0 = 40$ млн руб., причем средства выделяются кратно 10 млн руб. между тремя предприятиями $П_1$, $П_2$, $П_3$. Выделение предприятию $П_k$ средств u^k приносит доход $f_k(u^k)$, который задан в табл. Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы обеспечить максимальный суммарный доход.

x	0	10	20	30	40
$f_1(x)$	0	4	5	7	8
$f_2(x)$	0	3	3	4	6
$f_3(x)$	0	4	4	5	6

Решение находим с помощью калькулятора.

I этап. Условная оптимизация.

1-ый шаг. k = 3.

e^2	u^3	$e^3 = e^2 - u^3$	$f_3(u^3)$	$F^*_3(e^3)$	$u_3(e^3)$
10	0	10	0	4	10
	10	0	4		
20	0	20	0	4	10
	10	10	4		
	20	0	4		
30	0	30	0	5	30
	10	20	4		
	20	10	4		
	30	0	5		
40	0	40	0	6	40
	10	30	4		
	20	20	4		
	30	10	5		
	40	0	6		

2-ый шаг. k = 2.

e^1	u^2	$e^2 = e^1 - u^2$	$f_2(u^2)$	$F^*_2(e^1)$	$F_1(u^2,e^1)$	$F^*_2(e^2)$	$u_2(e^2)$
10	0	10	0	4	4	4	0
	10	0	3	0	3		
20	0	20	0	4	4	7	10
	10	10	3	4	7		
	20	0	3	0	3		
30	0	30	0	5	5	7	10
	10	20	3	4	7		
	20	10	3	4	7		
	30	0	4	0	4		
40	0	40	0	6	6	8	10
	10	30	3	5	8		
	20	20	3	4	7		
	30	10	4	4	8		
	40	0	6	0	6		

3-ый шаг. k = 1.

e^0	u^1	$e^1 = e^0 - u^1$	$f_1(u^1)$	$F^*_1(e^0)$	$F_0(u^1,e^0)$	$F^*_1(e^1)$	$u_1(e^1)$
10	0	10	0	4	4	4	0
	10	0	4	0	4		
20	0	20	0	7	7	8	10
	10	10	4	4	8		
	20	0	5	0	5		
30	0	30	0	7	7	11	10
	10	20	4	7	11		
	20	10	5	4	9		
	30	0	7	0	7		
40	0	40	0	8	8	12	20
	10	30	4	7	11		
	20	20	5	7	12		
	30	10	7	4	11		
	40	0	8	0	8		

Поясним построение таблиц и последовательность проведения расчетов.
Столбцы 1, 2 и 3 для всех трех таблиц одинаковы, поэтому их можно было бы сделать общими. Столбец 4 заполняется на основе исходных данных о функциях дохода, значения в столбце 5 берутся из столбца 7 предыдущей таблицы, столбец 6 заполняется суммой значений столбцов 4 и 5 (в таблице 3-го шага столбцы 5 и 6 отсутствуют).
В столбце 7 записывается максимальное значение предыдущего столбца для фиксированного начального состояния, и в 8 столбце записывается управление из 2 столбца, на котором достигается максимум в 7.

Этап II. Безусловная оптимизация.

Из таблица 1-го шага имеем $F^*_3(e^0 = 40) = 12$. То есть максимальный доход всей системы при количестве средств $e^0 = 40$ равен 12
Из этой же таблицы получаем, что 1-му предприятию следует выделить $u^*_1(e^0 = 40) = 20$
При этом остаток средств составит:
$e^1 = e^0 - u^1$
$e^1 = 40 - 20 = 20$
Из таблица 2-го шага имеем $F^*_2(e^1 = 20) = 7$. То есть максимальный доход всей системы при количестве средств $e^1 = 20$ равен 7
Из этой же таблицы получаем, что 2-му предприятию следует выделить $u^*_2(e^1 = 20) = 10$
При этом остаток средств составит:
$e^2 = e^1 - u^2$
$e^2 = 20 - 10 = 10$
Последнему предприятию достается 10
Итак, максимальный доход в количестве 40 будет получен, если:
1-му предприятию выделить 20
2-му предприятию выделить 10
3-му предприятию выделить 10
Что обеспечит максимальный доход, равный 12

Раздел 6. Многоцелевая оптимизация

6.1 Структура многокритериальной и векторной оптимизационной модели. Постановка задач многоцелевой оптимизации

Основные предпосылки многопараметрической оптимизации формулируются теорией многоцелевой оптимизации, которая обосновывает методы решения задач, состоящие в поиске оптимального решения, удовлетворяющего нескольким, не сводимым друг к другу критериям. Различают векторную и многокритериальную оптимизации. В отличие от векторной оптимизации, когда рассматривается совокупность однородных критериев различных подсистем, использование многокритериальной оптимизации предполагает учет разнородных критериев.

Как правило, в большинстве задач многокритериальной оптимизации критерии имеют существенно различный физический (экономический) смысл, разные единицы измерения, поэтому сравнение критериев по численному значению невозможно, что в значительной степени затрудняет применение всех методик многокритериальной оптимизации.

Поэтому в большинстве случаев в решение многокритериальной задачи требуется включение предварительного этапа - нормализации критериев.

Нормализация критериев представляет собой однозначное отображение функции fk (X),Vk e K , из RN в RN . Для нормализации критериев в векторных задачах используется линейное преобразование:

fk(X) = af'(X) + c,Vk eK (54)

или

fk (X) = (fk (X) + c)/ a,Vk e K , (55)

где f'k (X),Vk e K - первоначальное значение критерия; fk (X),Vk e K - нормализованное значение.

Такая нормализация критериев в оптимизационной задаче не влияет на результат решения. В случае, если решается выпуклая оптимизационная задача:

max F(X), X e 5 , (56)

X

то в точке оптимума

X* e5,dF(X*)/dX = 0. (57)

Если же решается оптимизационная задача:

max(aF(X) + c),X e 5 , (58)

то в точке оптимума

X* e5,d(aF(X*) + c)/dX = 0, (59)

т.е. результат идентичен.

К нормализации критериев в векторных задачах предъявляются два основных требования: нормализованные критерии должны быть измерены в одних и тех же величинах;

в точках оптимума Xk ,Vk e K величины всех критериев должны иметь одинаковую величину.

При выполнении этих требований представляется возможным сравнить критерии по их численному значению. В нашем случае - решении задачи многокритериальной оптимизации с максимумом векторной целевой функции применяется следующая нормализация критериев:

Xk (X) = (fk(X) - frw; - fkmn). (60)

При этом относительная оценка Xk (X), k = 1, K на всем множестве допустимых точек лежит в пределах

0 <="" 1,="" vx="" e="" 5="" .="" (61)=""

При этом величины 1 - X k (X) называются относительными отклонениями Xk (X).

Следует заметить, что при всех достоинствах предварительной нормализации критериев у нее имеется важный недостаток (общий для всех относительных величин) - нормализованный критерий не всегда имеет столь однозначную экономическую интерпретацию, как обычный. Например, если относительная оценка критерия f9 - норматив текущей ликвидности - равна 0,9 (т.е. 90 % от максимально возможной), то трудно сказать, достаточный ли это показатель для банка. Если же знать, что в абсолютных величинах данная величина составляет 94 % (при максимуме в 106 %), а требуемое инструкцией минимальное значение составляет 70 %, то на основании этого можно сделать более определенные выводы. Поэтому в ходе решения задачи многокритериальной оптимизации необходимо пользоваться параллельно обычными и нормализованными критериями.

Методика построения множества

<u>Парето-оптимальных решений</u>

Выделение Парето-оптимального подмножества - достаточно трудная задача, для которой пока не известен универсальный алгоритм. Однако для некоторых частных случаев такие алгоритмы известны, например, для случая линейной задачи векторной оптимизации

существует обобщенный вариант симплекс-метода, который позволяет выделить все Парето-оптимальные крайние точки и неограниченные эффективные ребра. Однако в нашем случае он не подходит, так как некоторые из целевых функций являются нелинейными. В этом случае напрашивается решение, использующее идею полного просмотра всех возможных вариантов решений и выбора из них лучшего. Однако, естественно, что такой полный просмотр невозможен, так как количество точек просмотра бесконечно. Для того, чтобы уменьшить количество просматриваемых точек можно (конечно, в ущерб получаемого объема информации) каким-либо разумным способом организовать процедуру просмотра. На этой идее и основан метод решения проектно-конструкторских задач с противоречивыми критериями, предложенный И. М. Соболем и Р. Б. Статниковым и основанный на утверждении, что максимальное число просматриваемых точек при минимуме вычислений достигается, если точки выбираются из так называемой ЛПт-последовательности. Название ЛПт-последовательность появилось как сокращение фразы
"бесконечные последовательности точек, любой двоичный участок которых есть Пт-сетка". Таким образом, просматривая варианты в точках, соответствующих ЛПт-последовательности и, вычисляя значения критериев в этих точках, можно принимать обоснованные решения. Для выделения среди полученных точек Парето-оптимальных используется метод, основанный на применении алгоритмов сортировки. Достоинством данного метода является отсутствие необходимости решения скалярных задач оптимизации, которые в некоторых случаях (сложные нелинейные функции с обилием разрывов и т. д.) требуют значительных затрат машинного времени. В нашем случае это не столь актуально, как в инженерных задачах, так как экстремумы всех использованных функций легко вычисляются.
Поэтому в качестве метода построения множества Парето был выбран приближенный графоаналитический метод Н. Н. Моисеева, который заключается в последовательном итеративном процессе решения простейших оптимизационных задач. В случае двух критериев он применяется следующим образом: сначала задаются начальными произвольными значениями критериев: f1 = c1; f2 = c2. Затем решаются две оптимизационные задач:
1) max f1, f = C2; 2) max f2, f = cb (62)
Решив эти две задачи находят точки a и b. Прямая, соединяющая эти две точки является областью Парето в первом приближении. Далее решаются две аналогичные задачи. При этом задаются значениями критериев: f = c3; f2 = c4. Затем решаются две оптимизационные задачи:
1) max f1, f = C4; 2) max f>, f = C3. (63)
Через полученные точки снова проводят прямые. После соединения точек c и d получают ломаную acdb, которая является областью Парето второго приближения. В большинстве случаев второе приближение является достаточным. В случае большего числа критериев метод теряет наглядность, но может выполняться с помощью ЭВМ. Важной проблемой является визуальное представление множества Парето. В случае двух критериев оно отображается линией на плоскости. В случае трех критериев множество Парето можно визуализовать поверхностью в пространстве, однако, в отличие от линии на плоскости сделать выбор на основании трехмерного графика достаточно трудно. Поэтому возможно применение альтернативного метода линий уровня, который можно обобщить на большее число критериев.
При построении множества Парето-оптимальных решений ввиду трудностей многомерной визуализации необходимо выбрать два - три критерия, наиболее актуальных в данный момент.

6.2 Алгоритмы и методы решения задач многокритериальной оптимизации

1.Ранжирование критериев по важности, выделение из них одного главного, при этом уровень остальных фиксируется как дополнительные ограничения - *условная субоптимизация.*

2. *Лексикографический выбор* - упорядочение заданного множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них. Частные критерии кц кг,..., ks, по которым оценивается объект, так, что ki - существенно важнее всех остальных частных критериев. В этом случае, если альтернативный вариант а; предпочтительнее варианта *щ* по критерию ki, то независимо от оценки по другим частным критериям вариант а; предпочтительнее. Если же оценки альтернативных вариантов совпадают по первым г частным критериям, то в этом случае более предпочтительным является вариант, выбранный по г+1 частному критерию.
3. *Скаляризация векторного критерия.* При ранжировании критериям приписываются экспертные суммарные весовые коэффициенты, в соответствии с их важностью и на этой основе строится единый скалярный критерий.

4.3. Лабораторные работы

№ п/п	***Номер раздела дисциплины***	***Наименование лабораторной работы***	***Объем (час.)***	***Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)***
1	2	3	4	5
1	**2.**	Нахождение оптимального решения задач линейного программирования	6	Работа в малой группе (1 час)
2		Анализ оптимального решения задач линейного программирования на чувствительность	6	Работа в малой группе (1 час)
3		Распределительные задачи	6	Работа в малой группе (1 час)
4	**3.**	Нахождение оптимального решения задач нелинейного программирования	6	Работа в малой группе (2 часа)
5		Анализ оптимального решения задач нелинейного программирования на чувствительность	6	Работа в малой группе (1 час)
6		Нахождение оптимального решения задач стохастического программирования	6	Работа в малой группе (1 час)
7		Анализ оптимального решения задач стохастического программирования на чувствительность	4	Работа в малой группе (1 час)
8	**4.**	Нахождение оптимального решения задач дискретного программирования	8	Работа в малой группе (1 час)
9		Анализ оптимального решения задач дискретного программирования на чувствительность	4	Работа в малой группе (1 час)
10	**5.**	Задача о замене оборудования	12	Работа в малой группе (1 час)
11	**6.**	Многопараметрическая оптимизация	6	Работа в малой группе (1 час)
		ИТОГО	**70**	**12**

4.4. Практические занятия

Учебным планом не предусмотрено.

4.5. Контрольные мероприятия: курсовая работа

Цель: приобретение навыков по применению методов исследования операций, направленных на количественное обоснование управленческих решений по улучшению состояния экономических процессов и систем.
Структура: введение, основные разделы, заключение, список использованных источников, приложения.
Основная тематика: разработка управленческих решений на основе задач математического программирования.
Рекомендуемый объем: 20-25 страниц в компьютерном исполнении, оформляемых в соответствии со стандартом ФГБОУ ВО «БрГУ».

Оценка	**Критерии оценки курсовой работы**
отлично	Оценка «отлично» за работу выставляется, если в ней: - используется научная, учебная, методическая литература по проблеме; - верно применены полученные знания на практике при решении конкретных задач; - оформление соответствует предъявляемым требованиям (выдержаны орфография, стиль изложения материала, имеются цитаты, ссылки и т.д.); - обучающийся четко и аргументированно отвечает на вопросы по анализируемой теме.
хорошо	Оценка «хорошо» за работу выставляется, если в ней: - используется научная, учебная, методическая литература по проблеме; - оформление соответствует предъявляемым требованиям (выдержаны орфография, стиль изложения материала, имеются цитаты, ссылки и т.д.); - обучающийся свободно и правильно обосновывает принятые решения - обучающийся четко отвечает на вопросы по анализируемой теме.
удовлетворительно	Оценка «удовлетворительно» за работу выставляется, если в ней: - используется учебная, методическая литература по проблеме; - сделаны выводы по исследуемой проблеме и даны практические рекомендации; - оформление соответствует предъявляемым требованиям (выдержаны орфография, стиль изложения материала, имеются цитаты, ссылки и т.д.); - обучающийся затрудняется отвечать на вопросы по анализируемой теме.
неудовлетвори-тельно	Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если: - библиография ограничена; - обучающийся плохо защищает работу; - оформление не соответствует требованиям.

5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Компетенции ***№, наименование разделов дисциплины***	***Кол-во часов***	***Компетенции***		***Σ комп.***	***$t_{ср}$, час***	***Вид учебных занятий***	***Оценка результатов***
		ОПК	**ПК**				
		2	*23*				
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1. Предмет, метод и основные задачи исследования операций	30	+	+	2	15	Лк, ЛР, СР	Зачет
2. Постановка и методы решения задач линейного программирования	54	+	+	2	27	Лк, ЛР, СР	Зачет
3. Постановка и методы решения задач нелинейного программирования	65	+	+	2	32,5	Лк, ЛР, СР	Экзамен, КР
4. Постановка и методы решения задач дискретного программирования	48	+	+	2	24	Лк, ЛР, СР	Экзамен, КР
5. Постановка и методы решения задач динамического программирования	45	+	+	2	22,5	Лк, ЛР, СР	Экзамен, КР
6.Многоцелевая оптимизация	46	+	+	2	23	Лк, ЛР, СР	Экзамен, КР
всего часов	**288**	**144**	**144**	**2**	**144**		

6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Ларионова, О. Г. Исследование операций. Элементы теории игр: учебное пособие / О.Г. Ларионова. - 2-е изд., перераб. и доп. - Братск: БрГУ, 2013. - 98 с.

7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№	***Наименование издания***	***Вид занятия***	***Количество экземпляров в библиотеке,* шт.**	***Обеспеченность,* (экз./ чел.)**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Основная литература				
1.	Зайцев, М.Г. Методы оптимизации управления для менеджеров: компьютерно-ориентированный подход: учебное пособие / М.Г. Зайцев; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Институт бизнеса и делового администрирования. - 4-е изд. - Москва: Издательский дом «Дело», 2017. - 313 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=444317	Лк, ЛР,КР, СР	1 ЭУ	1
2.	Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций: учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. - 7-е изд. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 398 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=452649	Лк, ЛР,КР, СР	1 ЭУ	1
Дополнительная литература				
3.	Исследование операций: учебное пособие / Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо-Кавказский федеральный университет»; сост. А.С. Адамчук, С.Р. Амироков и др. - Ставрополь : СКФУ, 2015. - 178 с.: ил. - Библиогр. в кн.; http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457348	Лк, ЛР,КР, СР	1 ЭУ	1
4.	Математические методы и модели исследования операций: учебник / ред. В.А. Колемаева. - Москва: Юнити-Дана, 2015. - 592 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114719	Лк, ЛР,КР, СР	1 ЭУ	1

8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО - ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Электронный каталог библиотеки БрГУ: http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r_15/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=
2. Электронная библиотека БрГУ http://ecat.brstu.ru/catalog
3. Федеральная университетская компьютерная сеть России // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://www.runnet.ru/
4. Каталог учебников, оборудования, электронных ресурсов // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://ndce.edu.ru/
5. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» // Электронный ресурс http://e.lanbook.com/ ,
6. Библиотека «Книгосайт» // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://knigosite.ru/
7. Электронная библиотека книг на тему бизнеса, финансов, экономики и смежным темам // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://www.finbook.biz/
8. ЭБС «Университетская библиотека online» // Электронный ресурс http://biblioclub.ru/ ,
9. Научная электронная библиотека «КИБЕРЛЕНИНКА» // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://cyberleninka.ru/

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучение курса «Исследование операций и методы оптимизации» предполагает равномерный режим работы и ритмичный ее характер.

Так, проработка лекционного материала осуществляется в течение семестра. При этом осуществляется написание конспекта лекций, изучение основных терминов, классификаций информационных систем и использования компьютерных технологий на предприятиях.

В ходе выполнения лабораторных работ производится обобщение, систематизация, углубление и конкретизация полученных теоретических знаний, выработка способности и готовности их использования на практике. При подготовке к ним необходима проработка основной и дополнительной литературы, терминов, сведений, являющихся основополагающими в теме/разделе, а также выполнение заданий, необходимых для участия в интерактивной, активной и инновационных формах обучения по исследуемым вопросам.

Другой частью самостоятельной работы обучающихся является подготовка к зачету в четвертом семестре и к экзамену – в пятом, а также выполнение курсовой работы, которая является допуском к экзамену. При этом необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу и использовать ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению лабораторных работ

Лабораторная работа № 1

Нахождение оптимального решения задач линейного программирования

Цель работы: приобрести навыки нахождения оптимального решения ЗЛП

Задание:
1. Решить ЗЛП графическим способом;
2. Решить ЗЛП симплекс-методом – путем построения симплексных таблиц и с использованием ППП «Microsoft Excel»;
3. Составить задачу, двойственную исходной, и найти ее оптимальное решение на основе результатов решения исходной ЗЛП;
4. Выполнить анализ оптимального решения исходной задачи на чувствительность
Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание;
3. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Содержание работы;
4. Задание на лабораторную работу;
5. Протокол выполнения задания (краткое описание всех операций, необходимых для выполнения заданий, сопровождающихся скриншотами);
6. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература
[1, 2,] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература
[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Контрольные вопросы для самопроверки
1. Что такое оптимальное решение?
2. В чем особенность симплекс-метода?

Лабораторная работа №2
Анализ оптимального решения задач линейного программирования на чувствительность

Цель работы: провести анализ оптимального решения задач линейного программирования на чувствительность

Задание:
1. Выполнить анализ оптимального решения исходной задачи на чувствительность.

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание, используя справочный материал и лекции;
3. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Содержание работы;
4. Задание на лабораторную работу;
5. Протокол выполнения задания (краткое описание всех операций, необходимых для выполнения заданий, сопровождающихся скриншотами);
6. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература
[1, 2,] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература
[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Контрольные вопросы для самопроверки:
1. Как выявляется чувствительность оптимального решения?
2. Что такое отчет о пределах?

Лабораторная работа № 3
Распределительные задачи

Цель работы: научиться решать распределительные задачи

Задание:
1. Составить оптимальный план перевозок с использованием метода северо-западного угла. Объемы запасов (a_i) указаны в последних столбцах таблиц, размеры спроса (b_j) – в последних строках.
2. Определить оптимальное назначение, указав соответствующую ему величину суммарных затрат. Использовать матрицы стоимостей транспортных перевозок из транспортной таблицы.

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание;
3. Оформить отчет.

Форма отчетности:

Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Задание на лабораторную работу;
4. Протокол выполнения задания;
5. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию

1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература

[1, 2] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература

[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Лабораторная работа № 4
Нахождение оптимального решения задач нелинейного программирования

Цель работы: нахождение оптимального решения задач нелинейного программирования

Задание:
1. Оптимизировать управленческое решение на основе ЗПЛ (задач нелинейного программирования) для системы ограничений.

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание, используя технологию выполнения операций;
3. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Задание на лабораторную работу;
4. Протокол выполнения задания (краткое описание – в виде таблиц);
5. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;

2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература

[1, 2] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература

[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Лабораторная работа № 5
Анализ оптимального решения задач нелинейного программирования на чувствительность

Цель работы: провести анализ оптимального решения задач нелинейного программирования на чувствительность

Задание:
1. С помощью Microsoft Excel необходимо выполнить отчеты анализа полученного решения (пример лабораторной работы №4) на чувствительность для нахождения минимума.

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание , используя технологию выполнения операций;
4. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Задание на лабораторную работу;
4. Протокол выполнения задания (краткое описание – в виде таблиц);
5. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература

[1, 2] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература

[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Лабораторная работа № 6
Нахождение оптимального решения задач стохастического программирования

Цель работы: нахождение оптимального решения задач стохастического программирования

Задание:
1. Решить задачу при различных значениях вероятностей выполнения ограничений ($0,5 \le p \le 0.9$ с шагом 0,1) и величины коэффициента ($0,00 \le v \le 0,30$ с шагом 0,05).

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание , используя технологию выполнения операций;
4. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Задание на лабораторную работу;
4. Протокол выполнения задания (краткое описание – в виде таблиц);
5. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература
[1, 2] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература

[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Лабораторная работа № 7
Анализ оптимального решения задач стохастического программирования на чувствительность

Цель работы: нахождение оптимального решения задач стохастического программирования

Задание:
1. Решить задачу при различных значениях вероятностей выполнения ограничений ($0,5 \le p \le 0.9$ с шагом 0,1) и величины коэффициента ($0,00 \le v \le 0,30$ с шагом 0,05).

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание , используя технологию выполнения операций;
4. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Задание на лабораторную работу;

4. Протокол выполнения задания (краткое описание – в виде таблиц);
5. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература

[1, 2] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература

[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Лабораторная работа № 8
Нахождение оптимального решения задач дискретного программирования

Цель работы: нахождение оптимального решения задач дискретного программирования

Задание:

$3x+y \to max$

$$\begin{cases} x - y \geq 6 \\ -3x + 8y \leq 24 \end{cases}$$

1. Решить задачу, добавив требования целочисленности к управляемым переменным. Сравнить результаты непрерывного и целочисленного решения, построив гистограммы.
2. Представить сводный отчет по всем итерациям, а так же построить схему реализации метода ветвей и границ.
3. Выполнить анализ отчета по результатам.

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание , используя технологию выполнения операций;
4. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Задание на лабораторную работу;
4. Протокол выполнения задания (краткое описание – в виде таблиц);
5. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература

[1, 2] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература

[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Лабораторная работа № 9
Анализ оптимального решения задач дискретного программирования на чувствительность

Цель работы: анализ оптимального решения задач дискретного программирования на чувствительность

Задание:

$$3x+y \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x-y \le 6 \\ -3x+8y \le 24 \end{cases}$$

1. Выполнить анализ отчета по результатам.
2. Провести параметрический анализ влияния допустимого отклонения на оптимальное решение, построив соответствующую гистограмму.
3. Провести анализ на чувствительность.

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание , используя технологию выполнения операций;
4. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Задание на лабораторную работу;
4. Протокол выполнения задания (краткое описание – в виде таблиц);
5. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература

[1, 2] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература

[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Лабораторная работа № 10
Задача о замене оборудования

Цель работы: рассмотреть вопрос об экономической целесообразности модернизации эксплуатируемого оборудования.

Задание: найти для периода τ=7 цикл замены оборудования возраст которого на начало периода равен.

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание , используя технологию выполнения операций;
4. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Задание на лабораторную работу;
4. Протокол выполнения задания (краткое описание – в виде таблиц);
5. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература
[1, 2] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература

[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Лабораторная работа № 11
Многопараметрическая оптимизация

Цель работы: ознакомление с задачами многопараметрической оптимизации

Задание:
1.Выполнить оптимизацию по обобщенной целевой функции и по ресурсам в соответствии с

заданиями лабораторной работы №1.
2.Проанализировать влияние весовых коэффициентов на результат решения, построив соответствующие графики зависимостей.

Порядок выполнения:
1. Изучить справочную информацию;
2. Выполнить задание , используя технологию выполнения операций;
4. Оформить отчет.

Форма отчетности:
Письменный отчет, который содержит:
1.Титульный лист, на котором обязательно должны быть указаны название и номер практического задания, Ф.И.О. студента;
2. Цель работы;
3. Задание на лабораторную работу;
4. Протокол выполнения задания (краткое описание – в виде таблиц);
5. Вывод.

Задания для самостоятельной работы:
1. Повторение теоретического материала;
2. Самостоятельная работа над пройденным материалом

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
1. Предварительное ознакомление с методическим материалом по дисциплине;
2. Изучение лекционного материала по теме, чтение учебной и методической литературы.

Основная литература
[1, 2] – согласно таблице раздела 7.

Дополнительная литература

[3,4] – согласно таблице раздела 7.

Контрольные вопросы для самопроверки
1.Как происходит влияние весовых коэффициентов на результат решения?
2. Что такое многопараметрическая оптимизация?

9.2. Методические указания по выполнению курсовой работы

Курсовая работа должна содержать решение актуальных организационно-управленческих, финансово-экономических задач, способствующих экономической стабильности и прибыльности производства в рыночных условиях.

Тематика курсовой работы по дисциплине формируется с учетом следующих требований:

- темы работ должны соответствовать профилю подготовки обучающихся и отражать основные направления их будущей деятельности;
- темы работ должны быть направлены на решение актуальных для рыночной экономики проблем развития производства;
- тема должна быть конкретной, но достаточно комплексной, чтобы дать возможность обучающимся применить свои знания в области экономики и управления производством.

Пояснительная записка к курсовой работе должна содержать следующие структурные элементы:

- титульный лист;
- содержание;

- введение;
- основные разделы работы;
- заключение;
- список использованных источников;
- приложения.

Задание на курсовую работу выдается преподавателем в соответствии с вариантом.

10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

- Microsoft Windows Professional Russian
- Microsoft Office Russian
- Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Security
- Справочно-правовая система «Консультант Плюс»
- Среда разработки Microsoft Visual Studio;
- Среда разработки и использования электронных Обучающих ресурсов iLogos и т.д.

11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Вид занятия	***Наименование аудитории***	***Перечень основного оборудования***	***№ ЛР***
1	**2**	**3**	**4**
Лк	Лекционная аудитория (мультимедийный класс)	Компьютер, интерактивная доска	-
ЛР	Дисплейный класс	Компьютеры	ЛР № 1-11
СР	ЧЗ-1	-	-
КР	ЧЗ-1	Компьютеры	-

Приложение 1

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
ОПК-2 ПК-23	способность анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования способность применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач	**1.** Предмет, метод и основные задачи исследования операций	**1.1** Модель. Модель исследования операций. Основные понятия. **1.2** Сущность оптимизации. Структура оптимизационных задач **1.3**Классификация задач математического программирования	Вопросы к зачету 1.1-1.3
		2. Постановка и методы решения задач линейного программирования	**2.1** Каноническая и стандартная ЗЛП. Математические основы решения ЗЛП: линейно-независимые векторы, свободные и базисные переменные **2.2** Общее и базисное решение системы линейных уравнений **2.3** Графический способ решения ЗЛП. Основные теоремы линейного программирования **2.4** Сущность и основные этапы симплекс-метода **2.5** Постановка двойственных ЗЛП. Теоремы двойственности **2.6** Экономическая интерпретация двойственности **2.7** Анализ оптимального решения на чувствительность **2.8** Распределительные ЗЛП. Постановка транспортных задач. **2.9** Многопродуктовые модели. Перевозка с промежуточными пунктами. Задача о назначениях	Вопросы к зачету 2.1-2.9

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
ОПК-2 ПК-23	способность анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования способность применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач	**1.** Предмет, метод и основные задачи исследования операций	**1.1** Модель. Модель исследования операций. Основные понятия. **1.2** Сущность оптимизации. Структура оптимизационных задач **1.3**Классификация задач математического программирования	Вопросы к экзамену 1.1-1.4
		2. Постановка и методы решения задач линейного программирования	**2.1** Каноническая и стандартная ЗЛП. Математические основы решения ЗЛП: линейно-независимые векторы, свободные и базисные переменные **2.2** Общее и базисное решение системы линейных уравнений **2.3** Графический способ решения ЗЛП. Основные теоремы линейного программирования **2.4** Сущность и основные этапы симплекс-метода **2.5** Постановка двойственных ЗЛП. Теоремы двойственности **2.6** Экономическая интерпретация двойственности **2.7** Анализ оптимального решения на чувствительность **2.8** Распределительные ЗЛП. Постановка транспортных задач. **2.9** Решение транспортных задач **2.10** Многопродуктовые модели. Перевозка с промежуточными пунктами **2.11** Задача о назначениях	Вопросы к экзамену 2.1-2.11
		3. Постановка и методы решения задач нелинейного программирования	**3.1** Структура нелинейной оптимизационной модели. Причины нелинейности. Основные теоремы	Вопросы к экзамену 3.1-3.4

			нелинейного программирования **3.2** Основные методы решения нелинейных оптимизационных задач **3.3** Постановка и решение задач стохастического программирования **3.4** Примеры задач стохастического программирования	
		4. Постановка и методы решения задач дискретного программирования	**4.1** Структура дискретной оптимизационной модели. Постановка задачи дискретного программирования **4.2** Примеры задач дискретного программирования **4.3** Алгоритмы и методы решения задач дискретного программирования	Вопросы к экзамену 4.1-4.3
		5. Постановка и методы решения задач динамического программирования	**5.1** Структура динамической оптимизационной модели. Постановка задачи динамического программирования **5.2** Примеры задач динамического программирования **5.3** Алгоритмы и методы решения задач динамического программирования	Вопросы к экзамену 5.1-5.3
		6.Многоцелевая оптимизация	**6.1** Структура многокритериальной и векторной оптимизационной модели. Постановка задач многоцелевой оптимизации **6.2** Алгоритмы и методы решения задач многокритериальной оптимизации	Вопросы к экзамену 6.1-6.2

№ п/п	Компетенции		ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ	№ и наименование раздела
	Код	Определение		
1	2	3	4	5
1.	ОПК-2	способность анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования	**1.1** Модель исследования операций: основные понятия	**1.** Предмет, метод и основные задачи исследования операций
			1.2 Сущность оптимизации	
			1.3 Структура оптимизационных задач	
			2.1 Каноническая и стандартная ЗЛП	**2.**Постановка и методы решения задач линейного программирования
			2.2 Математические основы решения линейно-независимые векторы, свободные и базисные переменные	
			2.3 Общее и базисное решение системы линейных уравнений	
			2.4 Графический способ решения ЗЛП	
			2.5 Основные теоремы линейного программирования	
			2.6 Сущность и основные этапы симплекс-метода	
2.	ПК-23	способность применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач	**2.7** Постановка двойственных ЗЛП. Теоремы двойственности	
			2.8 Экономическая интерпретация двойственности	
			2.9 Распределительные ЗЛП. Постановка транспортных задач.	

2. Экзаменационные вопросы

№ п/п	Компетенции		ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ	№ и наименование раздела
	Код	Определение		
1	2	3	4	5
1.	ОПК-2	способность анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования	**1.1** Модель исследования операций: основные понятия	**1.** Предмет, метод и основные задачи исследования операций
			1.2 Сущность оптимизации	
			1.3 Структура оптимизационных задач	
			1.4 Классификация задач математического программирования	
			2.1Каноническая и стандартная ЗЛП	**2.**Постановка и методы решения задач линейного программирования
			2.2 Математические основы решения линейно-независимые векторы, свободные и базисные переменные	
			2.3 Общее и базисное решение системы линейных уравнений	
			2.4 Графический способ решения ЗЛП	
2.	ПК-23	способность применять системный подход и математические	**2.5** Основные теоремы линейного программирования	
			2.6 Сущность и основные этапы симплекс-метода	
			2.7 Постановка двойственных ЗЛП. Теоремы двойственности	

		методы в формализации решения прикладных задач	**2.8** Экономическая интерпретация двойственности	
			2.9 Анализ оптимального решения на чувствительность	
			2.10 Распределительные ЗЛП. Постановка транспортных задач.	
			2.11 Решение транспортных задач	
			2.12 Многопродуктовые модели. Перевозка с промежуточными пунктами	
			2.13 Задача о назначениях	
			3.1 Структура нелинейной оптимизационной модели	**3.** Постановка и методы решения задач нелинейного программирования
			3.2 Основные методы решения нелинейного программирования	
			3.3 Основные методы решения нелинейных оптимизационных задач	
			3.4 Постановка и решение задач стохастического программирования	
			4.1 Постановка задачи дискретного программирования	**4.** Постановка и методы решения задач дискретного программирования
			4.2 Алгоритмы и методы решения задач дискретного программирования	
			5.1 Постановка задачи динамического программирования	**5.** Постановка и методы решения задач динамического программирования
			5.2 Алгоритмы и методы решения задач динамического программирования	
			6.1 Постановка задач многоцелевой оптимизации	**6.**Многоцелевая оптимизация
			6.2 Алгоритмы и методы решения задач многокритериальной оптимизации	

3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

Показатели	Оценка	Критерии
Знать: *(ОПК - 2):* - методы системного анализа и математического моделирования *(ПК-23):* - основы системного подхода **Уметь:** *(ОПК - 2):* - анализировать социально-экономические задачи и процессы *(ПК-23):* - применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач **Владеть:**	**отлично**	Оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он: - глубоко усвоил материал; исчерпывающе полно, четко и логически последовательно его излагает; - умеет уверенно применять получившие знания на практике при решении конкретных задач; - свободно и правильно обосновывает принятые решения; - использует при ответе научную терминологию; - твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его.
	хорошо	Оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он: - знает материал; - умеет уверенно применять получившие знания на практике при решении конкретных задач; - свободно и правильно обосновывает принятые решения;

(ОПК - 2): - способностью анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования *(ПК-23):* - способностью применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач		- использует при ответе научную терминологию; - твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, но допускает неточности.
	удовлетво-рительно	Оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся: - имеет знания только по основному материалу, но не усвоил его деталей, допускает неточности; - сохраняет способность применять получившие знания на практике при решении конкретных задач; - владеет некоторой терминологией.
	неудовлет-ворительно	Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он: - не знает значительной части программного материала; - допускает существенные ошибки. Оценка «неудовлетворительно» ставится обучающимся, не освоившим необходимых компетенций.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности

Дисциплина «Исследование операций и методы оптимизации» направлена на изучение основных категорий и методов оптимизации как современного научного направления, возможностей и особенностей использования оптимизационных методов в решении практических задач оптимального управления.

Изучение дисциплины «Исследование операций и методы оптимизации» предусматривает:

- лекции;
- лабораторные работы;
- самостоятельную работу обучающихся;
- курсовую работу;
- экзамен.

В ходе освоения раздела 1 «Предмет, метод и основные задачи исследования операций» обучающиеся должны ознакомиться с основными понятиями, рассмотреть этапы построения математической модели и основные задачи исследования операций.

Изучение раздела 2 «Постановка и методы решения задач линейного программирования» предполагает рассмотрение математических основ решения ЗЛП, основные теоремы линейного программирования, сущность и основные этапы симплекс-метода и др.

Изучение раздела 3 «Постановка и методы решения задач нелинейного программирования» направлено на изучение основных теорем нелинейного программирования, методов решения нелинейных оптимизационных задач, а также постановку и решение задач стохастического программирования.

В ходе освоения раздела 4 «Постановка и методы решения задач дискретного программирования» обучающиеся должны изучить структуру дискретной оптимизационной модели, рассмотреть постановку задачи дискретного программирования, разобрать примеры задач, а также алгоритмы, методы решения задач дискретного программирования.

Изучение раздела 5 «Постановка и методы решения задач динамического программирования» позволяет в полной мере ознакомиться со структурой динамической оптимизационной модели, рассмотреть постановку задачи динамического программирования, а также алгоритмы и методы решения задач динамического программирования.

Изучение раздела 6 «Многоцелевая оптимизация» направлено на изучение структуры многокритериальной и векторной оптимизационной модели, постановку задач многоцелевой оптимизации, алгоритмов и методов решения задач многокритериальной оптимизации

В процессе изучения дисциплины рекомендуется на первом этапе обратить внимание на понятийно-категориальный аппарат дисциплины. Овладение ключевыми понятиями является важным этапом в освоении сущности дисциплины.

На втором этапе целесообразно изучить основные программные средства реализации информационных процессов.

На третьем этапе следует изучить основы решения задач нелинейного программирования.

На четвертом этапе необходимо ознакомиться с основами дискретного программирования.

Предусмотрено проведение аудиторных занятий (в виде лекций и лабораторных работ) в сочетании с самостоятельной работой.

Самостоятельную работу необходимо начинать с проработки конспекта лекций, обобщения, систематизации, углубления и конкретизации полученных теоретических знаний с использованием основной и дополнительной литературы, а также рекомендуемых ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

В процессе консультации с преподавателем обучающиеся могут прояснять вопросы, вызвавшие трудности при самостоятельной работе.

К экзамену допускаются обучающиеся, выполнившие все лабораторные работы, предусмотренные настоящей рабочей программой (перечень работ представлен в разделе 4, методические указания по выполнению заданий и их оформлению – в разделе 9.1) и сдавшие курсовую работу.

Приложение 2

АННОТАЦИЯ
рабочей программы дисциплины
Исследование операций и методы оптимизации

1. **Цель и задачи дисциплины**

Целью изучения дисциплины является: теоретическая и практическая подготовка в области общенаучных исследований количественной стороны массовых социально-экономических процессов на основе их моделирования с помощью методов исследования операций.

Задачами изучения дисциплины являются: освоение обучающимися методики постановки и решения различных видов оптимизационных задач, анализа получаемых результатов.

2. **Структура дисциплины**

2.1 Распределение трудоемкости по отдельным видам учебных занятий, включая самостоятельную работу: лекции – 52 часа; лабораторные работы – 70 часов, самостоятельная работа – 166 часов.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 288 часов, 5 зачетных единицы

2.2 Основные разделы дисциплины:

1 – Предмет, метод и основные задачи исследования операций;
2 – Постановка и методы решения задач линейного программирования;
3 – Постановка и методы решения задач нелинейного программирования;
4 – Постановка и методы решения задач дискретного программирования;
5 – Постановка и методы решения задач динамического программирования;
6 – Многоцелевая оптимизация

3. Планируемые результаты обучения (перечень компетенций)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:
- ОПК-2 способность анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования;
- ПК-23 способность применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач

4. Вид промежуточной аттестации: КР, зачет, экзамен

Приложение 3

Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе на 20___-20___ учебный год

1. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие дополнения:
____
____

2. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие изменения:
____
____
____

Протокол заседания кафедры №____ от «___» __________ 20 ____ г.,
(разработчик)

Заведующий кафедрой _____________________ _______________________
(подпись) *(Ф.И.О.)*

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
ОПК-2 ПК-23	способность анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования способность применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач	**1.** Предмет, метод и основные задачи исследования операций	**1.1** Модель. Модель исследования операций. Основные понятия. **1.2** Сущность оптимизации. Структура оптимизационных задач **1.3**Классификация задач математического программирования	Контрольные вопросы по разделам дисциплины, отчет о Лб, курсовая работа
		2. Постановка и методы решения задач линейного программирования	**2.1** Каноническая и стандартная ЗЛП. Математические основы решения ЗЛП: линейно-независимые векторы, свободные и базисные переменные **2.2** Общее и базисное решение системы линейных уравнений **2.3** Графический способ решения ЗЛП. Основные теоремы линейного программирования **2.4** Сущность и основные этапы симплекс-метода **2.5** Постановка двойственных ЗЛП. Теоремы двойственности **2.6** Экономическая интерпретация двойственности **2.7** Анализ оптимального решения на чувствительность **2.8** Распределительные ЗЛП. Постановка транспортных задач. **2.9** Решение транспортных задач **2.10** Многопродуктовые модели. Перевозка с промежуточными пунктами **2.11** Задача о	Контрольные вопросы по разделам дисциплины, отчет о Лб, курсовая работа

			назначениях	
		3. Постановка и методы решения задач нелинейного программирования	**3.1** Структура нелинейной оптимизационной модели. Причины нелинейности. Основные теоремы нелинейного программирования **3.2** Основные методы решения нелинейных оптимизационных задач **3.3** Постановка и решение задач стохастического программирования **3.4** Примеры задач стохастического программирования	Контрольные вопросы по разделам дисциплины, отчет о Лб, курсовая работа
		4. Постановка и методы решения задач дискретного программирования	**4.1** Структура дискретной оптимизационной модели. Постановка задачи дискретного программирования **4.2** Примеры задач дискретного программирования **4.3** Алгоритмы и методы решения задач дискретного программирования	Контрольные вопросы по разделам дисциплины, отчет о Лб, курсовая работа
		5. Постановка и методы решения задач динамического программирования	**5.1** Структура динамической оптимизационной модели. Постановка задачи динамического программирования **5.2** Примеры задач динамического программирования **5.3** Алгоритмы и методы решения задач динамического программирования	Контрольные вопросы по разделам дисциплины, отчет о Лб, курсовая работа
		6.Многоцелевая оптимизация	**6.1** Структура многокритериальной и векторной оптимизационной модели. Постановка задач многоцелевой оптимизации **6.2** Алгоритмы и методы решения задач многокритериальной оптимизации	Контрольные вопросы по разделам дисциплины, отчет о Лб, курсовая работа

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

<table>
<tr><th>Показатели</th><th>Оценка</th><th>Критерии</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Знать:
(ОПК - 2):
- методы системного анализа и математического моделирования

(ПК-23):
- основы системного подхода

Уметь:
(ОПК - 2):
- анализировать социально-экономические задачи и процессы

(ПК-23):
- применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач

Владеть:
(ОПК - 2):
- способностью анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования
(ПК-23):
- способностью применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач</td><td>зачтено</td><td>Оценка «зачтено» выставляется обучающемуся, если он:
- глубоко усвоил материал, исчерпывающе полно, четко и логически последовательно его излагает;
- умеет уверенно применять получившие знания на практике при решении конкретных задач;
- свободно и правильно обосновывает принятые решения;
- использует при ответе научную терминологию;
- твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, но допускает в ответе некоторые неточности.</td></tr>
<tr><td>не зачтено</td><td>Оценка «не зачтено» выставляется обучающемуся:
- если он не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.</td></tr>
</table>

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика от «12» марта 2015 г. № 207

для набора 2014 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для заочной формы обучения от «03» июля 2018 г. № 413

для набора 2015 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «03» июля 2018 г. № 413, заочной формы обучения от «03» июля 2018 г. № 413

для набора 2016 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «05» мая 2016 г. № 342

для набора 2017 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «06» марта 2017 г. №125, заочной формы обучения от «06» марта 2017 г. №125

для набора 2018 года и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «12» марта 2018 г. № 130, заочной формы обучения от «12» марта 2018 г. № 130

Программу составил:

Геращенко Л.А, доцент баз. МиИТ, доцент, к.п.н. ______________________

Розанова А.А., ст. преподаватель базовой кафедры МиИТ _______________

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании базовой кафедры МиИТ

от «19» декабря 2018 г., протокол № 8

И.о. заведующего базовой кафедрой МиИТ _____________ Е.И. Луковникова

СОГЛАСОВАНО:

И.о. заведующего выпускающей базовой кафедрой МиИТ _____________ Е.И. Луковникова

Директор библиотеки _____________ Т.Ф. Сотник

Рабочая программа одобрена методической комиссией факультета ФЭиУ

от «28» декабря 2018 г., протокол № 4

Председатель методической комиссии факультета _____________ Е.В. Трапезникова

СОГЛАСОВАНО:

Начальник учебно-методического управления _____________ Г.П. Нежевец

Регистрационный №________