

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра Управление в технических системах

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе

_____ Е.И. Луковникова

« _____ » _____ 201__ г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ**

Б1.Б.14

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ

11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи

ПРОФИЛЬ ПОДГОТОВКИ

Многоканальные телекоммуникационные системы

Программа академического бакалавриата

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ	3
2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ	3
3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ	4
3.1 Распределение объёма дисциплины по формам обучения.....	4
3.2 Распределение объёма дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости	4
4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	5
4.1 Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий	5
4.2 Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам	7
4.3 Лабораторные работы.....	80
4.4 Практические занятия.....	80
4.5. Контрольные мероприятия: контрольная работа.....	80
5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	82
6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ	83
7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....	83
8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО – ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	83
9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....	84
9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению лабораторных работ/ практических работ	84
9.2. Методические указания по выполнению контрольной работы	94
10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ	94
11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ	94
Приложение 1. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.....	95
Приложение 2. Аннотация рабочей программы дисциплины	101
Приложение 3. Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе	102
Приложение 4. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости по дисциплине.....	103

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Вид деятельности выпускника

Дисциплина охватывает круг вопросов, относящихся к проектному виду профессиональной деятельности выпускника в соответствии с компетенциями и видами деятельности, указанными в учебном плане.

Цель дисциплины

Приобретение умений и навыков исследования проблем в своей предметной области, выбора методов и средств их решения, анализа результатов теоретических и экспериментальных исследований.

Задачи дисциплины

Формирование способностей анализа результатов исследований, выбора методов и средств решения проблем в своей предметной области.

Код компетенции	Содержание компетенций	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
ОПК-3	способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации	Знать: - основы теории четырехполюсников и цепей с распределенными параметрами; Уметь: - проводить анализ физических процессов, происходящих в различных направляющих системах, устройствах сверхвысоких частот, в однородных и неоднородных средах; Владеть: - навыками практической работы с лабораторными макетами аналоговых и цифровых устройств.
ПК-8	умение собирать и анализировать информацию для формирования исходных данных для проектирования средств и сетей связи и их элементов	Знать: - основы устойчивости электрических цепей с обратной связью, электрических аналоговых, дискретных и цифровых фильтров. Уметь: - рассчитывать параметры электромагнитной совместимости. Владеть: - методами компьютерного моделирования физических процессов при передаче информации.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.Б.14 Общая теория связи относится к базовой части.

Дисциплина Общая теория связи базируется на знаниях, полученных при изучении дисциплин Б1.Б.12 Теория электрических цепей.

Общая теория связи представляет основу для изучения дисциплин: Б1.В.ОД.14 Сети связи и системы коммутации и Б1.В.ОД.15 Проектирование и эксплуатация систем передачи.

Такое системное междисциплинарное изучение направлено на достижение требуемого ФГОС уровня подготовки по квалификации бакалавр.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Распределение объема дисциплины по формам обучения

Форма обучения	Курс	Семестр	Трудоемкость дисциплины в часах						Курсовая работа	Вид промежуточной аттестации
			Всего часов (с экз.)	Аудиторных часов	Лекции	Лабораторные работы	Практические занятия	Самостоятельная работа		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Очная	3	5,6	252	124	53	53	18	74	6 КР	Зачет Экзамен
Заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Заочная (ускоренное обучение)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Очно-заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

3.2. Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости:

Вид учебных занятий	Трудоемкость (час.)	в т.ч. в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)	Распределение по семестрам, час	
			5	6
I. Контактная работа обучающихся с преподавателем (всего)	124	30	34	90
Лекции (Лк)	53	-	17	36
Лабораторные работы (ЛР)	53	30	17	36
Практические работы (ПР)	18	-	-	18
Курсовая работа (КР)	+	-	-	+
Индивидуальные (групповые) консультации	+	-	+	+
II. Самостоятельная работа обучающихся (СР)	74	-	2	72
Подготовка к лабораторным работам	16	-	-	16
Подготовка к практическим работам	10	-	-	10
Подготовка к зачету	2	-	2	-
Подготовка к экзамену в течение семестра	16	-	-	16
Выполнение курсовой работы	30	-	-	30
III. Промежуточная аттестация зачет, экзамен	+	-	+	-
	54	-	-	54
Общая трудоемкость дисциплины час.	252	-	36	216
зач. ед.	7	-	1	6

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий - для очной формы обучения:

№ раздела и темы	Наименование раздела и тема дисциплины	Трудоем-ность, (час.)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)			
			учебные занятия			самосто-ятельна я работа обучаю-щихся
			лекции	лаборато-рные работы	практиче-ские работы	
1	2	3	4	5	6	7
1.	Общие сведения о системах связи	16	8	8	-	-
1.1.	Информация, сообщения, сигналы	8	4	4	-	-
1.2.	Обобщенная структурная схема системы связи	8	4	4	-	-
2.	Математические модели сигналов	18	9	9	-	-
2.1.	Сигналы как элементы функциональных пространств	2	1	1	-	-
2.2.	Разложение сигналов в обобщенный ряд Фурье	4	2	2	-	-
2.3.	Спектральное представление сигналов	4	2	2	-	-
2.4.	Дискретизация и восстановление сигналов	4	2	2	-	-
2.5.	Квазигармоническое представление сигналов	4	2	2	-	-
3.	Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи	20	9	9	-	2
3.1.	Особенности преобразования сигналов в линейных, параметрических и нелинейных функциональных узлах	3	1	1	-	1
3.2.	Перемножение сигналов	3	1	1	-	1
3.3.	Амплитудная модуляция	2	1	1	-	-
3.4.	Другие виды линейной модуляции (БМ, ОМ, КАМ)	2	1	1	-	-
3.5.	Детектирование сигналов с линейными видами модуляции	2	1	1	-	-
3.6.	Преобразование частоты сигналов	2	1	1	-	-
3.7.	Угловая (ЧМ и ФМ) модуляция	2	1	1	-	-
3.8.	Детектирование сигналов с угловой модуляцией	2	1	1	-	-
3.9.	Виды модуляции, используемые при передаче дискретных сообщений	2	1	1	-	-

4.	Математические модели случайных процессов	48	9	9	6	24
4.1.	Понятие случайного процесса	16	3	3	2	8
4.2.	Сокращенное описание случайных процессов	16	3	3	2	8
4.3.	Спектральный анализ случайных процессов	16	3	3	2	8
5.	Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов	48	9	9	6	24
5.1.	Прохождение случайных процессов через безынерционные цепи	16	3	3	2	8
5.2.	Прохождение случайных процессов через линейные цепи	16	3	3	2	8
5.3.	Узкополосные случайные процессы	16	3	3	2	8
6.	Оптимальный прием дискретных сообщений	48	9	9	6	24
6.1.	Постановка задачи	8	1,5	1,5	1	4
6.2.	Критерии качества приема дискретных сообщений	8	1,5	1,5	1	4
6.3.	Синтез оптимального демодулятора при известном ансамбле сигналов	8	1,5	1,5	1	4
6.4.	Потенциальная помехоустойчивость когерентного приема	8	1,5	1,5	1	4
6.5.	Сравнительный анализ потенциальной помехоустойчивости основных видов цифровой модуляции	8	1,5	1,5	1	4
6.6.	Синтез оптимального демодулятора в канале с неопределенной фазой	8	1,5	1,5	1	4
	ИТОГО	198	53	53	18	74

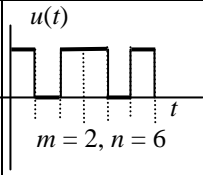
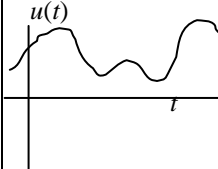
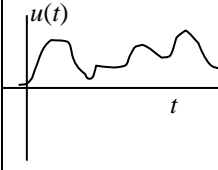
4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам

1. Общие сведения о системах связи

1.1. Информация, сообщения, сигналы

Под **информацией** понимают совокупность каких-либо сведений о явлениях, объектах и т.п. **Сообщения** представляют собой материальную форму существования информации и могут иметь различную физическую природу. **Сигналами** в электрической связи служат процессы (функции времени) электрической природы, посредством которых осуществляется передача сообщений на расстояние. Общее и различное в этих основополагающих понятиях теории связи поясняется таблицей 1.1. В ней также указаны возможные преобразователи сообщений в сигналы, которые называют **датчиками сигналов**.

Таблица 1.1.

Вид сообщения	Математ. модель	Сигнал $u(t)$	Датчик сигнала
Текст	$a_i(k)$ $k = 1, 2, \dots, n$ $a_i \in \{a_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$		Клавиатура ЭВМ
Звук	$p = p(t)$		Микрофон
Факс Видео	$b = b(x, y)$ $b = b(x, y, t)$		ФЭ и УР Видеокамера

Текстовые сообщения представляют собой последовательности символов из некоторого конечного множества $\{a_i\}$ (языка) с известным объемом алфавита m . Преобразование такого рода сообщений в сигнал может осуществляться, например, клавиатурой ЭВМ путем поочередного кодирования отдельных символов сообщения k -разрядными комбинациями из 0 и 1, которым соответствуют два разных уровня напряжения.

Звуковые сообщения представляют собой изменения давления воздушной среды в заданной точке пространства во времени $p(t)$. С помощью микрофона они преобразуются в переменный электрический сигнал $u(t)$, который в определенном смысле является копией сообщения и отличается от него лишь физической размерностью.

Видеосообщения можно рассматривать как распределение яркости на поверхности объекта $b(x, y)$, неподвижное изображение которого требуется передать на расстояние (фототелеграф), или более сложный процесс $b(x, y, t)$ (черно-белое телевидение). Характерной особенностью при передаче видеосообщений является необходимость преобразования описывающих их многомерных функций в одномерный сигнал $u(t)$. Это достигается использованием в датчиках видеосигналов устройств развертки (УР) для поэлементного преобразования яркости отдельных точек объектов в уровень электрического сигнала с помощью фотоэлементов (ФЭ) или иных фотоэлектрических преобразователей.

Классификация сигналов

По относительной ширине спектра сигналы делят на низкочастотные (называемые также НЧ, видео, широкополосные сигналы) и высокочастотные (ВЧ, радио, узкополосные, полосовые сигналы).

Для **НЧ сигналов** $\Delta F/F_{cp} > 1$, где

$\Delta F = F_{max} - F_{min}$ – абсолютная ширина спектра сигнала,

$F_{cp} = (F_{max} + F_{min})/2$ – средняя частота спектра сигнала,

F_{max} – максимальная частота в спектре сигнала,

F_{min} – минимальная частота в спектре сигнала.

Для **ВЧ сигналов** $\Delta F/F_{cp} \ll 1$.


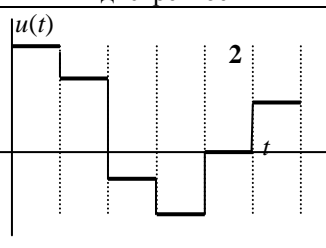
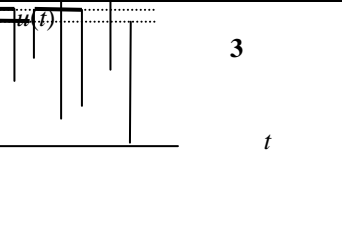

Как правило, первичные сигналы на выходе датчиков являются низкочастотными. Полезно помнить диапазоны частот, в которых располагаются спектры типичных сигналов в системах связи и вещания:

- 1) телефонный – 300 ÷ 3400 Гц (стандартный канал тональной частоты),
- 2) радиовещательный – от 30–50 Гц до 6–15 кГц,
- 3) телевизионный – 0 ÷ 6 МГц (для вещательного стандарта разложения изображения, принятого в России).

По своей природе различают сигналы детерминированные и случайные. **Детерминированные** сигналы считаются известными в каждой точке временной оси. В отличие от них значения **случайных (стохастических)** сигналов в каждый момент времени являются случайной величиной с той или иной вероятностью. Очевидно, что детерминированные сигналы в силу своей полной определенности не могут нести никакой информации. Их удобно использовать в теории для анализа различных функциональных узлов (ФУ), а на практике в качестве испытательных сигналов для измерения неизвестных параметров и характеристик отдельных звеньев трактов систем связи.

По форме сигналы можно разделить на четыре вида, приведенные в таблице 1.2.

Таблица 1.2.

		Время t	
		непрерывное	дискретное
Значения $u(t)$	Непрерывные		
	Дискретные		

Сигнал (1), непрерывный по времени и состояниям, называют **аналоговым**. Сигнал (4), дискретный по времени и состояниям, – **цифровым**. Эти сигналы чаще всего используются в различных узлах систем связи. Соответственно различают **аналоговые и цифровые ФУ** по форме сигналов на их входах и выходах. Возможны преобразования аналогового сигнала в цифровой с помощью **аналого-цифрового преобразователя (АЦП)** и, наоборот, – с помощью **цифро-аналогового преобразователя (ЦАП)**. Условные графические обозначения (УГО) этих типовых ФУ приведены на рис. 1.1.

Сигналы можно рассматривать в качестве объектов транспортировки по каналам связи и характеризовать основными параметрами, такими как

- **длительность сигнала T_c ,**
- **ширина его спектра F_c ,**

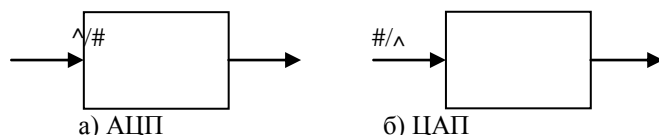


Рис. 1.1. УГО АЦП и ЦАП

- **динамический диапазон $D_c = 10 \cdot \lg \frac{P_{\max}}{P_{\min}}$ [дБ],** где

P_{\max} и P_{\min} – максимальная и минимальная
мгновенные мощности сигнала.

Пользуются также более общей характеристикой – **объемом сигнала** $V_c = T_c \cdot F_c \cdot D_c$. На интуитивном уровне очевидно, чем больше объем сигнала, тем он информативнее, но тем и выше требования к качеству канала для его передачи.

1.2. Обобщенная структурная схема системы связи

Под системой связи (СС) понимают совокупность технических средств и среды распространения сигнала, служащих для передачи сообщений от источника к получателю.

Обобщенная структурная схема системы связи приведена на рис. 1.2. Она включает только основные ФУ (преобразователи сигналов), необходимые для передачи как дискретных, так и непрерывных сообщений.

Любая система связи начинается с источника, сообщения которого требуется доставить получателю сообщений. В зависимости от вида источника и канала возможны три основных варианта построения систем связи.

Вариант 1. В центральной части рис. 1.2 изображена структура системы передачи дискретных сообщений (СПДС). В нее входят следующие основные ФУ:

- 1) **Кодер источника**, служащий, прежде всего, для согласования объемов алфавитов дискретного источника ($m \gg 2$) и дискретного канала ($m=2$). В результате каждый символ источника преобразуется в k -разрядную двоичную комбинацию из 0 и 1. Очевидно, что $k \geq \log_2 m$.

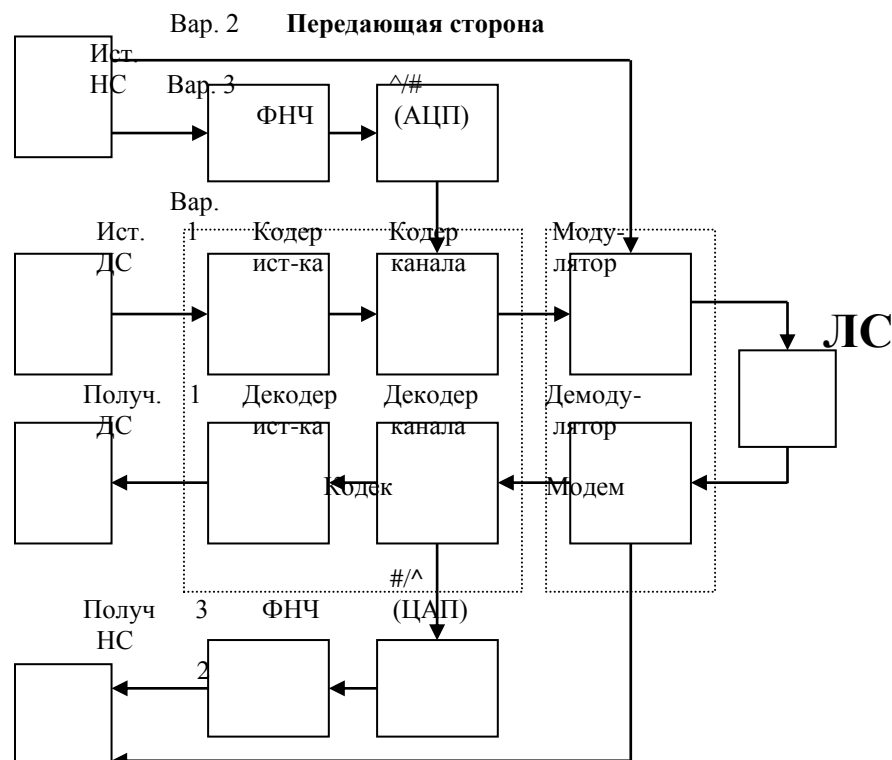


Рис. 1.2. Обобщенная структурная схема системы связи

- 2) **Кодер канала**, используемый для повышения помехоустойчивости связи. В нём к входным (информационным) кодовым комбинациям добавляются дополнительные символы, называемые проверочными, которые вместе с правилом их формирования позволяют на приемной стороне обнаруживать и (или) исправлять некоторые из возможных ошибок передачи.
- 3) **Модулятор**, служащий для согласования первичного сигнала на выходе кодирующего устройства с характеристиками линии связи. Как правило, это преобразование сводится к преобразованию НЧ сигнала в ВЧ сигнал.
- 4) **Линия связи (ЛС)**, представляющая собой среду распространения сигнала в части пространства, разделяющего передающую и приемную стороны СС. В ЛС сигнал подвергается искажениям и действию помех.
- 5) **Демодулятор**, осуществляющий анализ смеси сигнала с помехой на своем входе в течение времени его существования (временные параметры анализа обеспечиваются системой синхронизации, которая считается идеально работающей и не показана на данной схеме) и на его основе принимающий решение (возможно ошибочное) о том, какой вариант сигнала (из известного множества на входе модулятора) передавался. В результате на выход выдается «чистая» копия этого сигнала, но уже на следующем тактовом интервале.
- 6) **Декодер канала**, обнаруживающий и (или) исправляющий некоторые ошибки во входных кодовых комбинациях, вызванные действием помех в ЛС, по известному ему правилу формирования проверочных символов в кодере канала.

7) **Декодер источника** преобразующий информационную часть кодовой комбинации в первичное сообщение (символ источника дискретных сообщений) при не обнаружении ошибок передачи.

Совокупность кодера и декодера, выполненных в виде самостоятельного ФУ, называют **кодеком**, а пару модулятор и демодулятор – **модемом**.

В тех случаях, когда сообщения по своей природе являются непрерывными (речь, музыка, видео и т.п.), а первичные сигналы соответственно аналоговыми, возможны два варианта их передачи.

Вариант 2. Передача аналогового сигнала непосредственно по ЛС, если она пропускает первичный сигнал с допустимым качеством (городская телефонная сеть), либо с использованием модулятора, реализующего прежнюю функцию согласования сигнала с ЛС. При этом несколько меняется функция демодулятора на приемной стороне, который в этой ситуации обычно называют детектором. Его задача теперь заключается в наиболее точном воспроизведении формы первичного сигнала в результате обработки принятого колебания.

Вариант 3. Передача аналогового сигнала по цифровому каналу связи. В этом случае на передающей стороне возникает необходимость преобразования аналогового первичного сигнала в цифровой с помощью АЦП (функция ФНЧ, ограничивающая спектр сигнала на входе АЦП, станет ясной при изучении в дальнейшем теоремы отсчетов). На приемной стороне полученные после декодирования числовые значения отсчетов с помощью ЦАП преобразуются в соответствующие уровни напряжения и после сглаживания в ФНЧ поступают к получателю в аналоговой форме.

Классификация систем связи

По виду передаваемых сообщений различают:

- 1) **телеграфию** (передача текста),
- 2) **телефонию** (передача речи),
- 3) **фототелеграфию** (передача неподвижных изображений),
- 4) **телевидение** (передача подвижных изображений),
- 5) **телеметрию** (передача результатов измерений),
- 6) **телеуправление** (передача управляющих команд),
- 7) **передачу данных** (в вычислительных системах и АСУ).

По диапазону частот – в соответствии с декадным делением диапазонов электромагнитных волн от **мириметровых** ($3 \div 30$) кГц до **децимиллиметровых** ($300 \div 3000$) ГГц.

По назначению – **вещательные** (высококачественная передача речи, музыки, видео от малого числа источников сообщений большому количеству их получателей) и **профессиональные** (связные), в которых число источников и получателей сообщений одного порядка.

Различают следующие режимы работы СС:

- 1) **симплексный** (передача сигналов в одном направлении),
- 2) **дуплексный** (одновременная передача сигналов в прямом и обратном направлениях),
- 3) **полудуплексный** (поочередная передача сигналов в прямом и обратном направлениях).

Уточним уже использованный нами термин **канал связи**. Под ним принято понимать часть СС между точками А на передающей и Б на приемной сторонах. В зависимости от выбора этих точек, иначе говоря, по виду сигналов на входе и выходе различают каналы:

- 1) **непрерывные**,
- 2) **дискретные**,
- 3) **дискретно-непрерывные**,
- 4) **непрерывно-дискретные**.

Каналы связи можно характеризовать по аналогии с сигналами следующими тремя параметрами:

- **временем доступа** T_k ,
- **шириной полосы пропускания** F_k ,
- **динамическим диапазоном** $D_k = 10 \cdot \lg \frac{P_{к.доп.}}{P_{ш}}$ [дБ],

где $P_{к.доп.}$ – максимально допустимая мощность сигнала в канале,

$P_{ш}$ – мощность собственных шумов канала.

Обобщенным параметром канала является его **емкость**

$$V_k = T_k \cdot F_k \cdot D_k.$$

Очевидным необходимым условием согласования сигнала и канала является выполнение неравенства $V_c < V_k$.

Менее очевидно то, что это условие является также достаточным и вовсе не обязательно добиваться аналогичного согласования по частным параметрам (длительности, спектру, динамическому диапазону), так как возможен «обмен» ширины спектра сигнала на его длительность или динамический диапазон.

2. Математические модели сигналов

2.1. Сигналы как элементы функциональных пространств

Сигналы – это, прежде всего, процессы, т.е. функции времени $x(t)$, существующие на ограниченном интервале T (в теории возможно $T \rightarrow \infty$). Их можно изобразить графически (рис. 2.1) и описывать упорядоченной последовательностью значений в отдельные моменты времени t_k

$$x(t) \rightarrow x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_k), \dots, x(t_n) = \vec{\mathbf{x}} \quad (\text{вектор строка}).$$

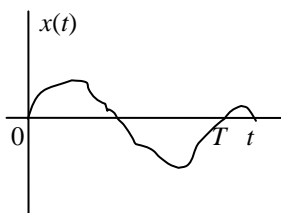


Рис. 2.1. График сигнала

Разные сигналы отличаются формой (набором значений $x(t_k)$). Вместо сложной совокупности точек кривой $x(t)$ в простой области – двумерном пространстве можно ввести в рассмотрение более сложные пространства (пространства сигналов), в которых каждый сигнал изображается простейшим элементом – точкой (вектором).

В математике под пространством понимают множество объектов (любой физической природы), наделенных некоторым общим свойством. Свойства, которыми целесообразно наделять пространства сигналов, должны отражать наиболее существенные свойства реальных сигналов, такие как их длительность, энергия, мощность и т.п.

Метрические пространства

Первое свойство, которым мы наделим пространство сигналов, называют метрикой.

Метрическое пространство – это множество с подходящим образом определенным расстоянием между его элементами. Само это расстояние, как и способ его определения, называют **метрикой** и обозначают $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$. Метрика должна представлять собой функционал, т.е. отображение любой пары элементов $\vec{\mathbf{x}}$ и $\vec{\mathbf{y}}$ множества на действительную ось, удовлетворяющее интуитивно понятным требованиям (аксиомам):

- | | |
|---|---|
| 1) $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \geq 0$ | (равенство при $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$), |
| 2) $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = d(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})$, | |
| 3) $d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}}) + d(\vec{\mathbf{z}}, \vec{\mathbf{y}})$ | (аксиома треугольника). |

Следует отметить, что метрики можно задать разными способами и в результате для одних и тех же элементов получить разные пространства.

Примеры метрик:

- | | |
|---|--------------------|
| 1) $d_1(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^n x_i - y_i $, | |
| 2) $d_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ | евклидова метрика, |
| 3) $d_3(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sqrt{\int_0^T [x(t) - y(t)]^2 dt}$ | евклидова метрика. |

Линейные пространства

Усовершенствуем структуру пространства сигналов, наделив его простыми алгебраическими свойствами, присущими реальным сигналам, которые можно алгебраически складывать и умножать на числа.

Линейным пространством L над полем F называют множество элементов $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L$, называемых векторами, для которых заданы две операции – сложение элементов (векторов) $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ и умножение векторов на элементы λ из поля F (называемые **скалярами**) $\lambda \vec{\mathbf{x}}$. Не вдаваясь в математические детали, в дальнейшем, под полем скаляров будем понимать множества вещественных чисел R (случай действительного пространства L) или комплексных чисел C (случай комплексного пространства L). Эти операции должны удовлетворять системе аксиом линейного пространства.

1. Замкнутость операций сложения и умножения на скаляр:

$$\forall (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in L) \quad \exists! (\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} \in L),$$

$$\forall (\vec{\mathbf{x}} \in L, \lambda \in F) \quad \exists! (\vec{\mathbf{y}} = \lambda \vec{\mathbf{x}} \in L).$$

2. Свойства сложения:

$$\vec{\mathbf{x}} + (\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}) = (\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) + \vec{\mathbf{z}} \quad \text{ассоциативность,}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \quad \text{коммутативность.}$$

3. Свойства умножения на скаляр:

$$\alpha(\beta\vec{x}) = \alpha\beta\vec{x} \quad \text{ассоциативность,}$$

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} \quad \text{дистрибутивность суммы векторов,}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x} \quad \text{дистрибутивность суммы скаляров.}$$

4. $\exists!(\vec{0}) \Rightarrow \forall(\vec{x} \in L) \Rightarrow \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ существование нулевого вектора.

5. $\forall(\vec{x} \in L) \exists!(\vec{-x} \in L) \Rightarrow \vec{-x} + \vec{x} = \vec{0}$ существование противоположного вектора.

Вектор, образованный суммированием нескольких векторов со скалярными коэффициентами

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i,$$

называют **линейной комбинацией** (многообразием). Легко видеть, что множество всех линейных комбинаций векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ при разных α_i (не затрагивая \vec{x}_i ,) также образует линейное пространство, называемое **линейной оболочкой** для векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

Множество векторов называют **линейно независимыми**, если равенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$$

возможно лишь при всех $\alpha_i = 0$. Например, на плоскости любые два неколлинеарные вектора (не лежащие на одной прямой) являются линейно независимыми.

Система линейно независимых и ненулевых векторов $\{\vec{e}_i\}$, $\vec{e}_i \in L$ образует в пространстве L **базис**, если

$$\forall(\vec{x} \in L) \exists!(\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i, \alpha_i \in F).$$

Этот единственный набор скаляров $\{\alpha_i\}$, соответствующий конкретному вектору \vec{x} , называют его **координатами (проекциями)** по базису $\{\vec{e}_i\}$.

Благодаря введению базиса операции над векторами превращаются в операции над числами (координатами)

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \vec{e}_i.$$

Если в линейном пространстве L можно отыскать n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов зависимы, то n – **размерность** пространства L ($\dim L = n$).

Нормированные пространства

Следующий наш шаг в совершенствовании структуры пространства сигналов – объединение геометрических (характерных для метрических пространств) и алгебраических (для линейных пространств) свойств путем введения действительного числа, характеризующего «размер» элемента в пространстве. Такое число называют **нормой** вектора и обозначают $\|\vec{x}\|$.

В качестве нормы можно использовать любое отображение линейного пространства на действительную ось, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1) $\|\vec{x}\| \geq 0$, $\|\vec{0}\| = 0$,
- 2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$,
- 3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Пространства со скалярным произведением

Введем еще одну дополнительную геометрическую характеристику (операцию) в пространстве сигналов в виде отображения упорядоченной пары векторов на поле скаляров из F . Эту операцию называют **скалярным (внутренним) произведением** векторов и записывают в виде (\vec{x}, \vec{y}) , т.е.

$$\forall(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle; \vec{x}, \vec{y} \in L) \exists!(\alpha = (\vec{x}, \vec{y}), \alpha \in F).$$

Скалярное произведение должно удовлетворять следующей системе аксиом (над полем комплексных чисел):

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})^*$	эрмитова симметрия,
2) $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$	дистрибутивность,
3) $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$	ассоциативность, $(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha^*(\vec{x}, \vec{y})$
4) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$,	если $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Из этих аксиом следует, что

$$(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha_1(\vec{x}_1, \vec{y}) + \alpha_2(\vec{x}_2, \vec{y}).$$

Если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, то векторы \vec{x} и \vec{y} ортогональны $[\vec{x} \perp \vec{y}]$.

Если $\{\vec{x}_i\} \Rightarrow (\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то система векторов $\{\vec{x}_i\}$ ортонормированная. Легко показать, что система ортонормированных векторов – линейно независимая.

В линейном пространстве со скалярным произведением целесообразно норму и метрику определять через скалярное произведение

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}, \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y})}.$$

Весьма важное значение имеет соотношение, называемое **неравенством Коши-Буняковского-Шварца**

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

На основе скалярного произведения можно ввести понятие **угла** φ между двумя векторами, исходя из соотношения

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos\varphi.$$

В ТЭС наибольший практический интерес представляют следующие линейные нормированные метрические пространства:

1. R_n – n -мерное вещественное евклидово пространство, в котором каждый вектор определяется совокупностью n его координат $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Скалярное произведение векторов в этом пространстве

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Оно порождает норму и расстояние

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

2. $L_2(T)$ – бесконечномерные пространства (Гильберта), которые образуют непрерывные комплексные $\dot{x}(t)$ или вещественные $x(t)$ функции, заданные на интервале $(0, T)$.

Скалярное произведение векторов в этом пространстве

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \int_0^T \dot{x}(t) \dot{y}^*(t) dt.$$

$$\text{Квадрат нормы } \|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = \int_0^T \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) dt = \int_0^T |\dot{x}(t)|^2 dt$$

имеет ясный физический смысл энергии E_x сигнала, если под $x(t)$ иметь в виду напряжение (или ток) на сопротивлении 1 Ом. Квадрат расстояния между вещественными сигналами $x(t)$ и $y(t)$ определяется соотношением

$$d^2(\vec{x}, \vec{y}) = \int_0^T [x(t) - y(t)]^2 dt$$

и имеет смысл энергии разностного сигнала.

3. $L_2(\infty)$ – бесконечномерные пространства (Гильберта), которые образуют непрерывные комплексные $\dot{x}(t)$ или вещественные $x(t)$ функции, заданные на интервале $(-T/2, T/2)$ при $T \rightarrow \infty$. Если для вещественных функций условие

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

не выполняется, но выполняется условие ограничения мощности

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt < \infty,$$

то можно ввести скалярное произведение векторов в этом пространстве с размерностью мощности

$$(\bar{x}, \bar{y})_P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{x}(t) \dot{y}^*(t) dt$$

и норму $\|\bar{x}\|_P = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})_P} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\dot{x}(t)|^2 dt}$.

4. 2_n – n -мерное пространство Хэмминга, которые образуют двоичные n -последовательности (кодовые комбинации из 0 и 1), широко используемые в системах ПДС. Норму и метрику в этом пространстве задают в виде

$$\|\bar{x}\| = \sum_{i=1}^n x_i, \quad d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i \oplus y_i|,$$

где знак \oplus обозначает операцию сложения по модулю 2 (по правилам: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$).

Таким образом, норма вектора в пространстве Хэмминга определяется общим количеством содержащихся в нем единиц, а расстояние между двоичными векторами – количеством позиций (разрядов) кодовых комбинаций, в которых они различаются.

Следует отметить, что вещественные пространства R_n (при $n \rightarrow \infty$), $L_2(T)$ и $L_2(\infty)$ **изоморфны (эквивалентны)**. Это означает, что между их элементами (равно как суммами элементов, их произведениями на скаляры и скалярными произведениями) можно установить взаимно-однозначное соответствие. Изоморфны также соответствующие им комплексные пространства. Понятие изоморфизма имеет большое практическое значение, так как позволяет представить одну модель сигнала другой.

2.2. Разложение сигналов в обобщенный ряд Фурье

Введем в пространстве $L_2(T)$ базис $\{\psi_i(t)\}$. Для упрощения последующих вычислений будем полагать, что он **ортонормированный**, т.е. отвечает условию

$$(\bar{\Psi}_i, \bar{\Psi}_j) = \int_{-T/2}^{T/2} \Psi_i(t) \Psi_j(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Тогда любую функцию $x(t)$ из $L_2(T)$ можно представить через проекции C_i вектора \bar{x} на оси базиса –

функции $\{\psi_i(t)\}$ **обобщенным рядом Фурье** $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \Psi_i(t)$. (2.1)

Для нахождения проекций C_j , называемых также **коэффициентами разложения** $x(t)$ в обобщенный ряд Фурье, вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{\Psi}_j) &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \Psi_j(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i \Psi_i(t) \right] \Psi_j(t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_{-T/2}^{T/2} \Psi_i(t) \Psi_j(t) dt = C_j \|\bar{\Psi}_j\|^2 = C_j \end{aligned}$$

Таким образом

$$C_j = (\bar{x}, \bar{\Psi}_j) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \Psi_j(t) dt.$$

Получим еще одно важное соотношение

$$(\bar{x}, \bar{x}) = \|\bar{x}\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) \cdot dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \Psi_i(t) \right]^2 \cdot dt = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 = E_x, \text{ являющееся частным случаем}$$

равенства Парсеваля.

2.3. Спектральное представление сигналов

Спектры периодических сигналов

Периодическими называют сигналы, обладающие следующим свойством

$$x(t) = x(t - kT), \text{ где } T - \text{ период, } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Как известно, такие функции (если они удовлетворяют известным из математики условиям Дирихле, которые для интересующих нас случаев всегда выполняются) можно представить суммой тригонометрического ряда (**ряда Фурье**)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (2.2)$$

$$\text{где } a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega_1 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega_1 t dt,$$

$$\omega_1 = 2\pi F_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Форма (2.1) ряда Фурье удобна с точки зрения простоты вычисления коэффициентов разложения a_k и b_k . Ряд Фурье можно записать иначе

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k), \quad (2.3)$$

$$\text{где } A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k},$$

$$\dot{A}_k = a_k - jb_k = A_k e^{j\varphi_k}.$$

Совокупность амплитуд A_k называют **амплитудным**, а совокупность фаз φ_k – **фазовым спектрами**. Их можно изображать графически (рис. 2.1). Амплитудный и фазовый спектры сигнала в совокупности однозначно определяют его форму (временную зависимость).

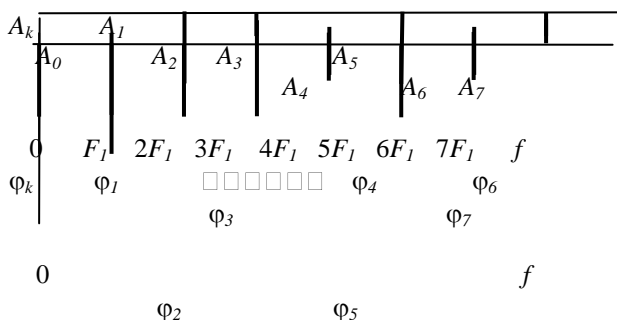


Рис. 2.1. Амплитудный и фазовый спектры

Наиболее компактной является запись ряда Фурье в комплексной форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \dot{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Комплексный спектр (2.4) можно интерпретировать как представление $x(t)$ в виде сумм спектральных составляющих $\dot{C}_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$, каждая из которых представляет собой пару гармонических колебаний с половинной амплитудой $\frac{\dot{A}_k}{2}$ на положительной ($+|k|\omega_1$) и отрицательной ($-|k|\omega_1$) частотах. Для вещественных функций $x(t)$

$A_k = A_{-k}$ – амплитудный спектр – чётная функция частоты,

$\varphi_k = -\varphi_{-k}$ – фазовый спектр – нечётная функция частоты.

Сопоставляя (2.2) и (2.4) с (2.1), нетрудно убедиться, что ряд Фурье является частным случаем обобщённого ряда Фурье при выборе в качестве базиса совокупности тригонометрических $\{\cos(k\omega_1 t), \sin(k\omega_1 t)\}$ или экспоненциальных $\{e^{jk\omega_1 t}\}$ функций.

Выводы

Математическим аппаратом спектрального анализа периодических сигналов являются ряды Фурье.

Спектры периодических сигналов дискретные (линейчатые), представляют собой совокупность амплитуд и фаз гармонических колебаний (составляющих) следующих по оси частот через интервалы $\Delta f = f_1 = 1/T$.

Ряд Фурье является частным случаем обобщённого ряда Фурье при использовании в качестве базиса

$$\left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kt\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kt\right) \right\} \text{ или } \left\{ e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt} \right\}.$$

Спектры Т-финитных сигналов

Т-финитными называют ограниченные по времени сигналы. По определению они не могут быть периодическими и, следовательно, к ним не применимо разложение в ряды Фурье.

Чтобы получить адекватное описание таких сигналов в частотной области используют следующий прием. На первом этапе от заданного сигнала $x(t)$, имеющего начало в точке t_1 и конец в точке t_2 переходят к сигналу $x_{\Pi}(t)$, являющемуся периодическим повторением $x(t)$ на бесконечной оси времени с периодом $T > \frac{1}{t_2 - t_1}$. Сигнал

$x_{\Pi}(t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$x_{\Pi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k T e^{jk\omega_1 t} \Delta f,$$

$$\text{где } \Delta f = \frac{1}{T} = F_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}.$$

Введём в рассмотрение текущую частоту $\omega_k = k\omega_1$ и спектральную плотность амплитуд

$$\dot{S}_k(f_k) = \frac{\dot{C}_k}{\Delta f} = \dot{C}_k T.$$

$$\text{Тогда } x_{\Pi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_k e^{j\omega_k t} \Delta f.$$

Исходный сигнал $x(t)$ можно получить из $x_{\Pi}(t)$ в результате предельного перехода $T \rightarrow \infty$. При этом

$$\begin{aligned} \Delta f &\rightarrow df, \quad \omega_k \rightarrow \omega = 2\pi f, \quad \Sigma \rightarrow \int, \\ \dot{S}_k &\rightarrow \dot{S}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \dot{C}_k = \lim_{T \rightarrow \infty} T \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_k t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \dot{C}_k = \dot{S}_k(f_k) \Delta f \rightarrow \dot{S}(f) df = d\dot{C}(f), \\ x_{\Pi}(t) &\rightarrow x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_{\Pi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) e^{j\omega t} df \end{aligned}$$

Таким образом, для описания спектра финитного сигнала приходим к известному в математике интегральному преобразованию Фурье:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(j2\pi f) e^{j2\pi f t} df \quad - \text{ прямое,} \\ S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad - \text{ обратное.} \end{aligned}$$

В данном случае (и в дальнейшем) комплексную функцию $\dot{S}(\omega)$ записали в виде $S(j\omega)$, как это принято в научно-технической литературе.

Из полученных соотношений следует, что спектр Т-финитного сигнала сплошной. Он представляет собой совокупность бесконечного числа спектральных составляющих с бесконечно малыми амплитудами $d\dot{C}(\omega)$, непрерывно следующих по оси частот. Вместо этих бесконечно малых амплитуд используют спектральную функцию (спектральную плотность амплитуд)

$$S(j\omega) = \frac{d\dot{C}(\omega)}{d\omega} = 2\pi \frac{d\dot{C}(2\pi f)}{df} = 2\pi S(jf) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где $S(\omega) = |S(j\omega)|$ – амплитудный спектр,

$\varphi(\omega) = \arg[S(j\omega)]$ – фазовый спектр.

Выводы

Математическим аппаратом спектрального анализа Т-финитных сигналов является интегральное преобразование Фурье.

Спектры Т-финитных сигналов сплошные и описываются непрерывными функциями частоты в виде модуля спектральной плотности амплитуд $S(\omega) = |S(j\omega)|$ (амплитудный спектр) и её аргумента $\varphi(\omega) = \arg[S(j\omega)]$ (фазовый спектр).

Свойства преобразования Фурье

1. Прямое и обратное преобразование Фурье являются **линейными операторами**, следовательно, действует принцип суперпозиции.

$$\text{Если } x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t), \text{ то}$$

$$S_x(j\omega) = \sum_{i=1}^n S_{x_i}(j\omega).$$

2. Прямое и обратное преобразование Фурье являются **взаимно однозначными**.

3. **Свойство запаздывания.**

Если $x(t) \rightarrow S_x(j\omega)$, то

$$\begin{aligned} x_\tau(t) = x(t - \tau) &\rightarrow S_{x_\tau}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(y) e^{-j\omega(y+\tau)} dy = S_x(j\omega) e^{-j\omega\tau} \end{aligned}$$

(в данном случае использованы подстановки: $t - \tau = y$, $t = y + \tau$, $dt = dy$).

4. **Спектральная функция δ -функции.**

Используя общее выражение спектральной функции и фильтрующее свойство δ -функции, получим

$$S_\delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

5. **Спектральная функция комплексного гармонического сигнала** $\dot{x}(t) = \dot{C} e^{j\omega_0 t}$.

$$S_{\dot{x}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{C} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \dot{C} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \quad (2.5)$$

$$\text{Используя одно из определений } \delta\text{-функции } \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} df$$

и выполняя в нём взаимную замену t и ω (или f), получим

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \text{ и } \delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} dt = 2\pi\delta(\omega).$$

Сопоставляя полученный результат с (2.5), имеем

$$S_{\dot{x}}(j\omega) = 2\pi\dot{C}\delta(\omega - \omega_0) = \dot{C}\delta(f - f_0) \quad (2.6)$$

6. **Скалярное произведение комплексных сигналов в спектральной области.** Пусть $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ – комплексные функции на интервале $(-T/2, T/2)$. Их скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\vec{\dot{x}}, \vec{\dot{y}}) &= \int_{-T/2}^{T/2} \dot{x}(t) \dot{y}^*(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) e^{j\omega t} df \cdot \dot{y}^*(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) df \int_{-T/2}^{T/2} \dot{y}^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) S_{\dot{y}}^*(j\omega) df. \end{aligned}$$

Из полученного результата для вещественных функций $x(t)$ вытекает **равенство Парсеваля** (обобщённая формула Рэлея)

$$(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) S_x^*(j\omega) df = \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 df = E_x,$$

где E_x – энергия сигнала $x(t)$,

а $W_x(\omega) = |S_x(j\omega)|^2$ – спектральная плотность энергии.

Для сигналов $x(t)$, заданных на бесконечной оси времени $(-\infty, +\infty)$, с $E_x \rightarrow \infty$, но имеющих ограниченную мощность P_x , вместо спектральной плотности энергии $W_x(\omega)$ можно использовать спектральную плотность мощности (энергетический спектр)

$$G_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} W_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_x(j\omega)|^2.$$

Тогда $P_x = (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}^*)_P = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} G_{x0}(\omega) d\omega$, т.к.

$G_x(\omega) = G_x(-\omega)$ и $W_x(\omega) = W_x(-\omega)$ – чётные функции, $G_{x0}(\omega) = 2G_x(\omega)$ – односторонняя спектральная плотность мощности (энергетический спектр).

7. **Скалярное произведение комплексных сигналов $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}_\tau(t) = \dot{y}(t - \tau)$ в спектральной области.**

$$(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}_\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) S_{\dot{y}_\tau}^*(j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) S_{\dot{y}}^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

При $\dot{x}(t) = x(t)$ и $\dot{y}_\tau(t) = x_\tau(t) = x(t - \tau)$

$$(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}_\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) S_x^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = B_{x,E}(\tau), (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}_\tau)_P = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = B_x(\tau) -$$

– корреляционная функция сигнала $x(t)$.

Из последнего выражения вытекают важные соотношения между корреляционной функцией и энергетическим спектром сигнала

$$B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

8. Спектр произведения сигналов $z(t) = ax(t)y(t)$.

$$S_z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\xi) e^{j\xi t} d\xi \right] y(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j(\omega - \xi)t} dt = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\xi) S_y[j(\omega - \xi)] d\xi = \frac{a}{2\pi} S_x(j\omega) \otimes S_y(j\omega),$$

$$S_x(j\omega) \otimes S_y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\xi) S_y[j(\omega - \xi)] d\xi - \text{свертка функций } S_x(j\omega) \text{ и } S_y(j\omega).$$

Таким образом, спектральная функция произведения двух сигналов является свёрткой их спектральных функций.

Справедливо также и обратное соотношение

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = 2\pi S_x(j\omega) S_y(j\omega).$$

9. Свойство смещения спектра.

Если $\dot{y}(t) = x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$, то $S_{\dot{y}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = S_x[j(\omega - \omega_0)]. \quad (2.7)$$

10. Ширина спектра.

Теоретически ширина спектра сигналов бесконечна. Однако, учитывая, что интенсивность спектральных составляющих реальных сигналов уменьшается с ростом их частоты (не обязательно монотонно), можно ввести понятие практической (конечной) ширины спектров (рис. 2.3 и 2.4). Практическую ширину спектра $\Delta\Omega$ можно определять как ширину частотного интервала, в пределах которого амплитудный спектр $S(\omega)$ не меньше некоторого условного уровня γ (например $\gamma = 0,1$) от $S(\omega)_{\max}$ или энергия (мощность) сигнала составляет определённую часть γ (например $\gamma = 0,9$) от полной

$$\frac{1}{2p} \int_{-DW}^{DW} |S_x(j\omega)|^2 d\omega = \frac{\gamma}{2p} \int_{-W}^{W} |S_x(j\omega)|^2 d\omega = \gamma E_x.$$

Для импульсов простых форм (прямоугольной, треугольной и т.п.), спектральная функция которых периодически принимает нулевые значения с ростом частоты (рис. 2.3 и 2.4), практическую ширину спектра часто определяют по первому или второму или иному «нулю» амплитудного спектра.

Независимо от способа определения практической ширины спектра Т-финитного сигнала выполняется общая закономерность – произведение практической ширины спектра на длительность сигнала Δt есть константа C , зависящая только от формы импульса

$$\Delta\Omega \cdot \Delta t = C.$$

Это соотношение имеет фундаментальное значение в теории связи. Из него вытекает, что чем короче сигнал, тем шире его спектр и, следовательно, тем более широкополосный канал требуется для его передачи.

2.4. Дискретизация и восстановление сигналов

Под дискретизацией сигналов (в узком смысле) понимают преобразование аналогового сигнала $x(t)$ в последовательность отсчётов его мгновенных значений, взятых через интервалы времени Δt (рис. 2.5)

$$x(t) \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

Δt – шаг дискретизации,

$$f_d = \frac{1}{\Delta t} \text{ – частота дискретизации.}$$

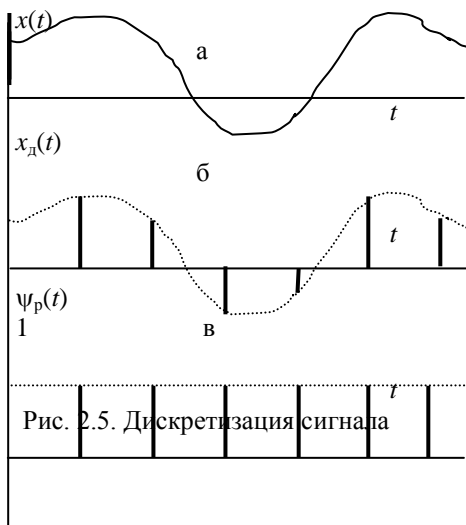


Рис. 2.5. Дискретизация сигнала

Для аналитического описания процесса дискретизации используем решётчатую функцию $\psi_p(t)$ (рис. 2.5, в) вида

$$\psi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(t - k\Delta t),$$

$$\text{где } \psi(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}.$$

Функция $\psi(t)$ связана с функцией $1(t)$ (единичного скачка) и δ -функцией следующим образом

$$\psi(t) = 1(t + dt) - 1(t) = d1(t) = \frac{d1(t)}{dt} dt = \delta(t) dt. \quad (2.8)$$

Введение функции $\psi_p(t)$ позволяет процесс дискретизации аналогового сигнала $x(t)$ выразить произведением вида (рис. 2.5, б) $x_d(t) = x(t)\psi_p(t)$.

Как и δ -функция $\psi_p(t)$ обладает фильтрующим свойством

$$x_d(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t).$$

Поскольку $\psi_p(t)$ периодическая функция с периодом Δt , то её можно представить рядом Фурье

$$\psi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_d t}, \text{ где}$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \psi(t) e^{-jk\omega_d t} dt = \frac{dt}{\Delta t} \text{ (фильтрующее свойство!)}$$

и, следовательно, $\psi_p(t) = \frac{dt}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_d t}$.

Учитывая свойство спектральной функции комплексного гармонического колебания (2.6) и выражение (2.8), имеем

$$S_{\psi_p}(j\omega) = 2\pi \frac{dt}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_d) = 2\pi \frac{dt}{\Delta t d\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_d) d\omega = 2\pi \frac{dt}{\Delta t d\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\omega - k\omega_d).$$

Исходя из очевидных соотношений $\frac{dt}{d\omega} = \frac{\Delta t}{\Delta\omega} = \frac{\Delta t}{\omega_d}$, получим

$$S_{\psi_p}(j\omega) = 2\pi \frac{\Delta t}{\Delta t \omega_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\omega - k\omega_d) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\omega - k\omega_d). \quad (2.9)$$

Окончательно

$$x_d(t) = x(t)\psi_p(t) = x(t) \frac{dt}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_d t} \quad (2.10)$$

и по свойству смещения спектра (2.7)

$$S_{x_d}(j\omega) = \frac{dt}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_x[j(\omega - k\omega_d)].$$

Из (2.10) вытекает, что процесс дискретизации сигналов можно реализовать на перемножителе (рис.2.6).

Дискретизация сигналов широко используется в системах связи. Она является необходимой операцией

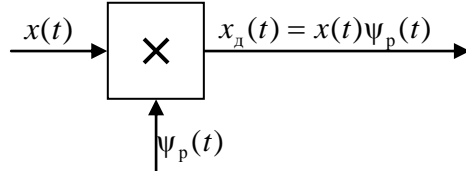


Рис. 2.6. Дискретизатор сигналов

при передаче аналоговых сигналов по цифровым каналам (для преобразования аналогового сигнала в цифровой поток его отсчётов) и в системах многоканальной передачи с временным уплотнением (для разделения заданного множества аналоговых сигналов во временной области). Во всех этих случаях важнейшими являются вопросы о выборе частоты дискретизации сигналов, способе их восстановления (обратного преобразования отсчётов в аналоговый сигнал) и степени искажений в процессе таких преобразований. Ответы на эти вопросы даёт теорема отсчётов (часто называемая именем Котельникова В.А. – автора одного из её доказательств в 1933 г.).

Теорема отсчётов

Любой F -финитный сигнал (сигнал с ограниченным частотой F_B спектром) точно определяется последовательностью своих отсчётов, взятых через интервалы $\Delta t \leq \frac{1}{2F_B}$.

Справедливость этого утверждения следует из рассмотрения спектров, приведённых на рис. 2.7. На рис. 2.7(а) изображён двусторонний спектр исходного аналогового сигнала $S_x(f)$, ограниченный частотой F_B . На рис. 2.7(б) – спектр решетчатой функции $S_{\psi_p}(f)$, построенный по выражению (2.9). На рис. 2.7 (в, г и д) представлены спектры дискретизированного сигнала $S_{x_d}(f)$ при разных соотношениях частот дискретизации f_d и F_B . Обратите внимание, что в результате дискретизации сигнала его спектр периодически повторяется по оси частот с периодом f_d .

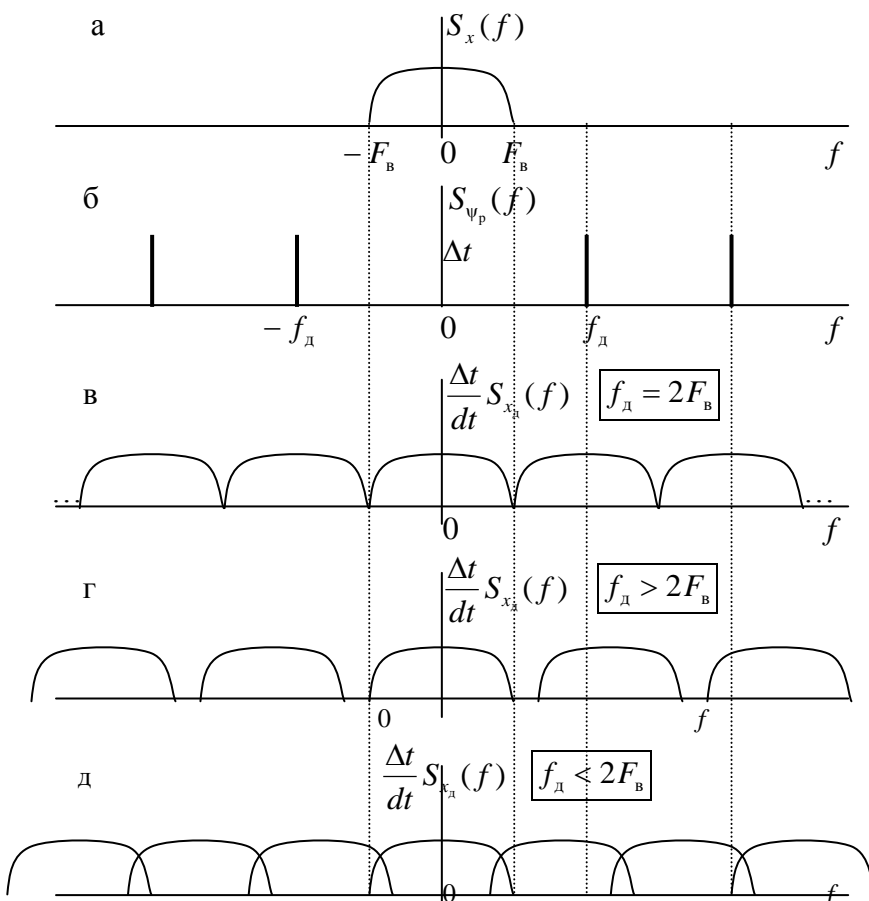


Рис. 2.7. Спектры сигналов в процессе дискретизации

повторяется по оси частот с периодом f_d .

Исходя из свойства взаимно однозначного соответствия временного и спектрального представлений сигнала, можно утверждать, что точное восстановление сигнала в аналоговой форме по его отсчётам возможно, если из спектров $S_{x_d}(f)$ (рис.2.7 (в, г и д)) можно получить спектр $S_x(f)$ (рис. 2.7 (а)). Очевидно, что это достижимо:

- 1) **фильтрацией** дискретизированного сигнала с помощью **идеального ФНЧ** с частотой верхнего среза F_B ,
- 2) только в случае $f_d \geq 2F_B$, когда **отсутствует наложение спектров**, такое, как показано на рис. 2.7 (д).
Таким образом, процедура восстановления сигнала по

отсчётам может быть осуществлена идеальным ФНЧ с передаточной функцией

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \leq \Omega_B \\ 0 & \omega > \Omega_B \end{cases}, \quad \Omega_B = 2\pi F_B$$

и, соответственно, с импульсной характеристикой

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_B}^{\Omega_B} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\Omega_B}{\pi} \frac{\sin \Omega_B t}{\Omega_B t}.$$

Поскольку импульсная характеристика цепи есть её реакция на воздействие в виде δ -функции $\delta(t) \rightarrow g(t)$, то легко определить реакцию идеального ФНЧ на дискретизированный сигнал $x_d(t)$

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \psi(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) dt \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) g(t - k\Delta t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\Omega_B}{\pi} \frac{\sin \Omega_B(t - k\Delta t)}{\Omega_B(t - k\Delta t)} dt. \end{aligned}$$

Выражение $x(t) = c \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \cdot \frac{\sin \Omega_B(t - k\Delta t)}{\Omega_B(t - k\Delta t)}$ известно в литературе как **ряд Котельникова** (с масштабным коэффициентом c) и представляет собой частный случай обобщенного ряда Фурье, где базисом является система функций $\left\{ \frac{\sin \Omega_B(t - k\Delta t)}{\Omega_B(t - k\Delta t)} \right\}$, а коэффициентами разложения служат отсчёты мгновенных значений сигнала $x(k\Delta t)$.

На практике абсолютно точное восстановление сигналов по их отсчётам невозможно по следующим причинам:

- 1) **Идеальный ФНЧ – физически нереализуемая цепь**, т.к. его импульсная характеристика отлична от 0 при $t < 0$. Характеристики реальных ФНЧ могут быть приближены к идеальным лишь с определенной погрешностью, тем меньшей, чем больше задержка.
- 2) **Реальные сигналы являются T-финитными**, а следовательно имеют неограниченный по частоте спектр. Если всё же спектр сигнала ограничить частотой F_B , то на интервале существования сигнала T число независимых отсчётов N , определяющих сигнал с заданной погрешностью, становится конечным

$$N = \frac{T}{\Delta t} + 1 = 2F_B T + 1 \cong 2F_B T,$$

где $2F_B T$ – база сигнала.

При осуществлении дискретизации сигнала, когда частота дискретизации f_d выбрана, необходимо использовать **антиэлайсинговый** ФНЧ с частотой верхнего среза $F_B = \frac{f_d}{2}$ для ограничения спектра сигнала и предотвращения тем самым искажений, вызванных перекрытием спектров (рис.2.4 (д)) (антиэлайсинговый – от слова «элайсинг», означающего наложение спектров).

2.5. Квазигармоническое представление сигналов

Во многих случаях сигнал $x(t)$ удобно записывать в **квазигармонической форме** в виде

$$x(t) = A(t) \cos \Psi(t) = A(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)],$$

где $A(t)$ – называют **оггибающей**,

$\Psi(t) = \omega_c t + \varphi(t)$ - **полной фазой**,

ω_c – **частотой** (выбираемой произвольно),

$\varphi(t)$ – **начальной фазой** сигнала.

Для определения $A(t)$ и $\Psi(t)$ введём в рассмотрение комплексный сигнал $\dot{x}(t)$, получаемый из действительного сигнала $x(t)$ следующим образом:

$$\dot{x}(t) = x(t) + jx'(t) = A(t)e^{j\Psi(t)} = A(t) \cos \Psi(t) + jA(t) \sin \Psi(t),$$

$x'(t)$ – называют сопряжённым сигналом (связанным некоторым образом с $x(t)$). Тогда

$$\boxed{A(t) = \sqrt{x^2(t) + x'^2(t)}}, \quad \boxed{\Psi(t) = \arctg \frac{x'(t)}{x(t)}}.$$

Поскольку сопряженный $x'(t)$ сигнал можно связать с исходным $x(t)$ разными способами, то задача вычисления огибающей и полной фазы оказывается неоднозначной.

По ряду причин, часть из которых станет понятной из дальнейшего, в качестве сопряжённого удобно выбрать преобразованный по Гильберту исходный сигнал

$$x'(t) = \tilde{x}(t) = H[x(t)].$$

Комплексный сигнал вида $\dot{x}(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$ называют **аналитическим сигналом**.

Преобразование Гильберта $H[x(t)]$ в спектральной области сводится к сдвигу фаз всех спектральных составляющих сигнала $x(t)$ на угол $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ в области положительных ($\omega > 0$) и на $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в области отрицательных ($\omega < 0$) частот.

С точки зрения схемотехники преобразователь Гильберта – это фазовращатель (рис. 2.9) с передаточной функцией

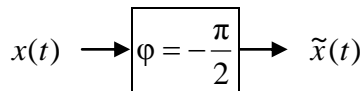


Рис. 2.9. Преобразователь Гильберта

$$H_H(j\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases}$$

или $\boxed{H_H(j\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega)}$,

где $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ – знаковая функция.

Найдём импульсную характеристику преобразователя

Гильберта

$$\begin{aligned} g_H(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sign}(\omega)] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sign}(\omega)] \cos \omega t d\omega}_0 + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sign}(\omega)] \sin \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Первый интеграл в полученном выражении равен 0 в силу интегрирования нечетной функции при симметричных пределах, а второй сводится к табличному интегралу вида

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin mx \cdot dx = \frac{m}{\alpha^2 + m^2} \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0.$$

Окончательно получаем

$$g_H(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \omega} \sin \omega t d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{t}{\pi(t^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{\pi t}.$$

Из полученного результата с очевидностью вытекает невозможность физической реализации преобразования Гильберта, т.к. $g_H(t) \neq 0$ при $t < 0$. Тем не менее, реально преобразование Гильберта осуществляют приближённо, допуская временную задержку, тем большую, чем выше требования к точности преобразования.

Рассмотрим преобразование Гильберта во временной области. Из рис. 2.9 вытекает

$$\tilde{x}(t) = x(t) \otimes g_H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau.$$

$$\boxed{\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau} \quad \text{– прямое преобразование Гильберта.}$$

Поскольку

$$S_{\tilde{x}}(j\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega) S_x(j\omega),$$

то, после умножения обеих частей равенства на $j \operatorname{sign}(\omega)$, получим

$$j \operatorname{sign}(\omega) S_{\tilde{x}}(j\omega) = \operatorname{sign}^2(\omega) S_x(j\omega) = S_x(j\omega),$$

откуда следует, что передаточная функция обратного преобразования Гильберта $H^{-1}[x(t)]$ отличается от передаточной функции прямого только знаком

$$H_{H^{-1}}(j\omega) = j\text{sign}(\omega) = -H_H(j\omega).$$

Соответственно

$$x(t) = H^{-1}[\tilde{x}(t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau$$

– обратное преобразование Гильберта.

Представление действительного сигнала $x(t)$ через его квадратурные компоненты

Любой действительный сигнал $x(t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}[\dot{x}(t)] = \text{Re}[A(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_c t}] = \text{Re}\{A(t)[\cos\varphi(t) + j\sin\varphi(t)](\cos\omega_c t + j\sin\omega_c t)\} = \\ &= \underbrace{A(t)\cos\varphi(t)}_{A_c(t)}\cos\omega_c t - \underbrace{A(t)\sin\varphi(t)}_{A_s(t)}\sin\omega_c t. \end{aligned}$$

$$x(t) = A_c(t)\cos\omega_c t - A_s(t)\sin\omega_c t$$

где $A_c(t) = A(t) \cdot \cos\varphi(t)$ – косинусная,

$A_s(t) = A(t) \cdot \sin\varphi(t)$ – синусная

квадратурные компоненты сигнала $x(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= A(t)e^{j\varphi(t)} = A(t)\cos\varphi(t) + jA(t)\sin\varphi(t) = \\ &= A_c(t) + jA_s(t) \text{ – комплексная огибающая.} \end{aligned}$$

Представление $x(t)$ через квадратурные компоненты особенно полезно для узкополосных сигналов, у которых они оказываются медленно меняющимися функциями по сравнению с $\cos\omega_c t$ (при выборе ω_c внутри спектра сигнала $x(t)$). Формально условие узкополосности сигнала «в расширенном смысле» можно записать следующим образом

$$F_B < f_c, \text{ где } F_B \text{ – верхняя частота в спектре } A_c(t) \text{ и } A_s(t).$$

Обработку узкополосных сигналов можно выполнить проще и точнее через обработку их квадратурных компонентов. Действительно, если выполняется условие узкополосности сигнала, то спектр комплексного сигнала вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{A}(t)e^{j\omega_c t} = [A_c(t) + jA_s(t)] \cdot (\cos\omega_c t + j\sin\omega_c t) = \\ &= \underbrace{A_c(t)\cos\omega_c t - A_s(t)\sin\omega_c t}_{x(t)} + j \underbrace{[A_c(t)\sin\omega_c t + A_s(t)\cos\omega_c t]}_{\tilde{x}(t)}, \end{aligned}$$

получаемого сдвигом спектра огибающей $\dot{A}(t)$ вверх на ω_c полностью располагается в области положительных частот, следовательно этот сигнал – аналитический и его мнимая часть является преобразованием Гильберта действительной части

$$x(t) = A_c\cos\omega_c t - A_s\sin\omega_c t$$

$$\tilde{x}(t) = A_c\sin\omega_c t + A_s\cos\omega_c t = A_c H[\cos\omega_c t] - A_s H[\sin\omega_c t].$$

Таким образом, можно считать, что преобразование Гильберта узкополосного сигнала сводится к сдвигу фаз на угол -90° гармонических колебаний $\cos\omega_c t$ и $\sin\omega_c t$ и не затрагивает его квадратурных компонентов.

На рис 2.10 приведена векторная диаграмма аналитического сигнала. Она представляет собой комплексную плоскость с вращающимся и меняющим свою длину вектором $\dot{A}(t)$.

Угловая скорость его вращения изменяется во времени по закону

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

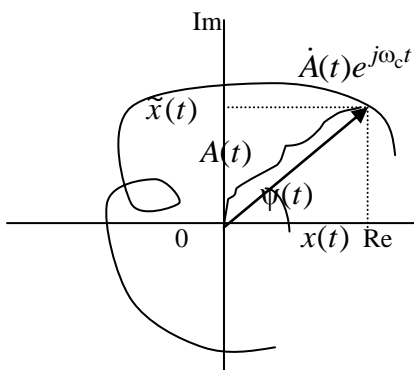


Рис. 2.10. Векторная диаграмма $\dot{x}(t)$

3. Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи

К анализу и синтезу функциональных узлов (ФУ) систем связи можно подходить с позиций «чёрного ящика», имеющего один или несколько входов и выход (рис. 3.1). Входные сигналы ФУ называют воздействиями, а выходной – реакцией ФУ на воздействия.

Связь между воздействием $x(t)$ и реакцией $y(t)$, в общем случае, описывается некоторым оператором A

$$y(t) = A[x(t)],$$

который однозначно определяет сам ФУ и который будем называть его функциональной характеристикой. По виду этого оператора производят классификацию ФУ на линейные, параметрические и нелинейные.

В теории цепей приходится решать задачи анализа и синтеза ФУ в зависимости от цели и исходных условий.

В задаче **анализа** известными считают воздействие $x(t)$ и ФУ (оператор A), а объектом расчёта – реакцию ФУ $y(t)$

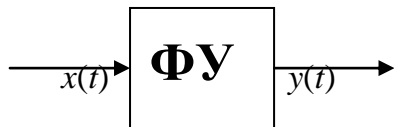


Рис. 3.1. Функциональный узел

В задаче **синтеза** в качестве заданных рассматриваются воздействие $x(t)$ и реакция $y(t)$, а объект расчёта – ФУ.

Широко используется и смешанный (эвристический) подход, при котором, как и в задаче синтеза, заданными являются воздействие $x(t)$ и реакция $y(t)$, но сам ФУ находят не в результате расчёта, а выбирают (изобретают), исходя из физических предпосылок и интуиции, а затем в результате его анализа определяют степень соответствия полученной и заданной реакций. В дальнейшем, при рассмотрении конкретных ФУ будем использовать все эти методы.

3.1. Особенности преобразования сигналов в линейных, параметрических и нелинейных ФУ

Линейные преобразования сигналов и ФУ

Линейные ФУ по определению описываются линейными дифференциальными уравнениями (в том числе нулевого порядка для резистивных цепей) с постоянными коэффициентами. С точки зрения схемотехники это значит, что все элементы ФУ (R , C , L) имеют постоянные параметры. Оператором преобразования воздействия $x(t)$ в реакцию $y(t)$ для них может служить одна из форм интеграла наложения (Дюамеля) во временной области

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau,$$

или передаточная функция $H(j\omega)$ ФУ в частотной области

$$S_y(j\omega) = S_x(j\omega) \cdot H(j\omega),$$

а в качестве функциональной характеристики линейного ФУ можно использовать его импульсную характеристику $g(t)$ или передаточную функцию $H(j\omega)$.

Простым колебанием для линейных цепей является гармоническое $U \cos(\omega t + \varphi)$. Его форма не изменяется при прохождении через любую линейную цепь. В линейных цепях действует принцип суперпозиции – реакция цепи на сумму воздействий есть сумма её реакций на каждое из воздействий в отдельности. Из этих свойств вытекают следующие **выводы**:

1. Форма сложного сигнала (с полигармоническим или сплошным спектром) при его прохождении через линейную цепь может изменяться только вследствие изменения соотношения между амплитудами и фазами спектральных составляющих воздействия. Принципиально важно, что **в реакции линейного ФУ не могут возникнуть спектральные компоненты, отсутствующие в спектре воздействия**.

2. Из вывода 1 вытекают возможности построения на основе линейных цепей ограниченного класса типовых ФУ:

а) **усилителей и аттенюаторов** (ФУ для изменения мощности сигналов без искажения их формы), передаточная функция которых в полосе частот, занимаемой спектром воздействия, имеет вид

$$H(j\omega) = H_0 e^{-j\omega\tau_0}, \quad \text{где } H_0 \text{ и } \tau_0 \text{ – константы;}$$

б) **фильтров разных типов** (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ, интеграторов, дифференциаторов, фазовращателей и т.п.), передаточная функция которых в полосе частот, занимаемой спектром воздействия, имеет вид

$$H(j\omega) = H(\omega) e^{-j\varphi(\omega)},$$

где $H(\omega)$ (АЧХ) и $\varphi(\omega)$ (ФЧХ) – заданные функции частоты.

Параметрические преобразования сигналов и ФУ

По определению параметрические ФУ описываются линейными дифференциальными уравнениями (в том числе нулевого порядка для резистивных цепей), у которых есть коэффициенты, зависящие от независимой переменной (времени).

Схематически это означает, что параметрический ФУ содержит хотя бы один элемент, параметр(ы) которого зависит от времени. В подавляющем большинстве случаев параметрические ФУ строятся на использовании перемножителя сигналов (рис. 3.2). Действительно, если генератор колебания $z(t)$ рассматривать как внутренний элемент ФУ («чёрного ящика»), то $y(t) = az(t) \cdot x(t)$ можно записать в виде

$$y(t) = k(t) \cdot x(t),$$

где $k(t) = az(t)$ (коэффициент передачи параметрического звена) может служить его функциональной характеристикой.

Рассмотрим реакцию параметрического звена (рис. 3.1) при $k(t) = K \cos \Omega t$ на воздействие вида $x(t) = X \cos \omega_c t$.

$$\begin{aligned} y(t) &= k(t) \cdot x(t) = K \cos \Omega t \cdot X \cos \omega_c t = \\ &= \frac{1}{2} KX \cos(\omega_c + \Omega)t + \frac{1}{2} KX \cos(\omega_c - \Omega)t. \end{aligned}$$

Спектры воздействия и реакции приведены на рис. 3.3. Из их рассмотрения можно сделать следующие **выводы**:

1. Параметрические ФУ **обогащают спектр воздействия** новыми спектральными составляющими.
2. Частоты новых спектральных составляющих в реакции параметрических ФУ определяются **частотами спектральных составляющих воздействия и частотами изменения параметров ФУ**.

Нелинейные преобразования сигналов и ФУ

Нелинейные преобразователи сигналов описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (в том числе нулевого порядка для резистивных цепей), у которых хотя бы один коэффициент зависит от их решения (искомой функции). Соответственно, их схема содержит хотя бы один

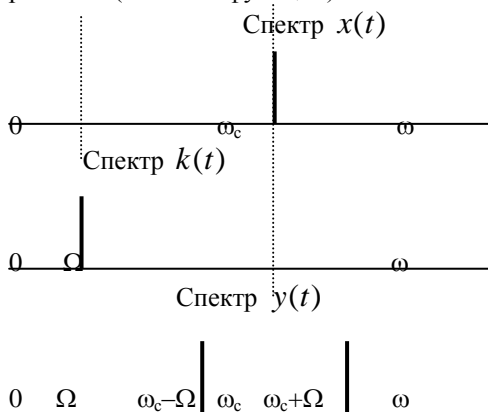


Рис.3.3. Спектры $x(t)$, $k(t)$ и $y(t)$

нелинейный элемент, параметр(ы) которого зависит от протекающего тока или приложенного напряжения.

Анализ нелинейных ФУ в общем случае является сложной задачей, которая существенно упрощается, если возможно разделить ФУ на две независимые части, сосредоточив всю нелинейность в безынерционном нелинейном преобразователе (БНП) а всю инерционность – в линейном (ЛП), как это показано на рис. 3.4. Назовём такую структуру обобщённым нелинейным преобразователем (ОНП). Для анализа ОНП достаточно по известной функциональной характеристике БНП $z = f(x)$ (для безынерционной цепи это обычная функция, а не оператор) определить его реакцию $z(t) = f[x(t)]$ на заданное воздействие $x(t)$, а затем проанализировать прохождение $z(t)$ через ЛП одним из вышеуказанных методов.

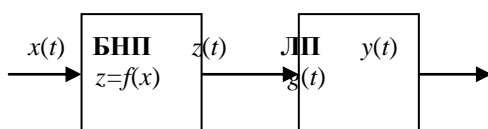


Рис. 3.4. Обобщённый НП

Рассмотрим возможности изменения спектра сигнала при его прохождении через БНП – цепь 0-го порядка. Для таких цепей в теории широко используют два основных метода спектрального анализа реакции в зависимости от вида аппроксимации функциональной характеристики БНП:

- 1) метод кратных дуг – при полиномиальной аппроксимации

$$z = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

- 2) метод угла отсечки (коэффициентов Берга) – при кусочно-

линейной аппроксимации.

Чтобы воспользоваться первым методом, достаточно помнить тригонометрическую формулу

$$\cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t = \frac{1}{2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \frac{1}{2} \cos(\omega_1 + \omega_2)t$$

и её частный случай (при $\omega_1 = \omega_2 = \omega$)

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t.$$

Результаты анализа спектрального состава реакции БНП с полиномиальной функциональной характеристикой при моно- и бигармоническом воздействии приведены в таблице 3.1. В ней указаны только частоты спектральных составляющих реакции.

Из этой таблицы следует, что БНП обогащает спектр воздействия постоянной составляющей, кратными гармониками и колебаниями комбинационных частот вида $l\omega_1 + m\omega_2$, где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, причём **порядок комбинационных частот** $p = |l| + |m| \leq n$ (не превосходит степени n полинома, аппроксимирующего функциональную характеристику БНП). Этот вывод можно распространить и на случай полигармонического воздействия.

Таблица 3.1

$z =$	Спектральный состав $z(t)$ при	
	$x(t) = X \cos \omega_0 t$	$x(t) = X_1 \cos \omega_1 t + X_2 \cos \omega_2 t$
$a_0 +$	0	0
$+ a_1 x$	ω_0	ω_1, ω_2
$+ a_2 x^2$	0, $2\omega_0$	0, $2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2$
$+ a_3 x^3$	$\omega_0, 3\omega_0$	$\omega_1, \omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, 2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega_1$
$+ \dots$		
$+ a_k x^k$	0, $2\omega_0, 4\omega_0, \dots, k\omega_0$ при $k = 2q$, $\omega_0, 3\omega_0, \dots, k\omega_0$ при $k = 2q+1$, $q = 1, 2, 3, \dots$	$l\omega_1 + m\omega_2; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$, $p = l + m = 2q \leq k$ при $k = 2q$, $p = l + m = 2q + 1 \leq k$ при $k = 2q + 1, q = 1, 2, 3, \dots$
$+ \dots$		
$+ a_n x^n$	0, $2\omega_0, 4\omega_0, \dots, n\omega_0$ при $n = 2q$, $\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0$ при $n = 2q+1$, $q = 1, 2, 3, \dots$	$l\omega_1 + m\omega_2; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, $p = l + m = 2q \leq n$ при $n = 2q$, $p = l + m = 2q + 1 \leq n$ при $n = 2q + 1, q = 1, 2, 3, \dots$

3.2. Перемножение сигналов

В качестве первого типового ФУ рассмотрим перемножитель сигналов, тем более, что он используется в параметрическом звене (рис. 3.1). По определению перемножителем является ФУ с двумя входами, выходной сигнал которого пропорционален произведению входных сигналов (рис.3.9). Поскольку операция перемножения не является линейной, то схемотехническое решение перемножителя следует искать в классе нелинейных цепей.

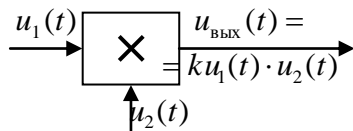


Рис. 3.9. Перемножитель

1) все диоды имеют квадратичные вольтамперные характеристики (режим слабого сигнала)

$$i = a_0 + a_1 u_{д} + a_2 u_{д}^2$$

с одинаковыми коэффициентами a_0, a_1, a_2 ,

2) сопротивления нагрузочных резисторов R

Проанализируем схему кольцевого (мостового) перемножителя (рис. 3.10), в которой в качестве нелинейных элементов используются диоды. Предварительно сделаем следующие допущения:

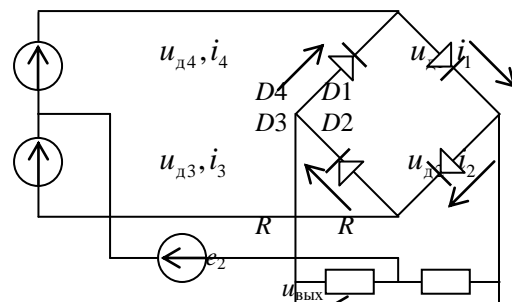


Рис. 3.10. Кольцевой диодный перемножитель сигналов

одинаковы (симметрия схемы),

3) один из входных сигналов поступает от двух идентичных источников (e_1) (симметрия схемы).

Выходное напряжение $u_{\text{вых}}$

$$u_{\text{вых}} = R(i_1 - i_2 - i_3 + i_4).$$

Для определения токов диодов подставим в выражение их вольтамперной характеристики соответствующие напряжения u_d , определяя последние через входные сигналы e_1 и e_2 . Падением напряжения на нагрузке при этом будем пренебрегать. Произведём алгебраическое суммирование токов:

$$\begin{aligned} + i_1 &= a_0 + a_1(e_1 + e_2) + a_2(e_1 + e_2)^2 \\ - i_2 &= -a_0 - a_1(e_1 - e_2) - a_2(e_1 - e_2)^2 \\ - i_3 &= -a_0 - a_1(-e_1 + e_2) - a_2(-e_1 + e_2)^2 \\ + i_4 &= a_0 + a_1(-e_1 - e_2) + a_2(-e_1 - e_2)^2 \\ \hline u_{\text{вых}} &= R(0 + 0 + 0 + 8a_2e_1 \cdot e_2) = 8Ra_2e_1 \cdot e_2. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что $u_{\text{вых}}$ является «чистым» произведением e_1 и e_2 , хотя в составе тока любого диода много посторонних слагаемых. Объясняется это тем, что при сложении токов диода в реакции ФУ их полезные составляющие (пропорциональные произведению e_1 и e_2) оказались синфазными, а все посторонние – противофазными. В результате первые сложились арифметически, а вторые компенсировались. Такой способ очистки реакции нелинейного преобразователя от побочных продуктов преобразования называют **методом фазовой компенсации** и широко используют в схемотехнике.

Выводы

1. ФУ (рис. 3.10) является «чистым» перемножителем произвольных сигналов $e_1(t)$ и $e_2(t)$ (в рамках выше сделанных допущений о режиме слабого сигнала, симметрии схемы, идентичности характеристик диодов).

2. «Чистота» операции перемножения достигнута методом фазовой компенсации.

3. Суть метода фазовой компенсации заключается в следующем:

- ФУ строится по симметричной многоканальной схеме,
- выходные реакции каналов суммируются,
- на входы каналов сигналы подают с таким подбором фаз, чтобы при сложении реакций каналов полезные составляющие оказались бы синфазными и суммировались, а побочные были бы противофазными и взаимно компенсировались.

3.3. Амплитудная модуляция

Модуляция в системах связи используется тогда, когда непосредственная передача первичного сигнала по линии связи оказывается невозможной. Согласование передаваемого сигнала с характеристиками линии связи достигается использованием колебания, которое хорошо распространяется в имеющейся линии связи. Один или несколько параметров этого колебания связывают с первичным сигналом. Такое колебание называют **переносчиком**, процесс изменения его параметра(ов) – **модуляцией**, первичный сигнал – **модулирующим**, а получаемый вторичный сигнал – **модулированным**.

В качестве переносчика широко применяют гармоническое **несущее** колебание $A \cos(\omega t + \varphi)$, обладающее тремя параметрами: амплитудой A , частотой ω и начальной фазой φ . Соответственно возможны три простых вида модуляции: амплитудная, частотная и фазовая. При амплитудной модуляции первичный сигнал $u_{\text{мод}}(t)$ отображают в амплитуде (**оггибающей**) A несущего колебания следующим образом

$$u_{\text{AM}}(t) = \underbrace{K_{\text{AM}}[U_0 + u_{\text{мод}}(t)]}_{A(t)} \cos \omega_{\text{н}} t. \quad (3.1)$$

Добавление к модулирующему сигналу $u_{\text{мод}}(t)$ постоянной составляющей U_0 необходимо, чтобы сделать эту сумму унipoлярной, т.к. оггибающая $A(t) \geq 0$ по определению. Разумеется, если модулирующий сигнал сам по себе является унipoлярным, например, сигнал изображения в телевидении, то никакой добавки не требуется ($U_0 = 0$).

Спектры АМ сигналов

1. Спектр простого АМ сигнала.

Модулированный сигнал называют простым, если в качестве модулирующего сигнала $u_{\text{мод}}(t)$ использовано гармоническое колебание. Таким образом, простой АМ сигнал имеет вид $u_{\text{АМ}}(t) = K_{\text{АМ}}(U_0 + U_{\text{мод}} \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t =$

$$= K_{\text{АМ}} U_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t = U_{\text{н}} (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t, \quad (3.2)$$

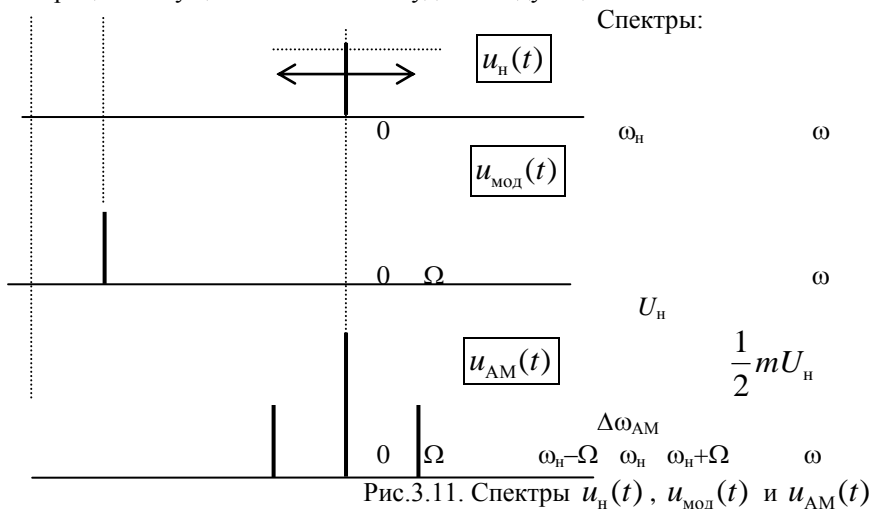
где $U_{\text{н}}$ – амплитуда несущего колебания,

m – коэффициент (глубина) модуляции, $0 \leq m \leq 1$.

Для получения спектра сигнала простого АМ сигнала достаточно в выражении (3.2) раскрыть скобки

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_{\text{н}} (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t = U_{\text{н}} \cos \omega_{\text{н}} t + \frac{1}{2} m U_{\text{н}} \cos(\omega_{\text{н}} - \Omega) t + \frac{1}{2} m U_{\text{н}} \cos(\omega_{\text{н}} + \Omega) t.$$

Таким образом, спектр простого АМ сигнала содержит несущее и два боковых колебания (рис.3.11). Нетрудно видеть, что его ширина $\Delta \omega_{\text{АМ}} = 2\Omega$ или $\Delta f_{\text{АМ}} = 2F_{\text{мод}}$, где $F_{\text{мод}}$ – частота модулирующего сигнала. Обратите внимание на то, что амплитуда несущего колебания не зависит от модулирующего сигнала в отличие от амплитуд боковых колебаний. Это говорит о том, что информации о модулирующем сигнале в несущем колебании не содержится. Она содержится исключительно в боковых колебаниях, которые возникают в процессе осуществления амплитудной модуляции.



2. Спектр сложного АМ сигнала

На основе выражения (3.2) спектр сложного АМ сигнала при полигармоническом модулирующем сигнале можно записать в виде

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_{\text{н}} (1 + m_1 \cos \Omega_1 t + m_2 \cos \Omega_2 t + \dots) \cos \omega_{\text{н}} t, \quad (3.3)$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ – частоты модулирующего сигнала,

m_1, m_2, \dots – парциальные коэффициенты модуляции.

В случае T -финитного модулирующего сигнала соответствующий АМ сигнал выглядит следующим образом

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_{\text{н}} \underbrace{[1 + k_{\text{АМ}} u_{\text{мод}}(t)]}_{A(t)} \cos \omega_{\text{н}} t,$$

где $k_{\text{АМ}}$ – нормирующий коэффициент, обеспечивающий условие $A(t) \geq 0$.

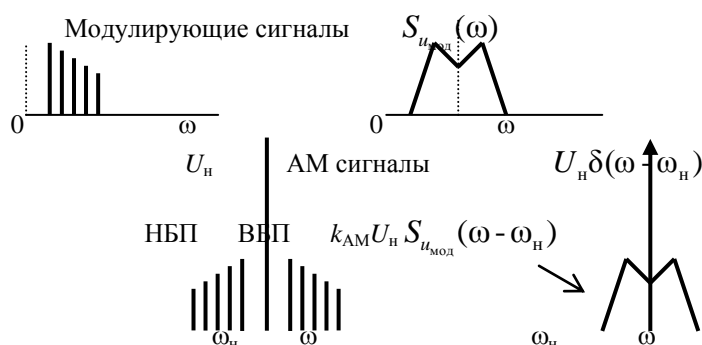
Для нахождения его спектральной функции перейдём к комплексному сигналу

$$\dot{u}_{\text{АМ}}(t) = U_{\text{н}} \underbrace{[1 + k_{\text{АМ}} u_{\text{мод}}(t)]}_{A(t)} e^{j\omega_{\text{н}} t} = U_{\text{н}} e^{j\omega_{\text{н}} t} + U_{\text{н}} k_{\text{АМ}} u_{\text{мод}}(t) e^{j\omega_{\text{н}} t}.$$

Используя свойства преобразования Фурье (2.6) и (2.7), получим

$$S_{\dot{u}_{\text{АМ}}}(j\omega) = U_{\text{н}} \delta[j(\omega - \omega_{\text{н}})] + k_{\text{АМ}} U_{\text{н}} S_{u_{\text{мод}}}[j(\omega - \omega_{\text{н}})]. \quad (3.4)$$

Спектры сигналов (3.3) и (3.4) приведены на рис.3.12.



Выводы

1. Спектр АМ сигнала содержит:

- а) несущее колебание на частоте $\omega_{\text{н}}$,
- б) верхнюю боковую полосу (ВБП), представляющую собой спектр модулирующего сигнала $u_{\text{мод}}(t)$, смещённый по оси частот вверх на $\omega_{\text{н}}$,

в) **нижнюю боковую полосу (НБП)**, являющуюся «зеркальным отражением» ВБП относительно ω_n .

2. **Ширина спектра АМ сигнала вдвое больше максимальной модулирующей частоты** $\Delta\omega_{AM} = 2\Omega_{max}$

Энергетика АМ сигналов

Определим **мощность простого АМ сигнала**, понимая под ней среднее за период несущего колебания значение квадрата сигнала (3.2)

$$P_{AM}(t) = \frac{1}{2}U_n^2(1 + m \cos\Omega t)^2 = P_n(1 + m \cos\Omega t)^2,$$

где P_n – **мощность несущего колебания**.

Максимальная (пиковая) мощность, на которую рассчитывают усилители АМ сигналов,

$$P_{AMmax} = P_n(1 + m)^2 \leq 4P_n,$$

до 4 раз превышает мощность P_n .

Средняя мощность АМ сигнала за период модулирующего сигнала (потребляемая от источников питания модулятора или усилителя АМ сигнала)

$$P_{AM} = P_n\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) = P_n + P_{бок},$$

где $P_{бок} = \frac{m^2}{2}P_n$ – **мощность боковых колебаний**.

Из полученных результатов можно сделать вывод о низкой энергетической эффективности амплитудной модуляции, так как полезная (в информационном смысле) мощность боковых колебаний $P_{бок}$ не превышает половины от мощности несущего колебаний P_n и трети от средней мощности P_{AM} .

Векторная диаграмма простого АМ сигнала

Из общего выражения АМ сигнала (3.1) видно, что его векторная диаграмма, т.е. изображение комплексной огибающей $\dot{A}(t)$ на комплексной плоскости, представляет собой вектор, длина которого меняется во времени, а начальная фаза остаётся неизменной. На рис.3.13 приведена векторная диаграмма простого АМ колебаний, на которой вектор огибающей представлен в виде суммы векторов всех трёх его спектральных составляющих. Для удовлетворения вышеуказанным требованиям векторы боковых колебаний должны располагаться симметрично вектору несущего колебания и вращаться в противоположных направлениях с угловыми скоростями $\pm\Omega$.

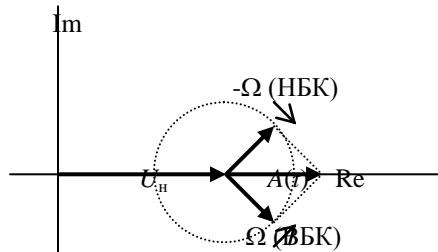


Рис.3.13. Векторная диаграмма простого АМ сигнала

Построение амплитудных модуляторов

Амплитудный модулятор является типовым ФУ с двумя входами (для модулирующего сигнала и несущего колебания), на выходе которого получается АМ сигнал (рис. 3.14).

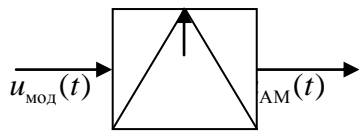


Рис. 3.14. Амплитудный модулятор

воспользуемся структурой обобщённого нелинейного преобразователя (рис. 3.4). В качестве БНП используем полевой транзистор, а в качестве ЛП –

Поскольку в спектре АМ сигнала должны быть новые спектральные компоненты (боковые полосы), которых нет во входных сигналах, что схематическое решение амплитудного модулятора следует искать в классе параметрических или нелинейных цепей.

Параметрическая реализация амплитудного модулятора непосредственно вытекает из выражения АМ сигнала (3.1), если его рассматривать как алгоритм обработки модулирующего и несущего сигналов (рис.3.15).

Для построения **амплитудного модулятора на нелинейной основе**

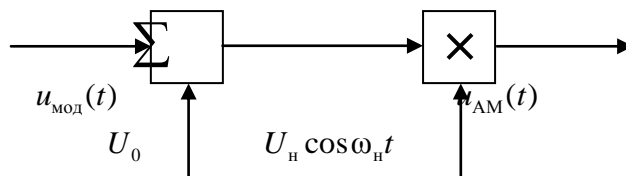


Рис. 3.15. Параметрический амплитудный модулятор

простейший полосовой фильтр – колебательный LC контур. В результате получим схему, изображённую на рис. 3.16. В ней генераторы e_1 и e_2 служат источниками несущего и модулирующего сигналов, источник напряжения смещения $E_{см}$ позволяет устанавливать оптимальный режим работы модулятора.

Выходной ток i транзистора VT , который должен работать в нелинейном режиме, обогащается новыми спектральными компонентами, среди которых кроме полезных (боковых – комбинационных колебаний суммарной и разностной частот e_1 и e_2) много побочных (помех). Последние устраняются из спектра выходного напряжения $u_{вых}$ благодаря избирательной нагрузке – LC контуру, настроенному на несущую частоту $\omega_0 = \omega_n$. Полоса пропускания контура $2\Delta\omega^* = \frac{\omega_0}{Q}$ выбирается из компромиссных соображений. С

одной стороны, необходимо обеспечить неравенство $2\Delta\omega^* > \Delta\omega_{AM}$ во избежание заметных линейных искажений огибающей спектра боковых полос при преобразовании тока i в выходное напряжение $u_{вых}$. С другой стороны, чем меньше $2\Delta\omega^*$, тем больше степень подавления спектра модулирующего сигнала и побочных продуктов нелинейного преобразования (модулированных гармоник несущей частоты). Оба этих требования легко обеспечить, если $\omega_n \gg \Omega_{макс}$, что обычно выполняется на практике.

Для определения оптимального режима модулятора пользуются статической модуляционной характеристикой (СМХ)

$$I_1 = f(E_{см}) \text{ при } E_1 = \text{const}, e_2 = 0,$$

где I_1 – амплитуда первой гармоники тока частоты ω_n ,

E_1 – амплитуда несущего колебания на входе модулятора.

СМХ можно рассчитать или снять экспериментально. Типичный вид СМХ при модуляции смещением приведён на рис. 3.17. Для предотвращения заметных нелинейных искажений огибающей АМ сигнала необходимо выбирать достаточно линейный участок СМХ в качестве рабочего, а рабочую точку ($E_{см.опт.}$) располагать в его середине. Из рисунка видно, что чем больше рабочий участок, тем более глубокая получается модуляция, но и тем больше нелинейные искажения. По СМХ легко определить параметры оптимального режима модулятора:

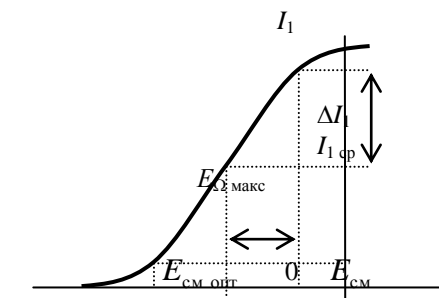


Рис. 3.17. СМХ модулятора

- оптимальное напряжение смещения $E_{см.опт.}$,
- максимальную амплитуду модулирующего сигнала $E_{\Omega_{макс}}$,
- среднюю амплитуду первой гармоники тока I_{1cp} ,
- максимальное изменение амплитуды первой гармоники тока ΔI_1 ,
- оптимальный коэффициент модуляции $m = \frac{\Delta I_1}{I_{1cp}}$.

3.4. Другие виды линейной модуляции (БМ, ОМ, КАМ)

Амплитудная модуляция относится к линейным видам модуляции вследствие линейной зависимости модулированного сигнала от модулирующего (3.1). Выше отмечалась её низкая энергетическая эффективность. Первое очевидное решение для преодоления этого недостатка заключается в исключении из спектра АМ сигнала несущего колебания. В результате приходим к **двухполосной передаче** с подавленной несущей. Получение такого двухполосного сигнала весьма просто – достаточно из модулирующего сигнала исключить постоянную составляющую (если она есть), используя, например, разделительный конденсатор C_p и умножить его на несущее колебание (рис. 3.18).

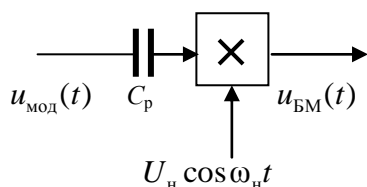


Рис. 3.18. Балансный модулятор

$$u_{БМ}(t) = k_{БМ} u_{мод}(t) \cdot \cos \omega_n t. \quad (3.5)$$

Такой модулятор (перемножитель), строят обычно по балансной схеме (рис. 3.10) и называют балансным, а двухполосный сигнал – **БМ сигналом**. Существенно то, что огибающая БМ сигнала не повторяет форму модулирующего колебания, как в случае АМ, а воспроизводит его модуль

$$A_{БМ}(t) = k_{БМ} \cdot |u_{мод}(t)|,$$

причём в моменты смен знака $u_{мод}(t)$ наблюдаются скачки фазы БМ сигнала на 180° . Таким образом, БМ сигнал можно трактовать как сигнал с амплитудной и фазовой модуляциями одновременно.

Как отмечалось выше при рассмотрении спектра АМ сигнала, нижняя боковая полоса является «зеркальным отражением» верхней, т.е. не содержит никакой дополнительной информации о модулирующем сигнале. Отсюда возникает возможность передачи сигналов с помощью **однополосной модуляции (ОМ)**. При этом безразлично какую из двух полос ВБП или НБП использовать при однополосной передаче.

ОМ сигнал можно получать из БМ сигнала фильтровым или фазокомпенсационным методами. Фильтровой метод в силу своей очевидности не требует дополнительных пояснений. Отметим лишь высокие требования к

крутизне ската АЧХ полосового фильтра для выделения ВБП или НБП (по причине малого «частотного зазора» $2\Omega_{\text{мин}}$ между ними), возрастающие с увеличением несущей частоты.

Синтезируем однополосный модулятор на основе фазокомпенсационного метода подавления одной из боковых полос. Для этого обратимся к аналитическому модулирующему сигналу $\dot{u}_{\text{мод}}(t)$, спектр которого полностью располагается в области положительных частот (рис. 3.19)

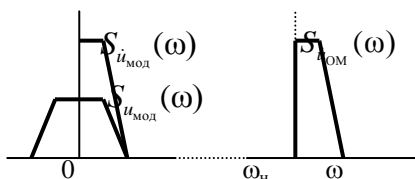


Рис. 3.19. Спектры ОМ сигналов

$\dot{u}_{\text{мод}}(t) = u_{\text{мод}}(t) + j\tilde{u}_{\text{мод}}(t)$. Умножая $\dot{u}_{\text{мод}}(t)$ на $e^{j\omega_n t}$, получим аналитический сигнал со спектром, смещённым вверх по оси частот на ω_n , т.е. по нашей терминологии комплексный ОМ сигнал ВБП

$$\dot{u}_{\text{ОМ}}(t) = \dot{u}_{\text{мод}}(t) \cdot e^{j\omega_n t}.$$

Вернёмся к действительному ОМ сигналу

$$u_{\text{ОМ}}(t) = \text{Re}[\dot{u}_{\text{ОМ}}(t)] = \text{Re}\{[u_{\text{мод}}(t) + j\tilde{u}_{\text{мод}}(t)](\cos \omega_n t + j \sin \omega_n t)\} = u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_n t - \tilde{u}_{\text{мод}}(t) \sin \omega_n t. \quad (3.6)$$

Рассматривая полученное выражение как алгоритм, приходим к параметрической реализации однополосного модулятора в виде, представленном на рис. 3.20.

Самостоятельно убедитесь в том, что для получения НБП достаточно в выражении (3.6) разность заменить на сумму.

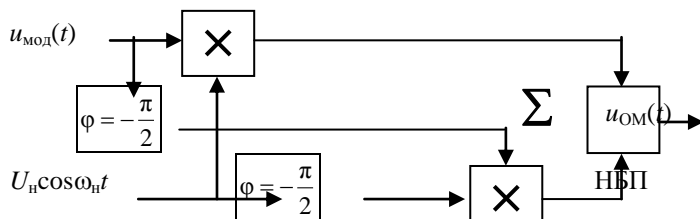


Рис. 3.20. Однополосный модулятор

Подставим в (3.6) модулирующий сигнал в квазигармонической форме

$$u_{\text{мод}}(t) = A_{\text{мод}}(t) \cos \psi_{\text{мод}}(t)$$

$$u_{\text{ОМ}}(t) = A_{\text{мод}}(t) \cos \psi_{\text{мод}}(t) \cdot \cos \omega_n t - A_{\text{мод}}(t) \sin \psi_{\text{мод}}(t) \cdot \sin \omega_n t$$

$$= A_{\text{мод}}(t) \cos[\psi_{\text{мод}}(t) + \omega_n t].$$

Из полученного результата видно, что в результате однополосной модуляции сохраняется огибающая модулирующего сигнала, а мгновенная частота возрастает на ω_n

$$\omega_{\text{ОМ}}(t) = \frac{d[\psi_{\text{мод}}(t) + \omega_n t]}{dt} = \omega_{\text{мод}}(t) + \omega_n.$$

Однополосную модуляцию можно рассматривать как самую простую – перенос (транспонирование) спектра модулирующего сигнала с сохранением его огибающей, а можно как сложную – амплитудную и фазовую одновременно. Она является самой узкополосной – ширина спектров модулирующего и однополосного сигналов одна и та же. Важным преимуществом ОМ по сравнению с АМ является энергетический выигрыш, доходящий (в зависимости от статистики модулирующего сигнала) до 10 раз.

К недостаткам ОМ можно отнести большие сложности получения и приёма однополосного сигнала.

Ещё одним видом линейной модуляции является **квадратурная амплитудная модуляция (КАМ)**, сущность которой заключается в передаче двух разных сигналов методами АМ или БМ на одной несущей частоте. Спектры этих двух сигналов полностью перекрываются и их разделение с помощью фильтров невозможно. Чтобы сохранить возможность разделения сигналов на приёмной стороне, несущие колебаний на модуляторы подаются с фазовым сдвигом 90° (в квадратуре). Схема формирования КАМ сигнала приведена на рис. 3.21. Достоинством КАМ по сравнению с обычными АМ или БМ, является вдвое большее количество сигналов, которые можно независимо передавать в одной и той же полосе частот.

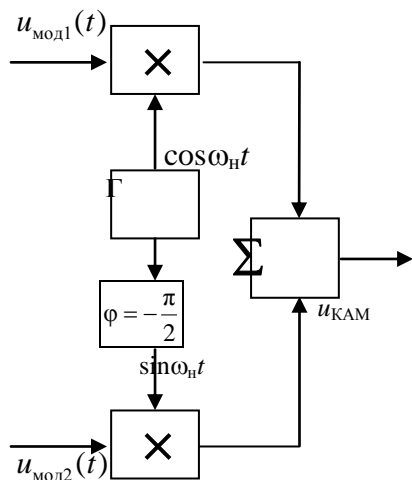


Рис. 3.21. Квадратурная АМ

3.5. Детектирование сигналов с линейными видами модуляции

При приёме модулированных сигналов над ними необходимо выполнять операцию обратную модуляции, т.е. преобразование, в результате которого будет получен сигнал, пропорциональный модулирующему на передающей стороне. Такое преобразование называют детектированием, а выполняющий его ФУ – детектором.

Из сопоставления спектров модулирующего и модулированного сигналов (см., например, рис. 3.12) с очевидностью вытекает невозможность построения детекторов модулированных колебаний в классе линейных цепей.

Детектирование АМ сигналов

У АМ сигнала $u_{AM}(t) = A(t)\cos\omega_n t$ информация о модулирующем сигнале заключена в огибающей $A(t)$, следовательно необходим **амплитудный детектор (детектор огибающей)**. По определению такой ФУ должен осуществлять измерение огибающей входного сигнала, т.е. формировать выходной сигнал вида $u_{вых}(t) = K_{дет} \cdot A(t)$. Простейшая схема детектора огибающей на нелинейной основе приведена на рис. 3.24. В ней в качестве нелинейного элемента для обогащения спектра тока i низкочастотными составляющими модулирующего сигнала (напомним, что их нет в спектре входного АМ сигнала $u_1(t)$) используется диод. Для подавления высокочастотных спектральных составляющих (АМ сигнала и побочных продуктов нелинейного преобразования) служит простейший ФНЧ 1-го порядка – нагрузочная RC цепь. На рис. 3.25 приведены спектры входного $u_1(t)$ и выходного $u_n(t)$ напряжений, тока i диода и зависимость модуля сопротивления нагрузки от частоты $Z_{RC}(\omega)$, вытекающие из приведённых рассуждений.

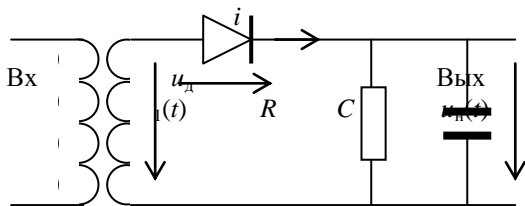


Рис. 3.24. Диодный детектор огибающей

нагрузки от частоты $Z_{RC}(\omega)$, вытекающие из приведённых рассуждений.

Проанализируем работу диодного детектора огибающей в **режиме сильного сигнала**. В этом случае целесообразно воспользоваться кусочно-линейной аппроксимацией вольтамперной характеристики (ВАХ) $i = f(u_d)$ диода и расчёт вести методом угла отсечки. Можно наметить следующую последовательность рассуждений:

- для вычисления $u_n(t)$ при известной нагрузке (R и

C) надо предварительно определить ток i ,

- для вычисления тока i при выбранном диоде (известной ВАХ $i = f(u_d)$) надо знать напряжение на нём u_d ,
- для определения напряжения $u_d = u_1(t) - u_n(t)$, надо знать искомое напряжение $u_n(t)$

В результате образовался «замкнутый круг» – вычисление

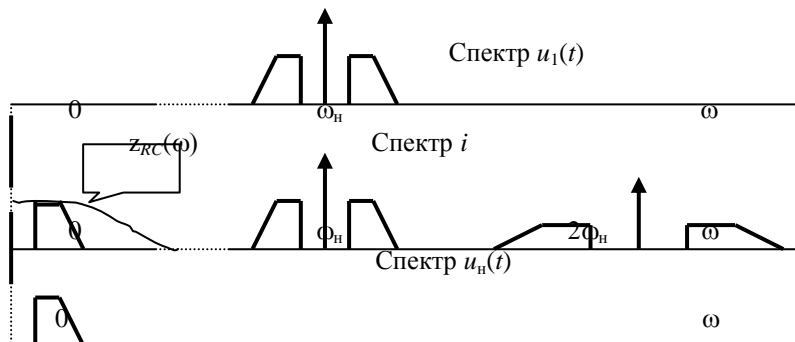


Рис 3.25. Спектры сигналов в диодном детекторе

искомой функции требует знания её самой на стадии промежуточных вычислений. Для его «разрыва» воспользуемся методом итераций (последовательных приближений), суть которого в том, что задаются начальным («нулевым») приближением к искомой функции $u_n(t)^{(0)}$ и производят вычисление её «первого» приближения $u_n(t)^{(1)}$ по выше намеченной процедуре (в обратном порядке):

- 1) $u_d^{(0)} = u_1(t) - u_n(t)^{(0)}$,
- 2) $i^{(0)} = f(u_d^{(0)})$,
- 3) $u_n(t)^{(1)}$ через $i^{(0)}$ и известные R и C ,
- 4) сравнивают разность $u_n(t)^{(1)} - u_n(t)^{(0)}$ с допустимой погрешностью.

При циклическом повторении этой процедуры с ростом числа приближений возможны два варианта:

- процесс последовательных приближений сходится к истинному решению,
- процесс расходится.

В первом случае цикл прерывают по достижении заданной точности вычислений. Второй случай может свидетельствовать о «плохом» выборе «нулевого» приближения.

Для «удачного» выбора «нулевого» приближения и существенного сокращения числа итераций рекомендуется использование квазилинейного метода, в основе которого лежит допущение о форме искомого колебаний (вида функции), которым задаются с точность до его параметров.

Так, в нашем случае анализа диодного детектора, в качестве «нулевого» приближения к искомому напряжению на нагрузке примем постоянное напряжение $u_n(t)^{(0)} = U_0$, не задавая его численно. Основания для этого чисто физические – напряжение на выходе ФНЧ не может быстро меняться во времени. Тогда, в соответствии с методом угла отсечки (см. рис. 3.26), имеем

$$u_d^{(0)} = u_1(t) - U_0 = A \cos \omega_n t - U_0 ;$$

$$i^{(0)} = f(u_d^{(0)}) = \begin{cases} S \cdot u_d^{(0)}; & u_d^{(0)} > 0 \\ 0; & u_d^{(0)} \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} SA(\cos \omega_n t - \cos \theta); & u_d^{(0)} > 0 \\ 0; & u_d^{(0)} \leq 0 \end{cases}, \text{ где } \cos \theta = \frac{U_0}{A};$$

$$I_0 = \alpha_0(\theta) i_{\max} = \alpha_0(\theta) SA(1 - \cos \theta),$$

где S – крутизна наклонного участка ВАХ диода;

$$u_n^{(1)} = I_0 R = SRA \alpha_0(\theta)(1 - \cos \theta) = U_0. \quad (3.6)$$

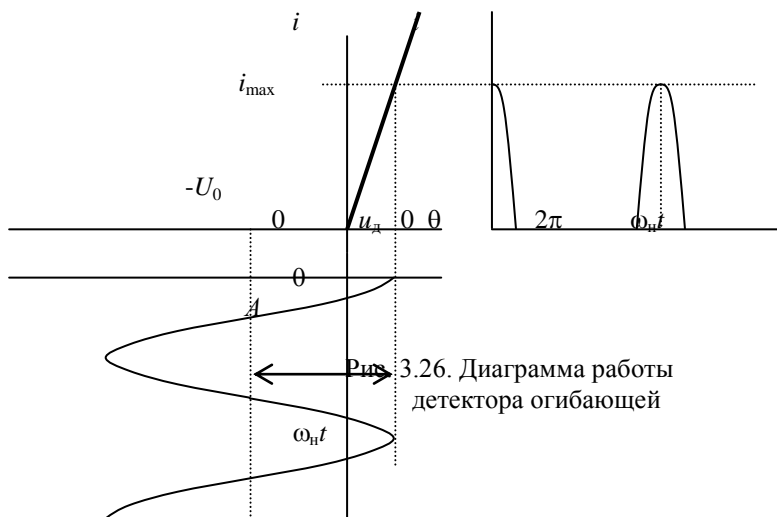
Уравнивая $u_n^{(1)} = u_n^{(0)} = U_0$, мы имеем возможность численно определить U_0 и завершить процесс итераций.

Из (3.6) вытекает следующий результат

$$K_{\text{дет}} = \frac{U_0}{A} = SR \alpha_0(\theta)(1 - \cos \theta) = \cos \theta, \quad (3.7)$$

на основе которого можно сделать следующие **выводы**:

1. Угол отсечки θ и, соответственно, $K_{\text{дет}}$ не зависят от огибающей A , следовательно, детектирование в режиме сильного сигнала осуществляется **линейно**.
2. Для повышения эффективности детектирования (увеличения $K_{\text{дет}}$) следует стремиться к **уменьшению угла отсечки θ** , что достигается увеличением произведения $S \cdot R$.
3. Выражение (3.7) можно использовать в качестве **формулы для расчёта сопротивления R** нагрузки после выбора диода (становится известной крутизна S его ВАХ) и величины $K_{\text{дет}}$.



$$i^{(0)} = a_0 + a_1 A \cos \omega_n t + a_2 A^2 \cos^2 \omega_n t^2 = a_0 + a_1 A \cos \omega_n t + \underbrace{\frac{a_2}{2} A^2}_{\text{полезная часть}} + \frac{a_2}{2} A^2 \cos 2\omega_n t.$$

В результате имеем (с учетом очевидного $a_0 = 0$)

$$U_0^{(1)} = I_0 R = \frac{a_2}{2} A^2 R = K_{\text{дет}} A^2.$$

При простом АМ сигнале, когда $A(t) = A(1 + m \cos \Omega t)$

$$U_0^{(1)} = K_{\text{дет}} A^2(t) = K_{\text{дет}} A^2(1 + m \cos \Omega t)^2 =$$

$$= K_{\text{дет}} \cdot A^2 \left(1 + 2m \cos \Omega t + \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} \cos 2\Omega t \right).$$

4. Величину ёмкости C нагрузки следует определять из очевидного неравенства

$$\Omega_{\text{макс}} \ll \frac{1}{RC} \ll \omega_n.$$

Проведём анализ детектора огибающей в **режиме слабого сигнала**.

В этом случае ВАХ диода целесообразно аппроксимировать полиномом второй степени

$$i = a_0 + a_1 u_d + a_2 u_d^2.$$

Ограничимся определением «первого» приближения $u_n(t)^{(1)}$, приняв $u_n(t)^{(0)} = 0$. Тогда

$$u_d^{(0)} = A \cos \omega_n t \text{ и}$$

Из полученного результата видно, что детектирование сопровождается нелинейными искажениями с коэффициентом гармоник

$$k_r = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{4}$$

и можно сделать следующие **выводы**:

1. В режиме слабого сигнала имеет место **квадратичное детектирование**, сопровождаемое нелинейными искажениями.

2. **Величина нелинейных искажений**, определяемая k_r , зависит от коэффициента модуляции m ($k_r = \frac{m}{4}$).

Детектирование БМ, ОМ и КАМ сигналов

Рассмотренный выше детектор огибающей не пригоден для детектирования БМ (двухполосных без несущей), ОМ и КАМ сигналов, поскольку их огибающие не повторяют форму модулирующих сигналов и, кроме амплитудной, имеет место фазовая модуляция. Соответствующий детектор должен обладать не только амплитудной, но и фазовой чувствительностью. Такого рода детектор реализуют на параметрической основе и называют синхронным (рис. 3.27).

Рассмотрим процесс детектирования сигналов с разными видами линейной модуляции синхронным детектором (СД).

1. Детектирование АМ сигналов

В этом случае

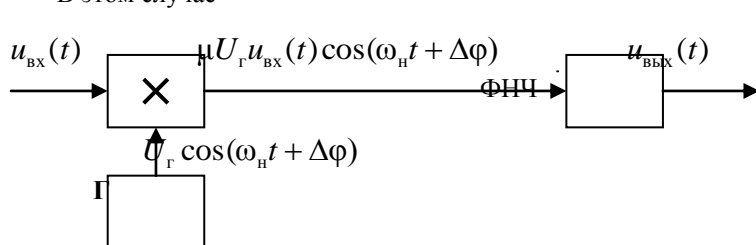


Рис. 3.27. Синхронный детектор

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{АМ}}(t) = U_{\mu} \left[1 + k_{\text{АМ}} u_{\text{мод}}(t) \right] \cos \omega_n t = A(t) \cos \omega_n t$$

На выходе перемножителя получим

$$\begin{aligned} \mu U_r A(t) \cos \omega_n t \cos(\omega_n t + \Delta \varphi) &= \\ = \frac{1}{2} \mu U_r A(t) \cos \Delta \varphi + \frac{1}{2} \mu U_r A(t) \cos(2\omega_n t + \Delta \varphi) \end{aligned}$$

а на выход СД через ФНЧ пройдет лишь первое (НЧ) слагаемое этого произведения

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2} \mu U_r A(t) \cos \Delta \varphi = K_{\text{дет}} A(t).$$

Для достижения наибольшего коэффициента детектирования $K_{\text{дет}} = \frac{1}{2} \mu U_r \cos \Delta \varphi$ следует добиваться

не только синхронности, но и синфазности ($\Delta \varphi = 0$) опорного и несущего колебаний.

2. Детектирование двухполосных (БМ) сигналов

В этом случае (3.5)

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{БМ}}(t) = k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_n t.$$

На выходе перемножителя имеем

$$\begin{aligned} \mu U_r k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_n t \cos(\omega_n t + \Delta \varphi) &= \\ = \frac{1}{2} \mu U_r k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos \Delta \varphi + \frac{1}{2} \mu U_r k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos(2\omega_n t + \Delta \varphi). \end{aligned}$$

После ФНЧ на выходе СД получим

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2} \mu U_r k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos \Delta \varphi = K_{\text{дет}} u_{\text{мод}}(t),$$

где $K_{\text{дет}} = \frac{1}{2} \mu U_r k_{\text{БМ}} \cos \Delta \varphi$ – коэффициент детектирования.

3. Детектирование однополосных (ОМ) сигналов

В этом случае (3.6)

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{ОМ}}(t) = u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_n t - \tilde{u}_{\text{мод}}(t) \sin \omega_n t.$$

На выходе перемножителя получаем

$$\begin{aligned} \mu U_r \left[u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_n t - \tilde{u}_{\text{мод}}(t) \sin \omega_n t \right] \cos(\omega_n t + \Delta \varphi) &= \\ = \frac{1}{2} \mu U_r u_{\text{мод}}(t) \left[\cos \Delta \varphi + \cos(2\omega_n t + \Delta \varphi) \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} \tilde{u}_{\text{мод}}(t) [-\sin \Delta\varphi + \sin(2\omega_{\text{н}}t + \Delta\varphi)].$$

После ФНЧ на выходе СД при условии $\Delta\varphi = 0$ имеем

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} \cdot u_{\text{мод}}(t) = K_{\text{дет}} u_{\text{мод}}(t),$$

где $K_{\text{дет}} = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma}$ – коэффициент детектирования.

4. Детектирование и разделение КАМ сигналов

В этом случае (см. рис 3.21)

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{КАМ}}(t) = u_{\text{мод1}}(t) \cos \omega_{\text{н}}t + u_{\text{мод2}}(t) \sin \omega_{\text{н}}t.$$

На выходе перемножителя получаем

$$\begin{aligned} \mu U_{\Gamma} [u_{\text{мод1}}(t) \cos \omega_{\text{н}}t + u_{\text{мод2}}(t) \sin \omega_{\text{н}}t] \cos(\omega_{\text{н}}t + \Delta\varphi) = \\ = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} u_{\text{мод1}}(t) [\cos \Delta\varphi + \cos(2\omega_{\text{н}}t + \Delta\varphi)] + \\ + \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} u_{\text{мод2}}(t) [-\sin \Delta\varphi + \sin(2\omega_{\text{н}}t + \Delta\varphi)]. \end{aligned}$$

После ФНЧ на выходе СД имеем:

при условии $\Delta\varphi = 0$

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} u_{\text{мод1}}(t),$$

при условии $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} u_{\text{мод2}}(t).$$

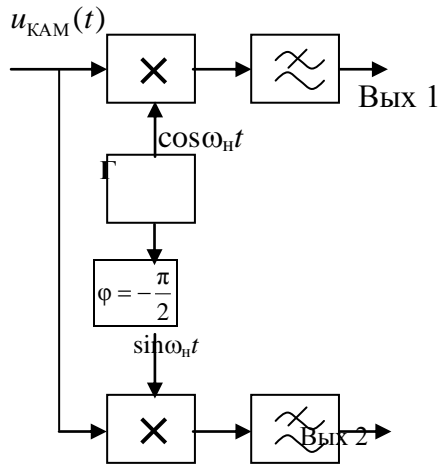


Рис. 3.28. Приём КАМ сигнала

Таким образом, при использовании двух СД с квадратурными опорными колебаниями (попарно синфазными с квадратурными несущими КАМ сигнала) наряду с детектированием обеспечивается полное разделение двух передаваемых сигналов $u_{\text{мод1}}(t)$ и $u_{\text{мод2}}(t)$. Схема приёма КАМ сигналов приведена на рис. 3.28.

Выводы

1. Синхронный детектор позволяет детектировать сигналы с **любым видом линейной модуляции без искажений** независимо от уровня сигнала.

2. Синхронный детектор обладает наряду с амплитудной ещё и **фазовой чувствительностью**, что позволяет использовать его в качестве измерителя разности фаз входного и опорного колебаний (фазового детектора).

3. Отсутствие в СД синфазности несущего и опорного колебаний $\Delta\varphi \neq 0$ приводит:

- при приёме АМ и БМ сигналов – к уменьшению

коэффициента детектирования $K_{\text{дет}} = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} \cdot \cos \Delta\varphi$;

- при приёме ОМ сигналов – к искажению формы выходного сигнала за счёт суммирования $u_{\text{мод}}(t) \cos \Delta\varphi + \tilde{u}_{\text{мод}}(t) \sin \Delta\varphi$, что, впрочем, не является существенным при приёме звуковых сообщений, т.к. эти искажения связаны с изменением фазового спектра сигнала при сохранении амплитудного (см. свойства преобразования Гильберта), а слуховой аппарат человека не обладает чувствительностью к фазовым искажениям;
- при приёме КАМ сигналов – к перекрёстным искажениям (не полному разделению сигналов), когда

$$u_{\text{вых1}} = u_{\text{мод1}}(t) \cos \Delta\varphi - u_{\text{мод2}}(t) \sin \Delta\varphi,$$

$$u_{\text{вых2}} = u_{\text{мод1}}(t) \sin \Delta\varphi + u_{\text{мод2}}(t) \cos \Delta\varphi.$$

3.6. Преобразование частоты сигналов

Преобразованием частоты называют перенос (транспонирование) спектра сигнала (обычно узкополосного) по оси частот «вверх» или «вниз» на некоторое расстояние ω_r , задаваемое гетеродином – маломощным генератором гармонического колебания $U_r \cos \omega_r t$. При этом сохраняются вид модуляции и структура спектра сигнала, изменяется только его положение на оси частот.

Преобразователь частоты состоит из смесителя частот и гетеродина (рис. 3.32).

Смеситель частот реализуется на параметрической или нелинейной основе, т.к. на его выходе необходимо получить колебание комбинационных частот входных сигналов второго порядка (суммарных или разностных). Среднюю частоту выходного сигнала $\omega_{пр} = \omega_c - \omega_r$ или $\omega_{пр} = \omega_c + \omega_r$ называют промежуточной. Собственно

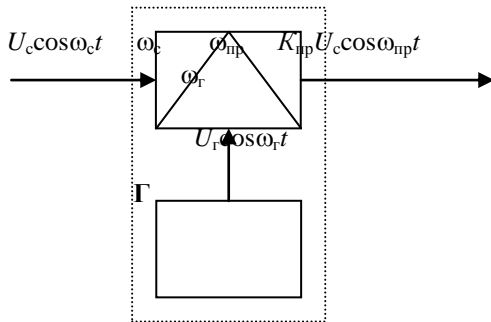


Рис. 3.32. Преобразователь частоты

говоря, ничего нового в операции преобразования частоты для нас нет, с ней мы уже встречались при рассмотрении свойств преобразования Фурье (п. 9), свойств аналитического сигнала (п. 5) и параметрической реализации однополосного модулятора (рис. 3.20). Схема, приведённая на рис.3.20, может быть использована в качестве параметрического преобразователя частоты без каких либо изменений. Нелинейный преобразователь частоты может быть выполнен также по выше рассмотренной схеме амплитудного модулятора (рис. 3.16) при настройке нагрузочного колебательного LC контура на промежуточную частоту $\omega_0 = \omega_{пр}$.

Преобразователи частоты входят в состав подавляющего большинства современных радиоприёмных устройств (супергетеродинов). Их применение позволяет основную

додетекторную обработку сигналов в этих приёмниках – фильтрацию и усиление производить не на частоте сигнала (которая может быть слишком высокой и изменяться в широком диапазоне частот), а на фиксированной промежуточной. Это позволяет существенно улучшить чувствительность и избирательность приёмников, а также упростить их перестройку в широком диапазоне принимаемых частот.

3.7. Угловая (ЧМ и ФМ) модуляция

При угловой модуляции (УМ) информация о модулирующем сигнале закладывается в полную фазу $\Psi(t)$ гармонического переносчика

$$u_{у.м}(t) = U_0 \cos \Psi(t) = U_0 \cos[\omega_n t + \varphi(t)]. \quad (3.8)$$

В зависимости от того, как это делается, различают два варианта УМ:

1) **фазовая модуляция (ФМ)**, при которой

$$\varphi(t) = K_{ФМ} u_{мод}(t)$$

2) **частотная модуляция (ЧМ)**, при которой

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = K_{ЧМ} u_{мод}(t)$$

Поскольку фаза $\Psi(t)$ и мгновенная частота $\omega(t)$ связаны между собой известным соотношением

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d[\omega_n t + \varphi(t)]}{dt} = \omega_n + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_n + \Delta\omega(t),$$

то столь же тесно связаны между собой ФМ и ЧМ.

В частности, при ФМ

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d[K_{ФМ} u_{мод}(t)]}{dt} = K_{ФМ} \frac{du_{мод}(t)}{dt},$$

а при ЧМ

$$\varphi(t) = \int \Delta\omega(t) dt = K_{ЧМ} \int u_{мод}(t) dt.$$

Из этих соотношений вытекает возможность получения обоих видов угловой модуляции с помощью одного типа модулятора (либо фазового, либо частотного) (рис. 3.34).

Векторная диаграмма колебания с УМ

Из аналитического выражения колебания с УМ (3.8) видно, что его амплитуда U_0 сохраняется неизменной, следовательно, вектор комплексной амплитуды $u_{yM}(t)$ не изменяет свою длину и может только вращаться на комплексной плоскости. Годограф этого вектора представляет собой окружность.

Аналитическое выражение простого колебания с УМ имеет следующий вид

$$u_{yM}(t) = U_0 \cos(\omega_n t + M \sin \Omega t),$$

где M – максимальное отклонение фазы от среднего значения называют **индексом модуляции**.

Изменение мгновенной частоты простого колебания с УМ происходит по закону

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d(M \sin \Omega t)}{dt} = \underbrace{M\Omega}_{\Delta\omega} \cos \Omega t,$$

где $\Delta\omega = M\Omega$ ($\Delta f = MF$) – **девиация частоты**.

Спектр простого колебания с УМ

Для определения спектра простого колебания с УМ удобно перейти к его комплексному сигналу

$$\dot{u}_{yM}(t) = U_0 e^{j(\omega_n t + M \sin \Omega t)} = U_0 e^{j\omega_n t} e^{jM \sin \Omega t}. \quad (3.9)$$

Из теории функций Бесселя известно, что

$$e^{jM \sin \Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(M) e^{jk\Omega t}, \quad (3.10)$$

где $J_k(M)$ – функции Бесселя первого рода порядка k от аргумента M ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Они обладают свойством

$$J_k(M) = (-1)^k J_{-k}(M).$$

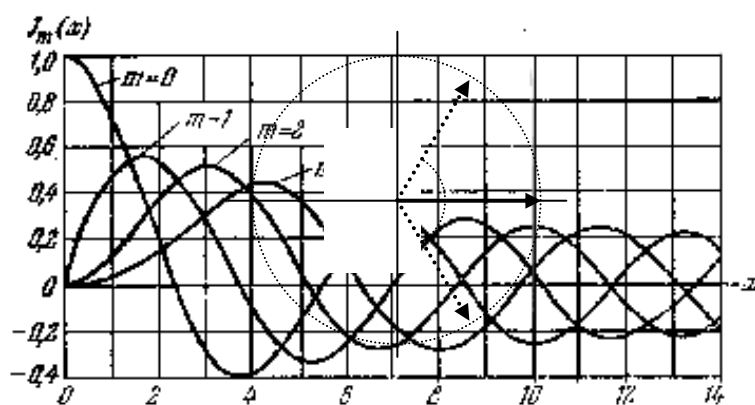


Рис. 3.36. Графики функций Бесселя

Графики функций Бесселя приведены на рис. 3.36.

Подставляя (3.10) в (3.9), получаем

$$\dot{u}_{yM}(t) = U_0 e^{j\omega_n t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(M) \cdot e^{jk\Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_0 J_k(M) e^{j(\omega_n + k\Omega)t}.$$

Вернёмся к действительному сигналу

$$u_{yM}(t) = \text{Re}[\dot{u}_{yM}(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_0 J_k(M) \cos(\omega_n + k\Omega)t.$$

Спектр простого сигнала с УМ, соответствующий полученному выражению, приведён на рис. 3.37.

Для определения ширины спектра простого сигнала с УМ учтём ещё одно свойство функций Бесселя – с ростом их порядка увеличивается начальная область значений аргумента M , при которых модуль этих функций очень мал. Обычно, пренебрегают боковыми компонентами с номерами $k > M+1$, считая практическую ширину спектра

$$\Delta\omega_{yM} = 2\Omega(M+1) \text{ или } \Delta f_{yM} = 2F(M+1).$$

Таким образом, при $M \gg 1$

$$\Delta\omega_{yM} \cong 2\Omega M = 2\Delta\omega \text{ или } \Delta f_{yM} \cong 2FM = 2\Delta f$$

и можно считать, что ширина спектра простого колебания с УМ вдвое больше его девиации частоты и существенно больше (в M раз) ширины спектра АМ сигнала.

При $M \ll 1$ достаточно в спектре этого колебания удержать первую пару боковых и считать его ширину

$$\Delta\omega_{yM} = 2\Omega \text{ или } \Delta f_{yM} = 2F$$

равной ширине спектра простого АМ сигнала.

Методы осуществления угловой модуляции

Различают два основных метода осуществления угловой модуляции – прямой и косвенный. По прямому методу реализуют частотные модуляторы на основе генераторов, частота колебаний которых управляется внешним напряжением (ГУН) (рис. 3.38). Особенностью ГУН является включение в его колебательную систему, от собственной частоты ω_0 которой зависит частота ω_r генерируемых колебаний, управляемого реактивного элемента (УРЭ). В качестве УРЭ можно использовать варикап, «реактивный транзистор», ёмкость (индуктивность) которых зависит от приложенного напряжения (протекающего тока).

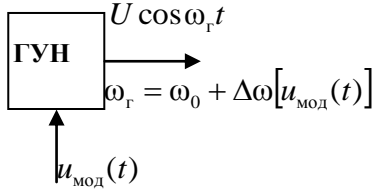


Рис. 3.38. Частотный модулятор

Достоинством прямого метода является возможность получения большой девиации частоты ($M \gg 1$), т.е. широкополосной частотной модуляции, а основным недостатком – трудность обеспечения высокой стабильности несущей частоты.

По косвенному методу реализуют фазовые модуляторы на основе схемы, представленной на рис. 3.39. Выясним условия, при

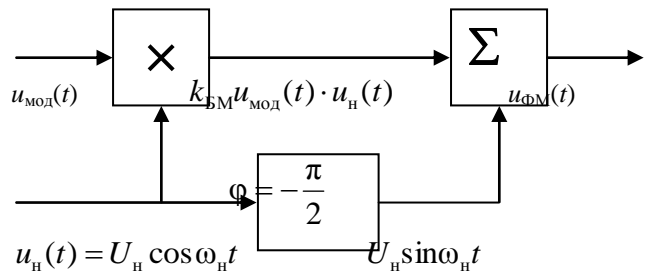


Рис. 3.39. Фазовый модулятор

которых эта схема обеспечивает ФМ. На выходе сумматора имеем

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) U_n \cos \omega_n t + U_n \sin \omega_n t = \\ &= U_n [k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_n t + \sin \omega_n t] = \\ &= U_n \left\{ \sqrt{[k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t)]^2 + 1} \right\} \sin \{ \omega_n t + \arctg [k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t)] \}. \end{aligned}$$

При выполнении условия $k_{\text{БМ}} |u_{\text{мод}}(t)|_{\text{макс}} \ll 1$

$$u_{\text{вых}}(t) \cong U_n \sin [\omega_n t + k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t)] = u_{\text{ФМ}}(t).$$

Таким образом установили, что рассмотренная схема может служить фазовым модулятором только при выполнении указанного неравенства, иначе говоря, только при малом индексе модуляции ($M \ll 1$) выходного сигнала $u_{\text{ФМ}}(t)$. Это её основной недостаток, а достоинством является высокая стабильность несущей частоты $u_{\text{ФМ}}(t)$ при использовании высокостабильного генератора несущего колебания.

3.8. Детектирование сигналов с угловой модуляцией

Детектирование ФМ сигналов

Для детектирования ФМ сигналов можно использовать ранее рассмотренный **синхронный детектор** (рис. 3.27). При $u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{ФМ}}(t) = U_0 \cos[\omega_n t + \varphi(t)]$ в качестве опорного колебания используют $u_r(t) = U_r \sin \omega_n t$. Это позволяет получить характеристику детектирования $u_{\text{вых}}(t) = f(\varphi)$ в виде

$$u_{\text{вых}}(t) = \{ \mu U_0 U_r \cos[\omega_n t + \varphi(t)] \sin \omega_n t \}_{\text{нч}} = \frac{1}{2} \mu U_0 U_r \sin \varphi(t), \quad (3.11)$$

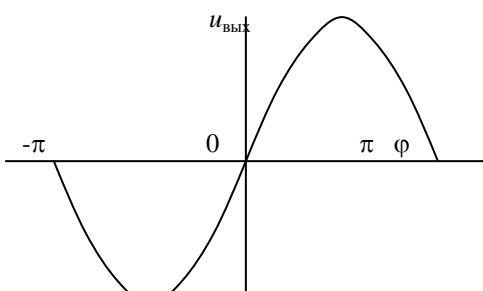


Рис. 3.40. Характеристика детектирования ФД

где $\{ \dots \}_{\text{нч}}$ обозначает низкочастотную часть выражения в фигурных скобках (после прохождения через ФНЧ). График характеристики детектирования фазового детектора приведён на рис. 3.40.

Детектирование ЧМ сигналов

Для построения частотных детекторов используются два метода связанные с преобразованием вида модуляции:

- 1) преобразование **ЧМ в АМ** с последующим амплитудным детектированием,

2) преобразование ЧМ в ФМ с последующим фазовым детектированием

Первый метод реализован в схеме **частотного детектора** с расстроенными контурами (рис. 3.41). Преобразователь ЧМ в АМ выполнен на двух колебательных контурах, расстроенных относительно частоты сигнала $\omega_{01} = \omega_c + \Delta\omega_p$ и $\omega_{02} = \omega_c - \Delta\omega_p$, где $\Delta\omega_p$ (расстройка) выбирается таким образом, чтобы получить максимальную линейность рабочего участка характеристики детектирования. Амплитудные детекторы выполнены по выше рассмотренной схеме диодного детектора огибающей (рис. 3.24).

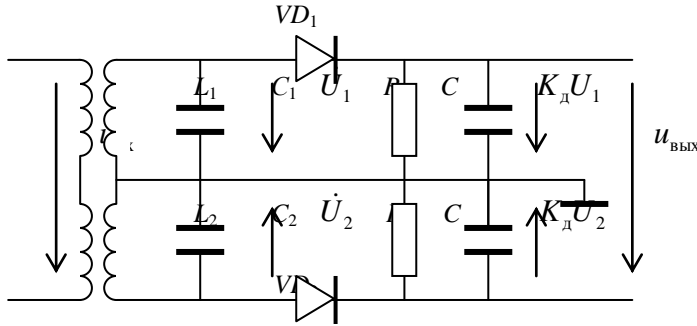


Рис. 3.41. Частотный детектор с расстроенными контурами

Вычислим характеристику детектирования (ХД) $u_{\text{ВЫХ}} = f(\omega)$, где ω – частота входного гармонического сигнала.

$$u_{\text{ВЫХ}} = K_d (U_1 - U_2) = K_d \mu U_c \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_2^2}} \right), \quad (3.12)$$

где U_c – амплитуда входного сигнала $u_{\text{ВХ}} = U_c \cos \omega_c t$,

μ – коэффициент передачи входного трансформатора,

$$\xi_1 = Q \left(\frac{\omega}{\omega_{01}} - \frac{\omega_{01}}{\omega} \right) \cong 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_{01}} \text{ – обобщённая расстройка 1-го контура,}$$

$$\xi_2 = Q \left(\frac{\omega}{\omega_{02}} - \frac{\omega_{02}}{\omega} \right) \cong 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_{02}} \text{ – обобщённая расстройка 2-го контура.}$$

На рис. 3.42 утолщённой линией приведён график ХД, соответствующий выражению (3.12). Относительно линейная часть ХД используется в качестве её рабочей области. Нетрудно видеть, что требуется тщательное симметрирование схемы ($Q_1 = Q_2 = Q$) и настройка контуров на частоты $\omega_c \pm \Delta\omega_p$, правильный

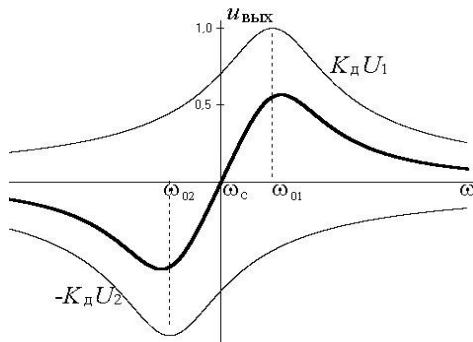


Рис. 3.42. ХД частотного детектора

выбор которых зависит от добротности Q . **Сложность настройки** – главный недостаток данного частотного детектора, а к его достоинствам можно отнести возможность получения **высокой крутизны ХД** при $Q \gg 1$.

Преобразование ЧМ в ФМ с последующим фазовым детектированием используется в **частотном дискриминаторе**, схема которого приведена на рис. 3.43. В этой схеме преобразование ЧМ сигнала $u_1(t)$ в ФМ сигнал $u_2(t)$ осуществляется колебательным контуром $L_2 C_2$, настроенным на частоту сигнала $\omega_0 = \omega_c$ а фазовый детектор (ФД) выполнен по балансной схеме, содержащей перемножитель напряжений \dot{U}_1 и \dot{U}_2 на диодах VD_1 , VD_2 и ФНЧ 1-го порядка (RC нагрузка). Вспомогательные элементы разделительный конденсатор C_p и дроссель $L_{др}$ служат для подачи входного напряжения \dot{U}_1 в качестве опорного на второй вход перемножителя.

Определим ХД частотного дискриминатора – зависимость его выходного напряжения от частоты ω_c входного гармонического сигнала $u_{\text{вх}} = U_1 \cos \omega_c t$. Учитывая (3.11), имеем

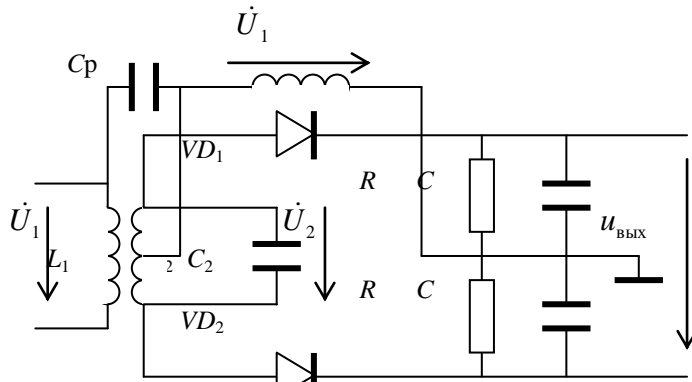


Рис. 3.43. Частотный дискриминатор

$$u_{\text{вых}} = \gamma U_1 U_2 \cos \Delta\varphi,$$

где γ – коэффициент пропорциональности, $U_1 = \text{const}$,

$\Delta\varphi$ – фазовый сдвиг между \dot{U}_2 и

$$\dot{U}_1 \quad \Delta\varphi = \arg \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}.$$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \cong \pm j \frac{M}{L_1} \cdot \frac{\rho}{r(1+j\xi)} = \pm j \frac{M}{L_1} \cdot \frac{Q}{(1+j\xi)}$$

где M – взаимная индуктивность между L_1 и L_2 ,

$\rho = \omega_0 L$ – характеристическое

сопротивление контура,

r – сопротивление потерь контура,

Q – добротность контура,

$\xi = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q$ – обобщённая расстройка.

$$\Delta\varphi = \arg \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \pm \frac{\pi}{2} - \arctg \xi. \quad U_2 = U_1 \frac{MQ}{L_1} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

$$u_{\text{вых}} = \gamma U_1 U_2 \cos \Delta\varphi = \gamma U_1 U_1 \frac{MQ}{L_1} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \cos \left(\pm \frac{\pi}{2} - \arctg \xi \right) = \pm K_{\text{чд}} \frac{\sin(\arctg \xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (3.13)$$

где $K_{\text{чд}} = \gamma U_1^2 \frac{MQ}{L_1}$.

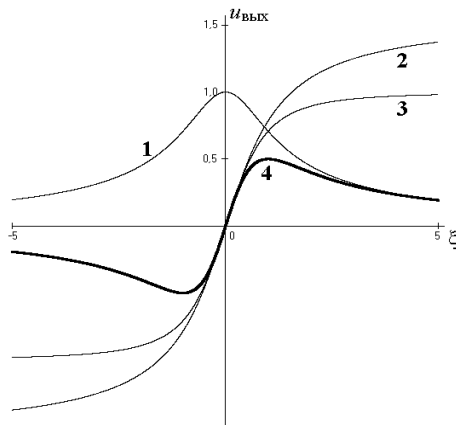


Рис. 3.44. Характеристика детектирования частотного дискриминатора

На рис. 3.44 приведён график ХД (кривая 4), построенный по выражению (3.13), а также ряд вспомогательных кривых:

- 1) $\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$,
- 2) $\arctg \xi$,
- 3) $\sin(\arctg \xi)$.

3.9. Виды модуляции, используемые при передаче дискретных сообщений

При передаче дискретных сообщений – последовательностей кодовых символов $b_n^{(k)}$ (n порядковый номер символа, $k = 1, 2, \dots, m$ – номер символа из кодового алфавита объемом m) первичный сигнал представляет собой

$$u_{\text{ц}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} x(t - nT),$$

где T – длительность тактового интервала на котором передаётся один кодовый символ, $x(t)$ – функция, описывающая форму импульса на интервале T .

Форму импульса $x(t)$ выбирают из соображений ограничения его спектра полосой пропускания канала и удобства формирования (прямоугольную, гауссовскую, синусквадратичную). Для простоты дальнейших рассуждений ограничимся прямоугольной формой импульсов и использованием двоичного кода ($m=2$), алфавит которого содержит всего два символа $b^{(0)} = +1$ и $b^{(1)} = -1$. Тогда

$$u_{\text{ц}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \pm 1(t - nT). \quad (3.14)$$

При использовании гармонического переносчика модуляцию цифровым первичным сигналом называют **цифровой (ЦМ)**. По виду модулируемого параметра различают цифровые амплитудную (**ЦАМ**), фазовую (**ЦФМ**) и частотную (**ЦЧМ**) модуляции. Принципиальным отличием ЦМ от ранее рассмотренной аналоговой является конечный набор вариантов сигнала на выходе модулятора (в нашем случае всего два варианта $s_0(t)$ и $s_1(t)$ при передаче b_0 и b_1 соответственно). Это обстоятельство существенно меняют задачу приёма таких сигналов. При приёме сигналов с аналоговой модуляцией главным является воспроизведение формы модулирующего сигнала с минимальной погрешностью в результате его детектирования (непрерывного измерения информационного параметра). В случае приёма сигналов с ЦМ решается задача различения (обнаружения) вариантов сигналов с минимальной вероятностью ошибок (демодуляция). Вопросы демодуляции сигналов с цифровой модуляцией подробно будут рассмотрены во второй части курса ТЭС.

Описание сигналов с ЦМ во временной и спектральной областях можно рассматривать как частный случай аналогичного описания сигналов с аналоговой модуляцией, соответствующий конкретной форме модулирующего сигнала (3.14). В частности, имеем:

при ЦАМ

$$\begin{aligned} s_{\text{ЦАМ}}(t) &= \frac{1}{2} [1 + u_{\text{ц}}(t)] U_{\text{н}} \cos \omega_{\text{н}} t = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{\text{н}} \frac{1}{2} [1 \pm 1(t - nT)] \cos \omega_{\text{н}} t, \end{aligned} \quad (3.15)$$

при ЦФМ

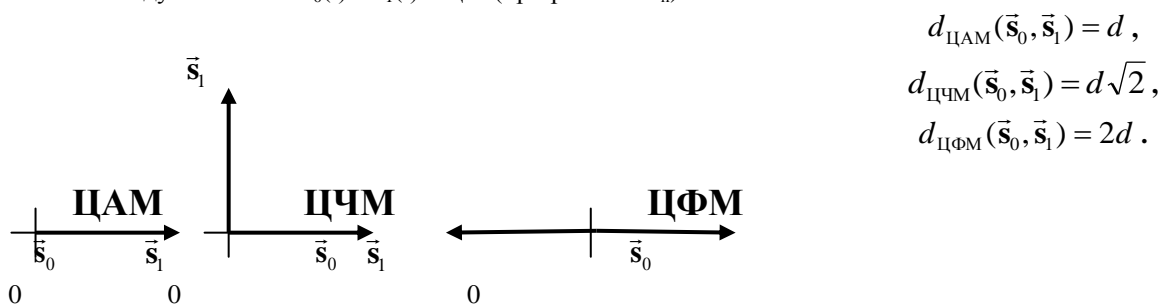
$$\begin{aligned} s_{\text{ЦФМ}}(t) &= U_{\text{н}} \cos \left\{ \omega_{\text{н}} t + [1 + u_{\text{ц}}(t)] \frac{\pi}{2} \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{\text{н}} \cos \left\{ \omega_{\text{н}} t + [1 \pm 1(t - nT)] \frac{\pi}{2} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{\text{н}} [\pm 1(t - nT)] \cos \omega_{\text{н}} t \\ &= u_{\text{ц}}(t) \cdot U_{\text{н}} \cos \omega_{\text{н}} t, \end{aligned} \quad (3.16)$$

при ЦЧМ

$$\begin{aligned} s_{\text{ЦЧМ}}(t) &= U_{\text{н}} \cos [\omega_{\text{н}} + \Delta\omega \cdot u_{\text{ц}}(t)] t = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{\text{н}} \cos [\omega_{\text{н}} \pm \Delta\omega \cdot 1(t - nT)] t, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где девиацию частоты $\Delta\omega$ выбирают из условия обеспечения ортогональности сигналов $s_0(t)$ и $s_1(t)$.

На рис. 3.47 полученные сигналы изображены в виде векторов в пространстве сигналов. Из него видно, что расстояние между сигналами $s_0(t)$ и $s_1(t)$ с ЦМ (при равных $U_{\text{н}}$)



Очевидно, что чем больше расстояние между сигналами, тем они надёжнее различаются при приёме на фоне помех. Следовательно, наибольшей помехоустойчивостью обладает ЦФМ, а наименьшей ЦАМ. На практике по причинам, которые будут понятны из материалов второй части курса ГЭС, вместо ФМ используют **ОФМ** (относительную фазовую модуляцию), отличающуюся тем, что модулирующий сигнал отображают не в абсолютной фазе гармонического переносчика, а в изменении его фазы по отношению к предыдущему сигналу. Реализация модуляторов сигналов с ЦМ не вызывает сложностей и вытекает из аналитических выражений соответствующих сигналов (3.15) – (3.17). Так, в частности, для получения сигнала с ЦАМ можно использовать параметрический амплитудный модулятор (рис. 3.15). В качестве фазового модулятора для получения сигнала с ЦФМ (3.16) можно использовать перемножитель, а сам сигнал рассматривать как БМ сигнал. Для получения сигнала с ЦЧМ можно использовать коммутатор двух генераторов с частотами $\omega_n - \Delta\omega$ и $\omega_n + \Delta\omega$ (ЦЧМ с разрывом фаз) или коммутатор дополнительного реактивного элемента в колебательной системе единственного генератора для получения тех же самых частот (ЦЧМ с непрерывной фазой).

Общим недостатком рассмотренных простых видов ЦМ является низкая скорость передачи $V = \frac{1}{T} \left(\frac{\text{бит}}{\text{с}} \right)$.

Для её повышения прибегают к увеличению объёма алфавита кода m , разделению первичного сигнала на части (например, чётные и нечётные импульсы в кодовых последовательностях) с одновременной передачей этих частей методом КАМ или применяют комбинацию этих способов.

Так, широко используется четырёхфазная ФМ-4 (ОФМ-4) (иное название – двукратная ФМ (ДФМ)), основанная на передаче четырёх сигналов, каждый из которых несёт информацию о двух битах (**дибите**) исходной двоичной последовательности. (00, 01, 10, 11). Соответственно фаза сигнала может принимать значения $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ (возможный вариант $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$). В результате при сохранении длительности сигнала T на выходе модулятора достигается двукратное увеличение скорости передачи. Обычно такой сигнал формируют с помощью квадратурного модулятора (рис. 3.48). На его входы подают нечётные $x(t)$ и чётные $y(t)$ импульсы, получаемые из исходной двоичной последовательности с помощью регистра сдвига.

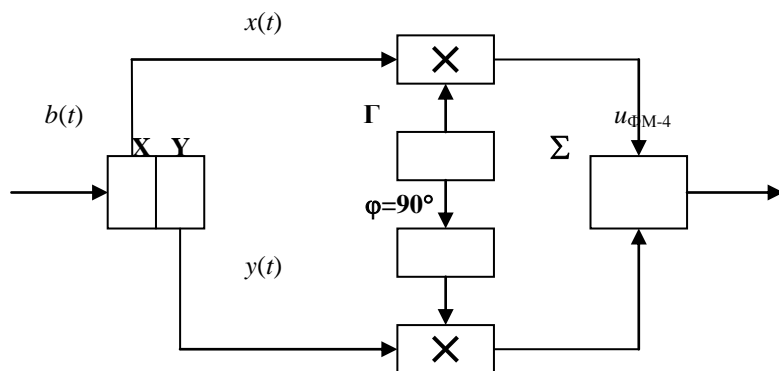


Рис. 3.48. Формирователь сигнала ФМ-4

Дополнительное увеличение скорости передачи можно достичь комбинируя ФМ и АМ. Примерами такого решения могут служить шестнадцатипозиционная система КАМ-16, при которой используются 4 относительных уровня ($\pm 1, \pm 3$) сигналов $x(t)$ и $y(t)$, в результате чего формируются 16 сигналов, каждый из которых несёт информацию о четырёх битах (**квадбите**) исходной двоичной последовательности, 64-позиционная КАМ-64 с 8-ю относительными уровнями ($\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$) сигналов $x(t)$ и $y(t)$.

Графические интерпретации сигналов ФМ-4, ФМ-16 и КАМ-16 приведены на рис. 3.49. На комплексной плоскости сигналы отображены сигнальными точками (концами векторов их комплексных амплитуд), образующими сигнальное созвездие (signal constellation).

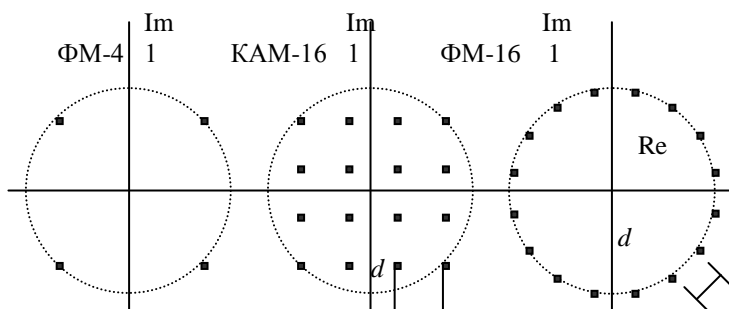


Рис. 3.49. Сигнальные созвездия ФМ-4, КАМ-16, ФМ-16

Из рассмотрения этих сигнальных созвездий несложно определить минимальные расстояния d между сигналами

$$d_{\text{КАМ}} = \frac{\sqrt{2}}{L-1} \text{ для КАМ и } d_{\text{ФМ}} = 2 \sin \frac{\pi}{M} \text{ для ФМ,}$$

где L – число различных уровней системы сигналов КАМ,
 M – число различных фаз системы сигналов ФМ.

Видно, что при увеличении значения M и одинаковой максимальной мощности сигналов системы КАМ предпочтительнее систем с ФМ. В частности, при $M = 16$ ($L = 4$) $d_{\text{КАМ}} = 0,47$ и $d_{\text{ФМ}} = 0,39$, при $M = 36$ ($L = 6$) $d_{\text{КАМ}} = 0,282$ и $d_{\text{ФМ}} = 0,174$, а при $M = 64$ ($L = 8$) $d_{\text{КАМ}} = 0,2$ и $d_{\text{ФМ}} = 0,098$.

4. Математические модели случайных процессов

Сигналы в системах передачи информации и действующие в них помехи по своей природе являются случайными процессами. Для их описания необходимо применять математический аппарат теории вероятностей и случайных процессов. Настоящую главу следует рассматривать как развитие раздела 2. Математические модели сигналов (Теория электрической связи. Конспект лекций. Часть 1) применительно к случайным процессам.

4.1. Понятие случайного процесса

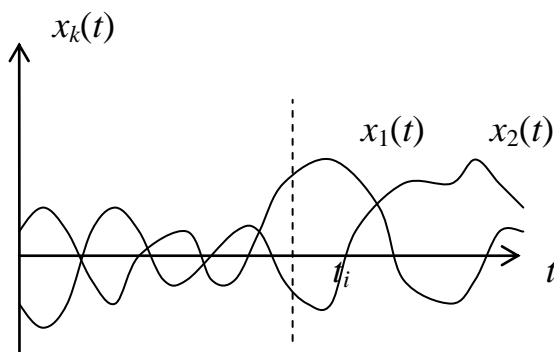


Рис. 4.1. Реализации процесса $X(t)$

Случайный процесс (СП) $X(t)$ является функцией времени, значения которой в любой фиксированный момент времени t_i представляют собой случайную величину $X(t_i)$. Здесь и в дальнейшем случайные величины и функции будем обозначать заглавными буквами, а детерминированные (неслучайные) – строчными, как это широко принято. На рис. 4.1 изображены возможные **реализации** $x_1(t)$ и $x_2(t)$ случайного процесса $X(t)$, являющиеся детерминированными функциями времени. Сам процесс можно трактовать как множество (в том числе и несчетное) подобных реализаций $\{ x_k(t) \}$ с соответствующей вероятностной мерой.

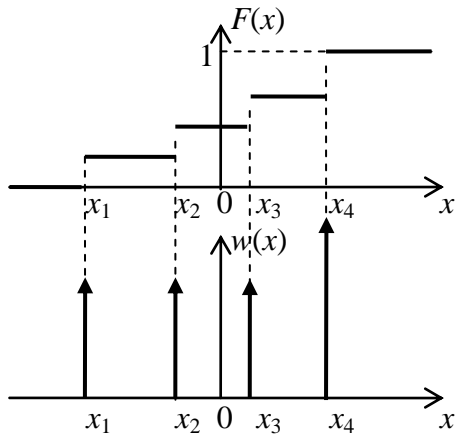
Для полного описания сечений $X(t_i)$ СП необходимо указать законы распределения значений СП в этих сечениях. Они могут быть заданы в интегральной (**функция распределения**) или дифференциальной (**плотность вероятности**) формах. В таблице 4.1., в порядке напоминания, приведены основные сведения об этих законах и их свойствах.

Таблица 4.1

Название и обозначение	Функция распределения $F(x)$	Плотность вероятности $w(x)$
Определение	$F(x) = P(X \leq x)$	$w(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{ \Delta x }$
Физическая размерность	безразмерная	размерность $\frac{1}{X}$
Взаимосвязь	$F(x) = \int_{-\infty}^x w(y) dy$	$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
Особенности функции	$F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$ (неубывающая)	$w(x) \geq 0$ (неотрицательная)
Расчет вероятности $P(x_1 \leq X \leq x_2)$	$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx$
Свойство нормировки	$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$

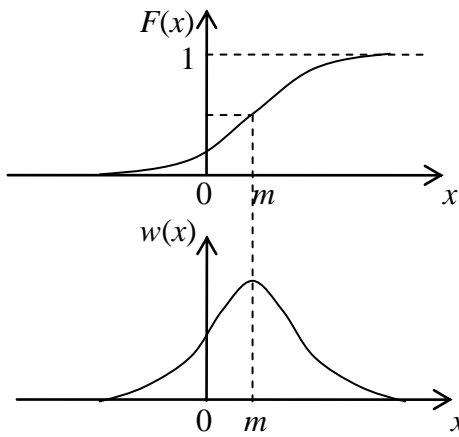
Примеры распределений случайных величин:

**Нормальное (гауссовское)
Распределение дискретной случайной величины**



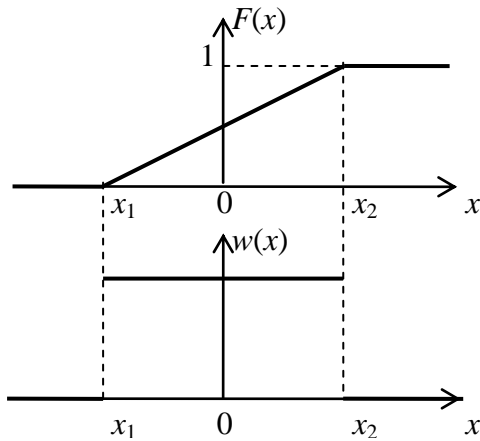
$$F(x) = \sum_{i=1}^4 P(x_i) \cdot 1(x - x_i)$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 P(x_i) \cdot \delta(x - x_i)$$



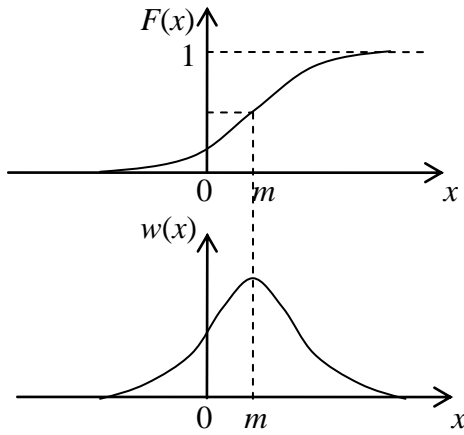
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



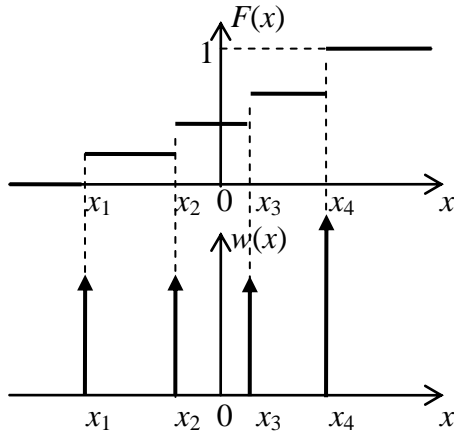
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 1 & x \geq x_2 \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & x \geq x_2 \end{cases}$$



$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



$$F(x) = \sum_{i=1}^4 P(x_i) \cdot 1(x - x_i)$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 P(x_i) \cdot \delta(x - x_i)$$

Информация о сечениях СП не является достаточной для описания самого СП, так как не содержит сведений о зависимостях сечений между собой. Исчерпывающее описание СП осуществляется с помощью n-мерной функции распределения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

или n-мерной плотности вероятности

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – аргументы, t_1, t_2, \dots, t_n – параметры этих функций, а n – любое целое число.

Если n-мерная функция распределения (плотность вероятности) СП не меняется при сдвиге всех моментов t_k ($k = 1, 2, \dots, n$) на один и тот же интервал Δt , то такой процесс называют стационарным в узком смысле.

4.2. Сокращенное описание случайных процессов

Полное описание СП не всегда возможно, да и не всегда требуется. Во многих случаях достаточно знать основные его характеристики. В качестве таковых широко используют:

Математическое ожидание СП – начальный момент первого порядка

$$M[X(t)] = \overline{X(t)} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, t) dx & \text{для непрерывного СП,} \\ \sum_{i=1}^m x_i P(x_i, t) & \text{для дискретного СП.} \end{cases}$$

Дисперсия СП – центральный момент второго порядка

$$D[X(t)] = \overline{[X(t) - \overline{X(t)}]^2} = \overline{X^2(t)} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} [x - \overline{X(t)}]^2 w(x, t) dx & \text{непр. СП,} \\ \sum_{i=1}^m [x_i - \overline{X(t)}]^2 P(x_i, t) & \text{дискр. СП.} \end{cases}$$

Здесь использовано понятие центрированного СП $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - \overline{X(t)}$.
 В общем случае можно использовать моменты k-го порядка:
 начальные

$$m_k[X(t)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k w(x, t) dx & \text{для непрерывного СП} \\ \sum_{i=1}^m x_i^k P(x_i, t) & \text{для дискретного СП} \end{cases}$$

центральные

$$\mu_k[X(t)] = \overset{\circ}{X}^k(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} [x - \overline{X(t)}]^k w(x, t) dx & \text{для непрерывного СП} \\ \sum_{i=1}^m [x_i - \overline{X(t)}]^k P(x_i, t) & \text{для дискретного СП} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что моменты полностью определяются одномерным распределением и в общем случае произвольного СП являются детерминированными функциями времени. Для стационарных в узком смысле СП моменты от времени не зависят.

Корреляционная (автокорреляционная) функция – центральный смешанный момент второго порядка

$$B_X(t_1, t_2) = \overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \overline{X(t_1)}][x_2 - \overline{X(t_2)}] w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Случайные процессы называют стационарными в широком смысле, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} M[X(t)] &= \text{const} \\ D[X(t)] &= \text{const} \\ B_X(t_1, t_2) &= B_X(\tau), \text{ где } \tau = t_2 - t_1 \end{aligned}$$

Очевидно, что стационарность СП в узком смысле влечет его стационарность в широком смысле, но не наоборот.

Некоторые свойства корреляционной функции СП:

$$\begin{aligned} 1. \quad B_X(0) &= \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t) = \overset{\circ}{X}^2(t) = D[X(t)] \\ 2. \quad |B_X(\tau)| &\leq B_X(0) = D[X(t)] \end{aligned}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \left[\overset{\circ}{X}(t) \pm \overset{\circ}{X}(t + \tau) \right]^2 &= \overset{\circ}{X}^2(t) \pm 2\overset{\circ}{X}(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t + \tau) + \overset{\circ}{X}^2(t + \tau) = \\ &= 2B_X(0) \pm 2B_X(\tau) \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует вышеуказанное неравенство

3. Корреляционная функция характеризует статистическую связь сечений СП (внутри процесса). Если связи между сечениями $\overset{\circ}{X}(t_1)$ и $\overset{\circ}{X}(t_2)$ нет (сечения статистически независимы), то $B_X(t_1, t_2) = 0$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} B_X(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \overline{X(t_1)}][x_2 - \overline{X(t_2)}] w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \overline{X(t_1)}][x_2 - \overline{X(t_2)}] w(x_1, t_1) w(x_2, t_2) dx_1 dx_2 = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \overline{X(t_1)}] w(x_1, t_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} [x_2 - \overline{X(t_2)}] w(x_2, t_2) dx_2 = \overline{\dot{X}(t_1)} \cdot \overline{\dot{X}(t_2)} = 0$$

Отсутствие связи влечет отсутствие корреляции, но не наоборот. Обратное утверждение справедливо лишь в случае нормального (гауссовского) процесса.

Нормальным называют СП, у которого одномерная плотность вероятности имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

где $m = M[X(t)] = \overline{X(t)}$, $\sigma^2 = D[X(t)]$,

а любая n-мерная плотность вероятности описывается выражением

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = A_n e^{-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)}$$

где A_n , c_{ij} , a_i , a_j – константы, определяемые выбором сечений t_1, t_2, \dots, t_n .

4. Корреляционная функция стационарного случайного процесса является четной $B_X(\tau) = B_X(-\tau)$.
Доказательство:

$$B_X(\tau) = \overline{\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_1 + \tau)}$$

Подставляя $t_2 = t_1 + \tau$, получим

$$B_X(\tau) = \overline{\dot{X}(t_2) \dot{X}(t_2 - \tau)} = B_X(-\tau)$$

5. Чтобы абстрагироваться от дисперсии и учитывать только связи внутри СП удобно пользоваться нормированной функцией корреляции (коэффициентом корреляции)

$$R_X(\tau) = \frac{B_X(t)}{D[X(t)]} = \frac{B_X(t)}{B_X(0)}$$

Очевидно, что $R_X(0) = 1$, $-1 \leq R_X(\tau) \leq 1$

6. Интервал корреляции – грубую числовую оценку связи внутри СП – чаще всего определяют методом равновеликого прямоугольника

$$\tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau$$

7. Взаимная корреляционная функция двух процессов $X(t)$ и $Y(t)$

$$B_{XY}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \left[\overline{\dot{X}(t_1) \dot{Y}(t_2)} + \overline{\dot{X}(t_2) \dot{Y}(t_1)} \right] =$$

$$= \overline{\dot{X}(t_1) \dot{Y}(t_2)} = \overline{\dot{X}(t_2) \dot{Y}(t_1)} = B_{YX}(t_1, t_2)$$

8. Корреляционная функция суммы независимых случайных процессов $Z(t) = X(t) + Y(t)$ есть сумма корреляционных функций каждого из слагаемых СП в отдельности $B_Z(t_1, t_2) = B_X(t_1, t_2) + B_Y(t_1, t_2)$

Доказательство:

$$B_Z(t_1, t_2) = \overline{\dot{Z}(t_1) \dot{Z}(t_2)} = \overline{\left[\dot{X}(t_1) + \dot{Y}(t_1) \right] \cdot \left[\dot{X}(t_2) + \dot{Y}(t_2) \right]} =$$

$$= \overline{\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)} + \overline{\dot{Y}(t_1) \dot{X}(t_2)} + \overline{\dot{X}(t_1) \dot{Y}(t_2)} + \overline{\dot{Y}(t_1) \dot{Y}(t_2)} =$$

$$= B_X(t_1, t_2) + \underbrace{B_{YX}(t_1, t_2)}_{0 \text{ (независимость)}} + \underbrace{B_{XY}(t_1, t_2)}_{0 \text{ (независимость)}} + B_Y(t_1, t_2)$$

Вместо усреднения по множеству реализаций случайного процесса можно ввести его усреднение по времени, определяя:

$$\overline{\widetilde{X}(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt$$

- постоянную составляющую СП,

- переменную составляющую СП,

$$X_{\sim}(t) = X(t) - \overline{\widetilde{X}(t)}$$

- мощность переменной составляющей СП.

$$\overline{\widetilde{X^2(t)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_{\sim}^2(t) dt = P_X$$

Нетрудно видеть, что эти характеристики являются случайными величинами, не зависящими от времени.

Случайные стационарные процессы называют эргодическими,

если их усреднение по множеству и по времени приводит к одинаковым результатам:

Эргодическое свойство СП заключается, грубо говоря, в том, что все его реализации «похожи» друг на друга.

Отсюда следует возможность получения вышеуказанных характеристик эргодического СП усреднением по времени единственной его реализации $x(t)$, что существенно облегчает построение аппаратуры для их

$$\overline{\widetilde{X(t)}} = \overline{\widetilde{X(t)}} = \text{const},$$

$$\overline{\widetilde{X^2(t)}} = D[X(t)] = \overline{\widetilde{X_{\sim}^2(t)}} = P_X = \text{const}.$$

измерений. В частности, функцию корреляции эргодического СП можно вычислить по одной реализации с помощью следующего выражения:

из которого вытекает схема коррелометра, приведенная на рис. 4.2.

4.3. Спектральный анализ случайных процессов

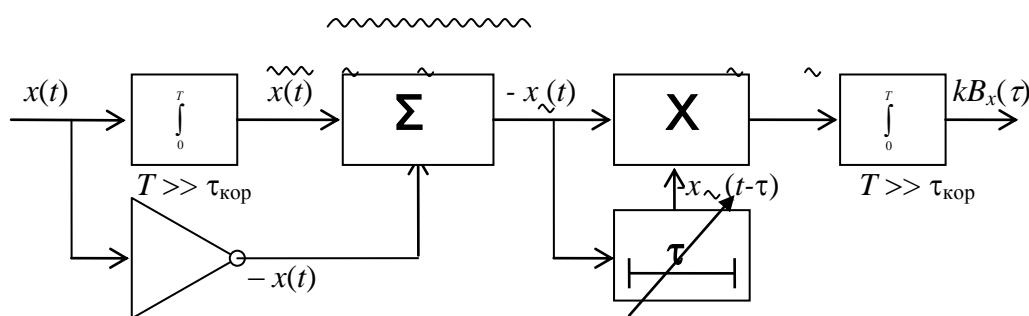


Рис. 4.2. Схема коррелометра

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$B_x(\tau) = \overline{x(t)x(t-\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau) dt,$$

Распространение этого подхода на случайные процессы наталкивается на ряд серьезных проблем:

1. $S_x(j\omega)$ существует только для функций $x(t)$, удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

или хотя бы интегрируемости в квадрате

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

т.е. для сигналов с ограниченной энергией. Однако реализации стационарных случайных процессов с вероятностью 1 имеют бесконечную энергию, так как по определению существуют на бесконечной оси времени и, следовательно, этим требованиям не отвечают. Эту трудность можно обойти, если рассматривать отношение

спектральной функции $S_x(j\omega)$ к длительности сигнала T . Тогда достаточным будет требование ограниченной мощности сигнала $x(t)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt < \infty$$

2. Спектральная функция $S_x(j\omega)$ характеризует отдельные реализации $x(t)$ случайного процесса $X(t)$, а не сам процесс целиком. Попытка перейти, как обычно, к усреднению по ансамблю оказывается несостоятельной.

Действительно, если определить математическое ожидание случайной спектральной функции $S_x(j\omega)$

$$\overline{S_x(j\omega)} = S_x(\omega) e^{j\Psi(\omega)}$$

где $S_x(\omega)$ - амплитудный, а $\Psi(\omega)$ - фазовый спектры случайного процесса $X(t)$, то для независимых $S_x(\omega)$ и $\Psi(\omega)$ при равномерном распределении $\Psi(\omega)$ в интервале $[-\pi, +\pi]$ получим нулевой результат усреднения для ненулевых процессов.

Выход из этой ситуации состоит в отбрасывании фазового и усреднении только амплитудного спектра

$$S_x(\omega) = |S_x(j\omega)| \quad \text{или} \quad |S_x(j\omega)|^2$$

Для реализаций случайных процессов $X(t)$ с ограниченной энергией E_x (нестационарных) по теореме Парсеваля имеем

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j2\pi f)|^2 df < \infty$$

где $|S_x(j2\pi f)|^2$ - спектральная плотность энергии реализации $x(t)$.

Усредняя по ансамблю реализаций, получим $|S_x(j2\pi f)|^2$ - спектральную плотность энергии случайного процесса $X(t)$ с размерностью

$\frac{B^2 \text{ (или } A^2)}{\Gamma_{\text{Ц}}^2} = \frac{B^2 \text{ (или } A^2) \text{ с}}{\Gamma_{\text{Ц}}}$, что соответствует размерности $\frac{\text{энергия}}{\Gamma_{\text{Ц}}}$, если иметь в виду действие $X(t)$ на сопротивлении 1 Ом.

$$G_{X,T}(f) = \frac{|S_{X,T}(j2\pi f)|^2}{T}$$

Для стационарных случайных процессов на интервале T рассмотрим функцию

$\frac{\text{МОЩНОСТЬ}}{\Gamma_{\text{Ц}}}$ имеющую размерность $\frac{\text{МОЩНОСТЬ}}{\Gamma_{\text{Ц}}}$. Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$, получим спектральную плотность мощности

$$G_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_{X,T}(j2\pi f)|^2 \quad (4.1)$$

называемую также энергетическим спектром процесса $X(t)$.

Энергетический спектр стационарного случайного процесса и его корреляционная функция связаны между собой интегральными преобразованиями Фурье, что было строго доказано А.Я. Хинчиным и Н. Винером (теорема Винера-Хинчина)

$$G_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (4.2)$$

$$B_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (4.3)$$

Рассмотрим нестрогое доказательство этой теоремы с прозрачным смыслом. Исходя из вышеприведенного определения энергетического спектра, имеем

$$G_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{|S_{X,T}(j2\pi f)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{S_{X,T}(j2\pi f) S_{X,T}^*(j2\pi f)} =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t_2) e^{j2\pi f t_2} dt_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t_1) X(t_2) e^{-j2\pi f (t_1 - t_2)} dt_1 dt_2} =$$

(после замены переменных $t_2 = t, t_1 - t_2 = \tau, t_1 = t + \tau, dt_1 = d\tau, dt_2 = dt$)

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) X(t + \tau) e^{-j2\pi f \tau} dt d\tau} =$$

(после замены усреднения по ансамблю усреднением по времени)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

что и требовалось доказать.

Свойства энергетических спектров случайных процессов

1. $G_X(f) \geq 0$, что непосредственно следует из его определения (4.1). Из этого факта и соотношения (4.3)

вытекает важное следствие для корреляционной функции $B_X(\tau)$ – она является положительно определенной, т.е. имеет неотрицательное преобразование Фурье.

2. $G_X(f)$ – четная функция.

$$G_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) [\cos 2\pi f \tau - j \sin 2\pi f \tau] d\tau =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau}_{\text{четная функция}} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) \sin 2\pi f \tau d\tau}_{\text{нечетная функция}} = 2 \int_0^{\infty} B_X(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau$$

На этом свойстве основано понятие одностороннего энергетического спектра, существующего только в области положительных частот

$$G_O(f) = 2G(f) \quad f > 0$$

$$3. \quad G_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) d\tau$$

$$4. \quad B_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f) df = D[X(t)] = P_X$$

5. Нормированный энергетический спектр

$$\gamma_X(f) = \frac{G_X(f)}{D[X(t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_X(f) df = 1$$

Примеры энергетических спектров некоторых стационарных СП:

Квазибелый шум $N(t)$

$$N = \frac{N_0}{2}$$

Энергетический спектр такого процесса () равномерен в ограниченной полосе частот $(-F, +F)$ (рис. 4.3).

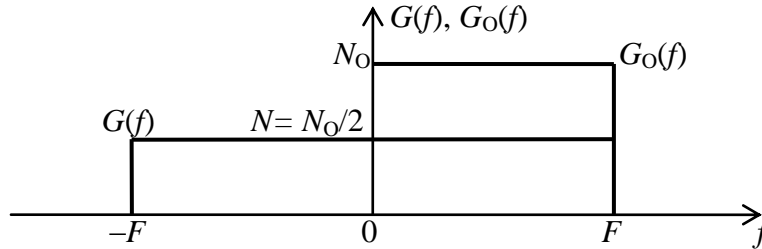


Рис. 4.3. Энергетический спектр квазибелого шума

Корреляционная функция квазибелого шума имеет вид (рис. 4. 4)

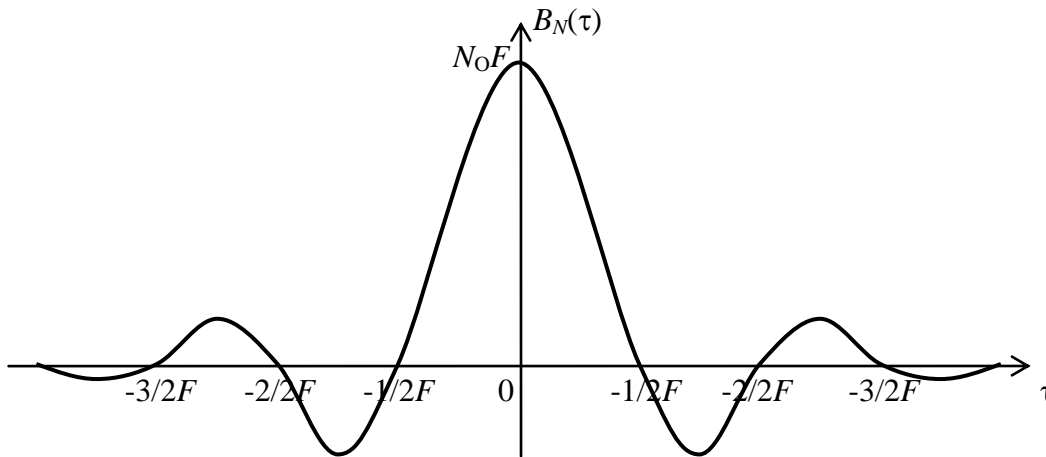


Рис. 4.4. Корреляционная функция квазибелого шума

Из полученного результата вытекает некоррелированность отсчетов квазибелого шума, взятых через интервалы

длины времени $k/2F$. Для нормального процесса эти отсчеты оказываются еще и независимыми.

Белый шум $N(t)$

$$N = \frac{N_0}{2}$$

Энергетический спектр белого шума () равномерен в бесконечной полосе частот (рис. 4.5).

Корреляционная функция белого шума (рис. 4.6)

$$B_N(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_N(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

здесь использовано одно из определений дельта-функции

$$\delta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f\tau} df$$

Из этих результатов вытекает статистическая независимость любых сколь угодно близких сечений такого процесса и его неограниченная дисперсия (мощность)

$$D[N(t)] = \sigma^2 = P_N = N\delta(0) = \frac{N_0}{2} \delta(0) \rightarrow \infty$$

Синхронный телеграфный сигнал $X(t)$

Синхронный телеграфный сигнал (СТС) представляет собой стационарный дискретный случайный процесс, принимающий на тактовых интервалах длительностью T значения $+h$ с вероятностью $P(0)$ или $-h$ с вероятностью $P(1)$. Возможная реализация такого процесса показана на рис. 4.7.

Вычислим корреляционную функцию СТС, исходя из ее определения

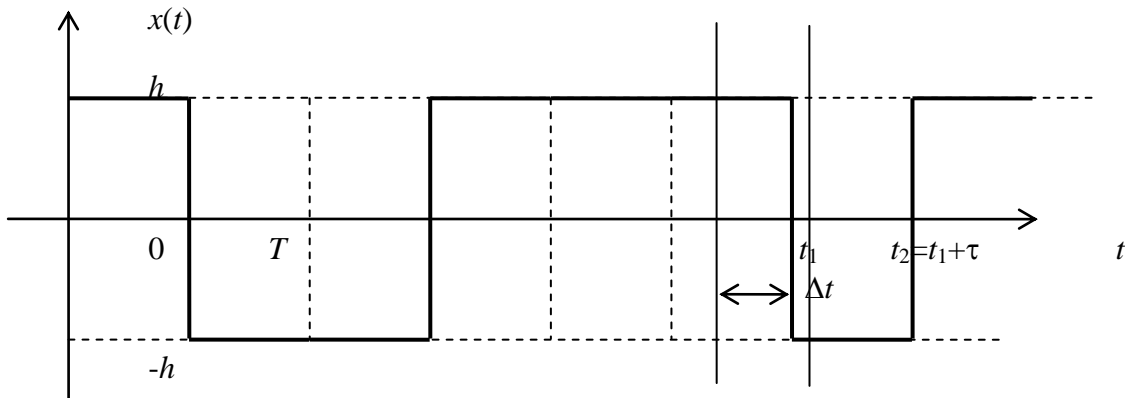


Рис. 4.7. К расчету корреляционной функции телеграфного сигнала

$$B_X(t_1, t_2) = \overline{\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)} = \overline{[X(t_1) - \overline{X(t_1)}][X(t_2) - \overline{X(t_2)}]},$$

где

$$\overline{X(t_1)} = hP(0) + (-h)P(1)$$

В силу стационарности и при $P(0) = P(1) = 0,5$ имеем $\overline{X(t_1)} =$

$$\overline{X(t_2)} = 0 \text{ и}$$

$$B_X(t_1, t_2) = B_X(\tau) = \overline{X(t_1)X(t_1 + \tau)}$$

Далее учтем, что произведение $X(t_1)X(t_1 + \tau) = h^2$, если $\tau < \Delta t$, где Δt – временной интервал от сечения t_1 до ближайшей границы такта (сечения принадлежат одному тактовому интервалу). В противном случае (при $\Delta t < \tau < T$)

$$\overline{X(t_1)X(t_1 + \tau)} = h^2[P(0/0) + P(1/1)] - h^2[P(0/1) + P(1/0)] = 0,$$

где $P(0/0)$, $P(0/1)$, $P(1/0)$ и $P(1/1)$ – переходные вероятности передачи символов в соседних тактовых интервалах, которые будем считать одинаковыми.

Таким образом

$$B_X(\tau) = \overline{X(t_1)X(t_1 + \tau)} = h^2 P(T > \Delta t > \tau) = h^2 \int_{\tau}^T w(\Delta t) d(\Delta t) = h^2 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right),$$

где $w(\Delta t) = \frac{1}{T}$ – плотность вероятности временного интервала Δt . Окончательно, учитывая свойство четности корреляционной функции стационарного процесса, получим

$$B_X(\tau) = h^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)$$

По полученной корреляционной функции несложно рассчитать энергетический спектр синхронного телеграфного сигнала (4.2)

$$\begin{aligned}
 G_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 2h^2 \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cos(2\pi f\tau) d\tau = \\
 &= 2h^2 \int_0^T \cos(2\pi f\tau) d\tau - \frac{2h^2}{T} \int_0^T \tau \cos(2\pi f\tau) d\tau = \\
 &= 2h^2 \frac{\sin 2\pi fT}{2\pi f} - \frac{2h^2}{T} \underbrace{\left[\frac{\tau \sin(2\pi f\tau)}{2\pi f} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f} d\tau \right]}_{\text{интегрирование по частям}} = \\
 &= \frac{2h^2}{T} \frac{\cos(2\pi fT)}{(2\pi f)^2} \Big|_0^T = \frac{2h^2}{T(2\pi f)^2} \underbrace{[1 - \cos(2\pi fT)]}_{2\sin^2(\pi fT)} = h^2 T \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}
 \end{aligned}$$

Графики корреляционной функции и энергетического спектра синхронного телеграфного сигнала приведены на рис. 4.8.

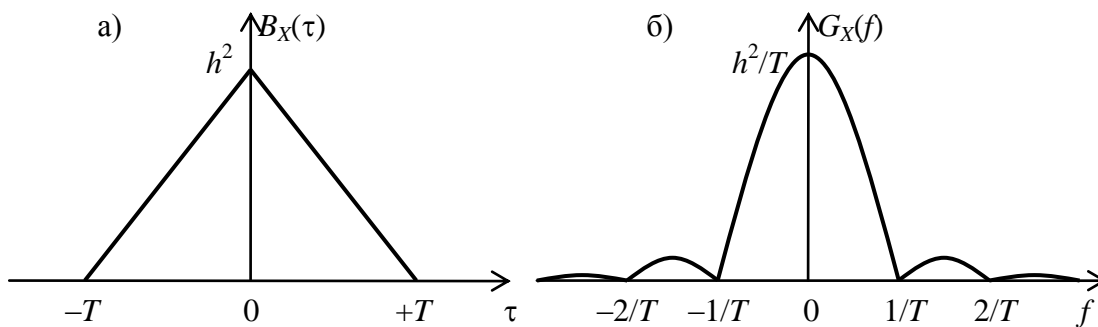


Рис. 4.8. Корреляционная функция (а) и энергетический спектр (б) синхронного телеграфного сигнала

5. Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов

В общем случае решение задачи прохождения заданного СП через конкретную электрическую цепь – функциональный узел (ФУ) произвольной сложности предполагает определение n-мерной плотности вероятности (или функции распределения) реакции цепи $Y(t)$ на заданное случайное воздействие $X(t)$ (рис. 5.1). Однако общего метода решения такой задачи не существует. Поэтому ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев.

5.1. Прохождение случайных процессов через безынерционные цепи

Безынерционная цепь (безынерционный функциональный узел –БФУ) полностью описывается

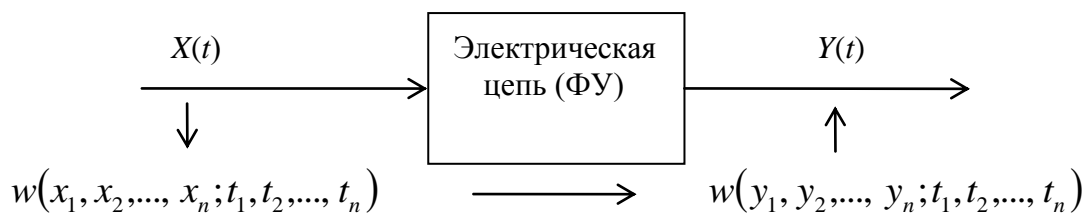


Рис. 5.1. К постановке задачи прохождения СП через электрическую цепь

функциональной зависимостью $y = f(x)$, связывающей мгновенные значения воздействия $x(t)$ и реакции $y(t)$ в совпадающие моменты времени. В результате имеем дело с функциональным преобразованием случайного процесса $Y(t) = f[X(t)]$.

Для вычисления одномерной плотности вероятности реакции $w(y)$ по известной плотности вероятности воздействия $w(x)$ рассмотрим рис. 5.2, на котором изображены функциональная характеристика БФУ $y = f(x)$, заданная плотность вероятности воздействия $w(x)$ и искомая плотность вероятности реакции БФУ $w(y)$. Учитывая, что при попадании случайной величины X в интервал $(x, x+dx)$ случайная величина Y с вероятностью 1 попадает в соответствующий ему интервал $(y, y+dy)$, можно написать следующее соотношение

$$P(x \leq X \leq x + dx) = w_X(x) |dx| = P(y \leq Y \leq y + dy) = w_Y(y) |dy|,$$

из которого вытекает

$$w_Y(y) = w_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = w_X[f^{-1}(y)] \underbrace{\left| \frac{d[f^{-1}(y)]}{dy} \right|}_{\text{обратная крутизна}}, \quad (5.1)$$

где $f^{-1}(y)$ – обратная функция ($x = x(y) = f^{-1}(y)$).

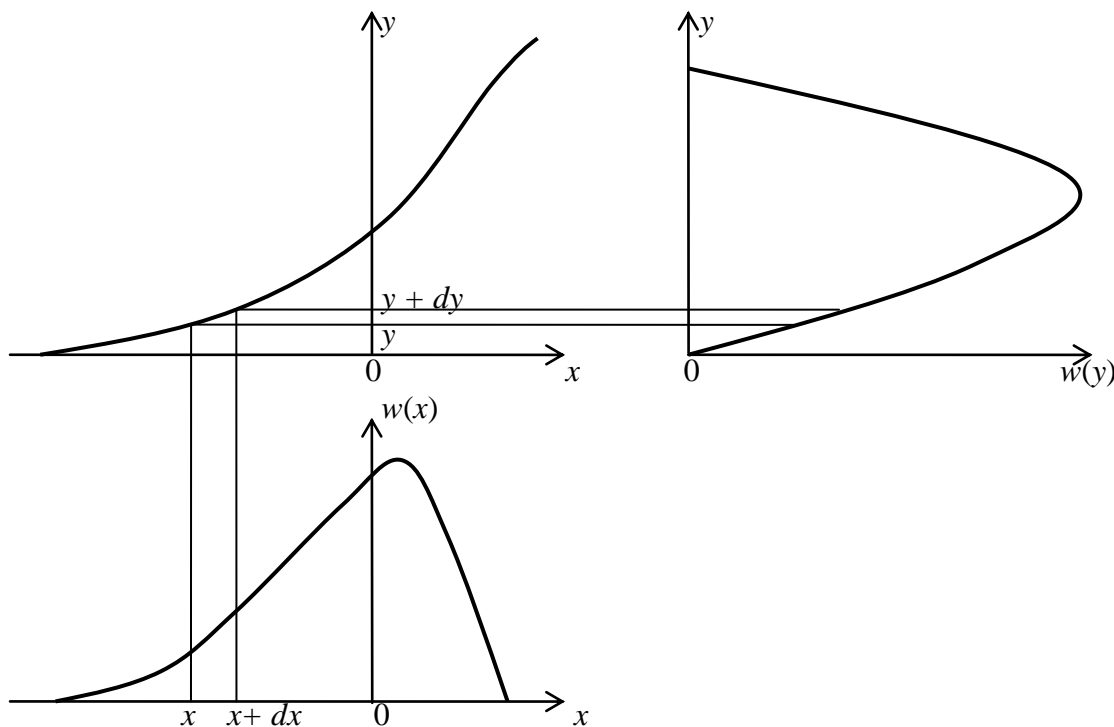


Рис. 5.2. К расчету $w(y)$ на выходе БФУ.

Дифференциалы dx , dy и производная обратной функции в полученном выражении взяты по модулю в силу свойства положительности плотности вероятности.

Примеры:

1. Линейное безынерционное преобразование $y = f(x) = ax + b$.

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a},$$

Обратная функция

$$w_Y(y) = w_X\left(\frac{y - b}{a}\right) \frac{1}{|a|}.$$

Таким образом, при линейном преобразовании случайной величины ее кривая плотности распределения смещается на величину b , а масштаб по координатным осям изменяется в $|a|$ раз.

2. Кусочно-линейное преобразование $y = f(x)$ (рис. 5.3).

Задачу решим графически, определяя вид кривой $w_Y(y)$ на отдельных интервалах оси y .

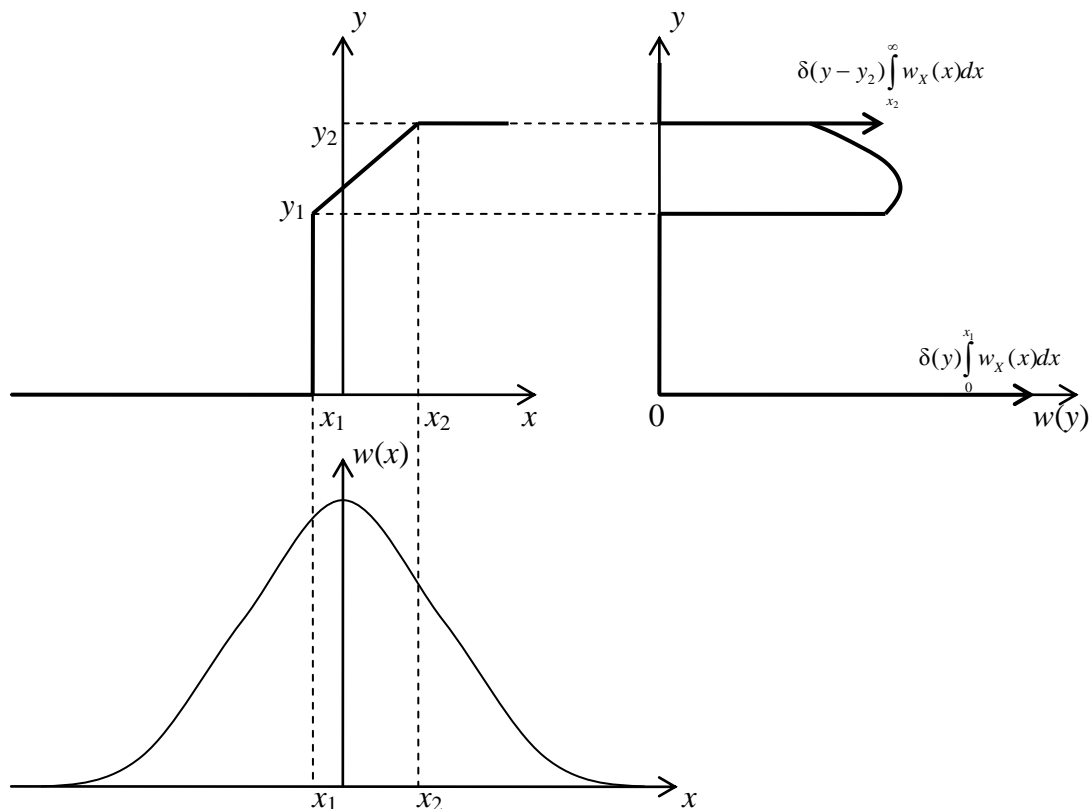


Рис. 5.3. Кусочно-линейное преобразование случайной величины.

Из рассмотрения функциональной характеристики $y = f(x)$ с очевидностью вытекает, что

а) при $y < 0$ и $y > y_2$ $w_Y(y) = 0$, т. к. значения реакции y не могут выйти за пределы уровней отсечки ($y = 0$) и насыщения ($y = y_2$);

б) при $0 < y < y_1$ $w_Y(y) = 0$, т. к. в этот интервал (протяженностью y_1) значения реакции попадают при единственном значении воздействия $x = x_1$, вероятность которого $w_X(x_1)dx \rightarrow 0$;

в) при $y_1 \leq y < y_2$

$$w_Y(y) = w_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}, \quad \text{где } b = y_1, \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{см. пример 1});$$

г) при $y = 0$

$$w_Y(y) = \delta(y) \int_{-\infty}^{x_1} w_X(x) dx \rightarrow \infty, \quad \text{т. к. } y = 0 \text{ для всех } x < x_1;$$

д) при $y = y_2$

$$w_Y(y) = \delta(y - y_2) \int_{x_2}^{\infty} w_X(x) dx, \quad \text{т. к. } y = y_2 \text{ для всех } x > x_2.$$

3. Преобразование при неоднозначной обратной функции

$$x = f^{-1}(y)$$

На практике встречаются ситуации, когда обратная функциональная характеристика является многозначной (рис. 5. 4). Рассуждая аналогично тому, как это делали при выводе выражения (5.1), легко убедиться в том, что

в этом случае для интервала $y_H < y < y_B$

$$w_Y(y) = \sum_{i=1}^3 w_X[x_i(y)] \left| \frac{d[x_i(y)]}{dy} \right| = \sum_{i=1}^3 w_X[f_i^{-1}(y)] \left| \frac{d[f_i^{-1}(y)]}{dy} \right|$$

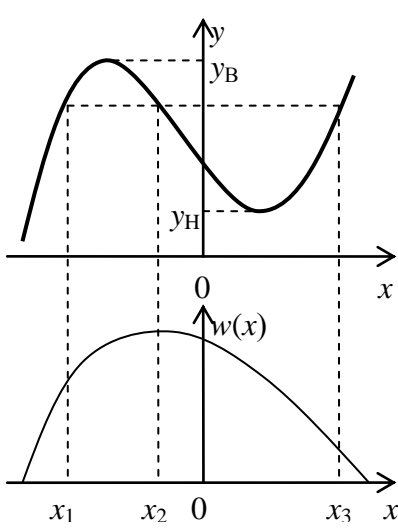


Рис. 5.4. К расчету распределения реакции БФУ с неоднозначной обратной функциональной характеристикой

Если при анализе прохождения СП через БФУ достаточно знать только основные характеристики распределения реакции, то их можно найти, не определяя $w_Y(y)$. В частности: математическое ожидание

$$M[Y(t)] = \overline{Y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} y w_Y(y, t) dy = \overline{f[X(t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w_X(x, t) dx$$

дисперсия

$$D[Y(t)] = \overline{[Y(t) - \overline{Y(t)}]^2} = \overline{[f[X(t)] - \overline{f[X(t)}]}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - \overline{f[X(t)}]}^2 w_X(x, t) dx,$$

функ

ция корреляции

$$B_Y(t_1, t_2) = \overline{Y(t_1)Y(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [y_1 - \overline{Y(t_1)}][y_2 - \overline{Y(t_2)}] w(y_1, y_2; t_1, t_2) dy_1 dy_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x_1) - \overline{f[X(t_1)}] \cdot [f(x_2) - \overline{f[X(t_2)}] w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Функциональное преобразование двух случайных процессов

Постановка задачи:

Заданы два случайных процесса $X_1(t)$ и $X_2(t)$ с известной совместной плотностью вероятности их значений в совпадающие моменты времени $w(x_1, x_2; t)$. С этими процессами связаны два других СП $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ известными функциональными зависимостями

$$y_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Требуется определить $w(y_1, y_2; t)$ – совместную плотность вероятности процессов $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ в совпадающие моменты времени.

Решение:

По аналогии с (5.1) можно написать следующее соотношение

$$w(y_1, y_2; t) = w(x_1, x_2; t) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = w[\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2); t] |J|$$

где J – якобиан преобразования переменных x_1, x_2 в y_1, y_2

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

5.2. Прохождение случайных процессов через линейные цепи

Общей процедуры определения закона распределения реакции линейного ФУ на произвольное случайное воздействие не существует. Однако, возможен корреляционный анализ, т. е. расчет корреляционной функции реакции по заданной корреляционной функции воздействия, который удобно проводить спектральным методом по схеме, показанной на рис. 5.5.

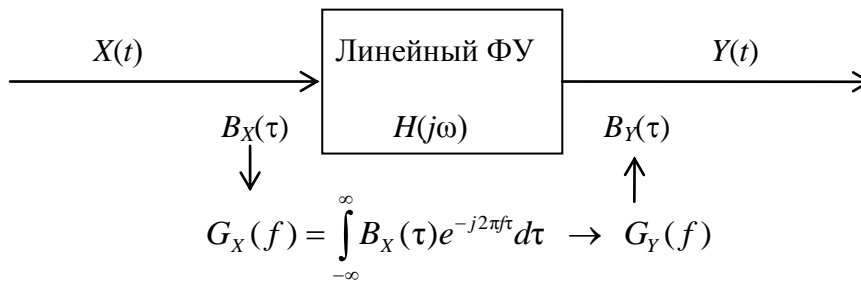


Рис. 5.5. Схема вычисления корреляционной функции реакции ФУ

Для вычисления энергетического спектра $G_Y(f)$ реакции линейного ФУ с передаточной функцией $H(j\omega)$ воспользуемся его определением (4.1)

$$G_Y(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_{Y,T}(jf)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} S_{Y,T}(jf) S_{Y,T}^*(jf) =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} S_{X,T}(jf) H(jf) S_{X,T}^*(jf) H^*(jf) = G_X(f) |H(jf)|^2$$

Функцию корреляции $B_Y(\tau)$ определим преобразованием Фурье энергетического спектра $G_Y(f)$

$$B_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_Y(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Вернемся к определению закона распределения реакции линейного ФУ в отдельных частных случаях:

Линейное преобразование нормального СП порождает также нормальный процесс. Измениться могут только параметры его распределения.

Сумма нормальных СП (реакция сумматора) есть также нормальный процесс.

При прохождении СП с произвольным распределением через узкополосный фильтр (т.е. при ширине полосы пропускания фильтра ΔF существенно меньшей ширины энергетического спектра воздействия Δf_X) наблюдается явление нормализации распределения реакции $Y(t)$. Оно заключается в том, что закон распределения реакции приближается к нормальному. Степень этого приближения тем больше, чем сильнее неравенство $\Delta F \ll \Delta f_X$ (рис. 5.6).

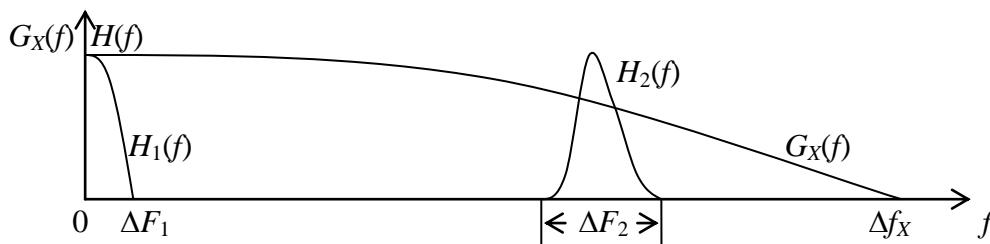


Рис. 5.6. Спектр широкополосного СП и АЧХ узкополосных ФНЧ и ПФ.

Объяснить это можно следующим образом. В результате прохождения СП через узкополосный фильтр происходит существенное уменьшение ширины его энергетического спектра (с Δf_X до ΔF) и, соответственно, увеличение времени корреляции (с τ_X до τ_Y). В результате между некоррелированными отсчетами реакции фильтра $Y(k\tau_Y)$ располагается примерно $\Delta f_X / \Delta F$ некоррелированных отсчетов воздействия $X(l\tau_X)$, каждый из которых дает вклад в формирование единственного отсчета реакции с весом, определяемым видом импульсной характеристики фильтра.

$$Y(k\tau_Y) = \int_0^{k\tau_Y} g(\tau) X(k\tau_Y - \tau) d\tau \cong \sum_{l=1}^{\tau_Y/\tau_X} g(l\tau_X) X(k\tau_Y - l\tau_X)$$

Таким образом, в некоррелированных сечениях $Y(k\tau_Y)$ происходит суммирование большого числа также некоррелированных случайных величин $X(l\tau_X)$ с ограниченными математическими ожиданиями и дисперсиями, что в соответствии с центральной предельной теоремой (А.М. Ляпунова) обеспечивает приближение распределения их суммы к нормальному с увеличением числа слагаемых.

5.3. Узкополосные случайные процессы

СП $X(t)$ с относительно узким энергетическим спектром ($\Delta fX \ll fc$) как и узкополосные детерминированные сигналы удобно представлять в квазигармонической форме (см. раздел 2.5)

$$X(t) = A(t) \cos \Psi(t) = A(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)],$$

где огибающая $A(t)$, фаза $\Psi(t)$ и начальная фаза $\varphi(t)$ являются случайными процессами, а ω_c – частота, выбираемая произвольно (обычно как средняя частота его спектра).

Для определения огибающей $A(t)$ и фазы $\Psi(t)$ целесообразно воспользоваться аналитическим СП

$$\dot{X}(t) = X(t) + j\tilde{X}(t) = A(t)e^{j\Psi(t)}$$

Тогда

$$A(t) = |\dot{X}(t)| = \sqrt{X^2(t) + \tilde{X}^2(t)}, \quad (5.3)$$

$$\Psi(t) = \arctg \frac{\tilde{X}(t)}{X(t)} + \begin{cases} 0 & \text{при } X(t) > 0 \\ \pi & \text{при } X(t) < 0 \end{cases}, \quad (5.4)$$

$$X(t) = \operatorname{Re}[\dot{X}(t)] = A(t) \cos \Psi(t), \quad (5.5)$$

$$\tilde{X}(t) = \operatorname{Im}[\dot{X}(t)] = H[X(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\tau)}{t - \tau} d\tau = A(t) \sin \Psi(t) \quad (5.6)$$

Основные моментные функции аналитического СП $\dot{X}(t)$:

Математическое ожидание

$$M[\dot{X}(t)] = \overline{\dot{X}(t)} = \overline{X(t)} + j\overline{\tilde{X}(t)}$$

Дисперсия

$$D[\dot{X}(t)] = M\left[|\dot{X}(t) - \overline{\dot{X}(t)}|^2\right] = \overline{|\dot{X}(t)|^2} = \overline{\dot{X}(t) \dot{X}^*(t)}$$

Функция корреляции

$$B_{\dot{X}}(t_1, t_2) = \overline{\dot{X}(t_1) \dot{X}^*(t_2)},$$

при этом

$$B_{\dot{X}}(t_1, t_1) = \overline{\dot{X}(t_1) \dot{X}^*(t_1)} = D[\dot{X}(t)],$$

$$B_{\dot{X}}(t_2, t_1) = B_{\dot{X}}^*(t_1, t_2)$$

Аналитический СП называют стационарным, если

$$M[\dot{X}(t)] = \overline{\dot{X}(t)} = \text{const},$$

$$B_{\dot{X}}(t_1, t_2) = B_{\dot{X}}(\tau),$$

$$D[\dot{X}(t)] = B_{\dot{X}}(0) = \text{const}$$

откуда

Рассмотрим типичную в технике связи задачу прохождения нормального СП через полосовой фильтр (ПФ), амплитудный (АД) и фазовый (ФД) детекторы (рис. 5.7). Сигнал на выходе ПФ становится узкополосным

$$X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

а это означает, что его огибающая $A(t)$ и начальная фаза $\varphi(t)$ будут

медленно меняющимися функциями времени по сравнению с $\cos \omega_0 t$, где ω_0 – средняя частота полосы пропускания ПФ. По определению, сигнал на выходе АД будет пропорционален огибающей входного сигнала $A(t)$, а на выходе ФД – его начальной фазе $\varphi(t)$. Таким образом, для решения этой задачи достаточно вычислить

распределение огибающей $A(t)$ и фазы $\Psi(t)$ (распределение начальной фазы $\varphi(t) = \Psi(t) - \omega_0 t$ отличается от распределения $\Psi(t)$ только математическим ожиданием $\omega_0 t$).

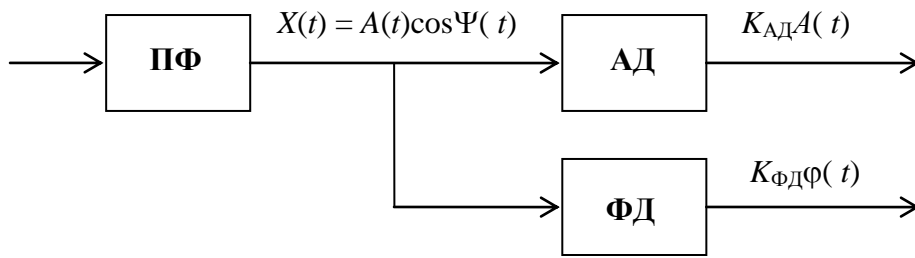


Рис. 5.7. Прохождение СП через полосовой фильтр и детекторы.

Постановка задачи

Дано:

$X(t) = A(t)\cos\Psi(t)$ – узкополосный центрированный стационарный нормальный СП (на выходе ПФ),

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

Определить:

$w(A)$ – одномерную плотность вероятности огибающей,

$w(\Psi)$ – одномерную плотность вероятности фазы.

Для решения этой задачи наметим три этапа:

1. Переход к аналитическому СП $\dot{X}(t) = X(t) + j\tilde{X}(t) = A(t)e^{j\Psi(t)}$ и определение совместной плотности вероятности $w(x, \tilde{x})$.

2. Расчет совместной плотности вероятности $w(A, \Psi)$ по вычисленной на первом этапе $w(x, \tilde{x})$ и связям $A(t), \Psi(t)$ с $X(t), \tilde{X}(t)$ (5.3) ÷ (5.6).

3. Определение одномерных плотностей вероятности $w(A)$ и $w(\Psi)$ по вычисленной совместной плотности вероятности $w(A, \Psi)$.

Решение

1 этап. Найдем одномерную плотность вероятности $w(\tilde{x})$ процесса $\tilde{X}(t)$. На основе линейности преобразования Гильберта $\tilde{X}(t) = H[X(t)]$ делаем вывод о том, что $\tilde{X}(t)$ – нормальный СП. Далее,

учитывая, что $G_{\tilde{X}}(f) = G_X(f)$, получаем $B_{\tilde{X}}(\tau) = B_X(\tau)$, а следовательно

$$\sigma_{\tilde{X}}^2 = B_{\tilde{X}}(0) = B_X(0) = \sigma_X^2$$

Таким образом, имеем

$$w(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2\sigma_x^2}}$$

Докажем некоррелированность $X(t)$ и $\tilde{X}(t)$ в совпадающие моменты времени, т. е. что $B_{X, \tilde{X}}(0) = 0$.

$$B_{X, \tilde{X}}(0) = \overline{X(t)\tilde{X}(t)} = X(t) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

После подстановки $t - \tau = y$, $\tau = t - y$, $d\tau = -dy$, учитывая, что при $\tau \rightarrow \infty$ $y \rightarrow -\infty$, получим

$$\begin{aligned}
B_{x,\tilde{x}}(0) &= -X(t) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t-y)}{y} dy = X(t) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t-y)}{y} dy = \\
&= \frac{1}{\pi} X(t) \left[\int_0^{\infty} \frac{X(t-y)}{y} dy + \int_{-\infty}^0 \frac{X(t-y)}{y} dy \right] = \frac{1}{\pi} X(t) \left[\int_0^{\infty} \frac{X(t-y)}{y} dy - \int_0^{\infty} \frac{X(t+y)}{y} dy \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[X(t) \int_0^{\infty} \frac{X(t-y) - X(t+y)}{y} dy \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{B_X(y) - B_X(-y)}{y} dy = 0
\end{aligned}$$

Некоррелированность сечений нормальных процессов влечет их независимость, следовательно

$$w(x, \tilde{x}) = w(x)w(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2 + \tilde{x}^2}{2\sigma_x^2}}$$

2 этап. Расчет совместной плотности вероятности

$$w(A, \Psi) = w(x, \tilde{x}) |J|$$

где согласно (5.2), (5.5) и (5.6)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial A} & \frac{\partial x}{\partial \Psi} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial A} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \Psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \Psi & -A \sin \Psi \\ \sin \Psi & A \cos \Psi \end{vmatrix} = A$$

Следовательно, с учетом (5.3) имеем

$$w(A, \Psi) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2 + \tilde{x}^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}} \quad (5.7)$$

3 этап. Определение одномерных плотностей вероятности

$$\begin{aligned}
w(A) &= \int_0^{2\pi} w(A, \Psi) d\Psi = \int_0^{2\pi} \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}} d\Psi = \frac{A}{\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}} \\
w(\Psi) &= \int_0^{\infty} w(A, \Psi) dA = \int_0^{\infty} \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}} dA = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{A}{\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}}}_{w(A)} dA = \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

Окончательно

$$w(A) = \frac{A}{\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}} \quad (A \geq 0) \quad (5.8)$$

$$w(\Psi) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \Psi \leq 2\pi) \quad (5.9)$$

Выражение (5.8) известно как распределение Рэлея, его график приведен на рис. 5.8. На рис. 5.9 приведен график равномерного распределения фазы (5.9).

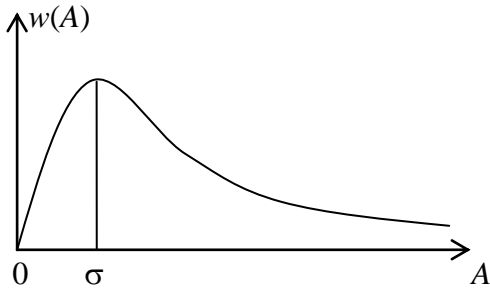


Рис. 5.8. Распределение огибающей $A(t)$

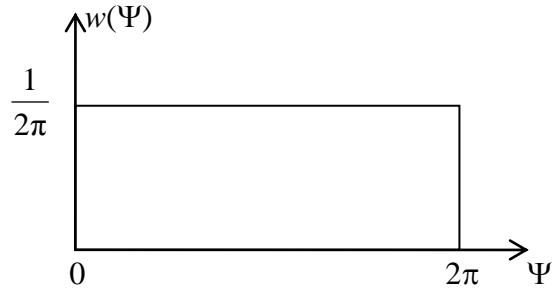


Рис. 5.9. Распределение фазы $\Psi(t)$

Выражение (5.7) можно представить в виде произведения (5.8) и (5.9)

$$w(A, \Psi) = w(A)w(\Psi),$$

из чего следует независимость огибающей $A(t)$ и фазы $w(\Psi)$ нормального СП. воздействие $X(t)$?

6. Оптимальный прием дискретных сообщений

6.1. Постановка задачи

Дано:

Источник дискретных сообщений. Это значит, что известен ансамбль передаваемых сообщений

$$B = \{b_i\}_m \quad i = 1, 2, \dots, m, \text{ где } m - \text{объем алфавита источника}$$

и их статистика (распределение вероятностей) $P(b_i)$.

Модулятор. Это значит, что известны правила преобразования каждого сообщения в непрерывный сигнал и длительность сигнала T

$$b_i \rightarrow s_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad t \in (0, T).$$

Непрерывный канал. Канал задается своей математической моделью, описывающей связь его реакции $Z(t)$ с воздействием $s_i(t)$ и канальными помехами $N(t)$, например

$$Z(t) = s_i(t) + N(t); \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Тактовая синхронизация осуществляется идеально. Вопросы синхронизации не рассматриваются в рамках курса ТЭС, поэтому здесь и в дальнейшем всегда будем считать, что границы между сигналами $s_i(t)$ в приемнике определяются точно, иначе говоря, в нем осуществляется дискретизация времени функцией $\delta(t-kT)$, при которой границы тактов совпадают с границами сигналов.

Требуется:

Определить правило решения (решающую схему) вида

$$z(t) \rightarrow \hat{b}_j \quad t \in T, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

т.е. указать, каким образом на основе анализа принятой реализации $z(t)$ СП $Z(t)$ на каждом интервале T

следует принимать решение \hat{b}_j о переданном символе b_i (при $j = i$ имеет место правильный прием, иначе (при $j \neq i$) – ошибочный).

Дадим геометрическую трактовку этой постановке задачи (рис. 6.1). Совокупность всех возможных реализаций $z(t)$ образует пространство принимаемых колебаний (обычно бесконечномерное пространство Гильберта $L_2(T)$)

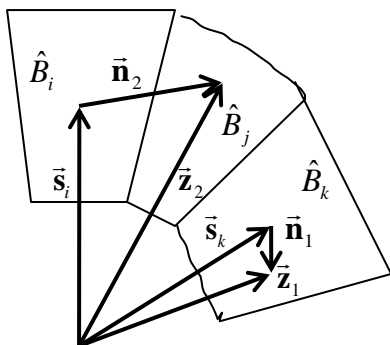


Рис. 6.1. Геометрическая трактовка постановки задачи

в котором присутствуют m различных векторов \vec{s}_i передаваемых сигналов $s_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Выбор правила решения таким образом сводится к разбиению этого пространства на m непересекающихся

областей \hat{B}_i , каждая из которых соответствует принятию решения о передаче конкретного сообщения b_i (сигналом $s_i(t)$). На рис. 6.1. показаны две ситуации: 1) конец вектора колебания

$z_1(t) = s_k(t) + n_1(t)$ попадает в область \hat{B}_k отведенную под решение о передаче сообщения b_k сигналом $s_k(t)$, что соответствует правильному приему; 2) конец вектора колебания

$z_2(t) = s_i(t) + n_2(t)$ попадает в область \hat{B}_j , отведенную под

решение о передаче сообщения b_j сигналом $s_j(t)$, что соответствует ошибочному приему.

Разные правила решения (разные приемные устройства) различаются способом разбиения пространства

принимаемых колебаний на области \hat{B}_i . В этой связи возникает задача наилучшего разбиения, которое, очевидно, всегда существует в определенном смысле. Например, если сообщение b_i передается чаще сообщения b_j и важно, чтобы как можно меньше передаваемых символов принимались ошибочно, то следует

область \hat{B}_i расширить за счет области \hat{B}_j . Наилучшее разбиение пространства принимаемых сигналов (оптимизация решающей схемы) может быть найдено на основе критерия качества приема, разработка которого требует отдельного рассмотрения на основе теории статистических решений.

В такой постановке задача приема дискретных сообщений в канале с аддитивной, нормальной помехой была решена В.А. Котельниковым (1946 г.), заложившим основы теории потенциальной помехоустойчивости.

Приемник, реализующий наилучшее разбиение пространства принимаемых сигналов по выбранному критерию качества приема, Котельников назвал идеальным, а достигаемую им помехоустойчивость, при которой обеспечивается максимум средней вероятности правильного приема при заданной модуляции, – потенциальной помехоустойчивостью. Мы будем в дальнейшем такой идеальный приемник называть оптимальным демодулятором, как это часто принято в современной теории связи.

Теория потенциальной помехоустойчивости конструктивна, т.к. позволяет не только определить пределы достигаемой помехоустойчивости, но и указывает пути реализации соответствующих демодуляторов.

6.2. Критерии качества приема дискретных сообщений

6.2.1. Критерий идеального наблюдателя (критерий Котельникова)

Этот критерий требует обеспечения минимума средней вероятности ошибочного приема.

Для двоичной системы

$$\min P = \min [P(0)P(1/0) + P(1)P(0/1)],$$

для m -ичной системы

$$\min P = \min \sum_{i=1}^m P(b_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m P(\hat{b}_j / b_i),$$

где

$P(\hat{b}_j / b_i)$ – условная вероятность j -ой ошибки при передаче i -го сообщения,

$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m P(\hat{b}_j / b_i)$ – условная вероятность любой ошибки при передаче i -го сообщения,

P – безусловная вероятность любой ошибки.

Вычислим условную вероятность конкретной ошибки

$$P(\hat{b}_j / b_i) = \int_{\hat{B}_j} w(\vec{z} / b_i) d\vec{z},$$

где $w(\vec{z} / b_i) = w(z_1, z_2, \dots, z_n; t_1, t_2, \dots, t_n / b_i)$ – n -мерная условная плотность вероятности (при

разложении \vec{z} в n -мерном евклидовом пространстве по любому базису), а интеграл, вычисляемый по векторной переменной \vec{z} , очевидно, n -кратный. Таким образом, критерий Котельникова приобретает вид

$$\min P = \min_{\hat{B}_j} \sum_{i=1}^m P(b_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \int_{\hat{B}_j} w(\vec{z} / b_i) d\vec{z}, \quad (6.1)$$

где $\min P$ находится варьированием областей \hat{B}_j .

Минимуму средней вероятности ошибок соответствует максимум средней вероятности правильного приема (иная эквивалентная форма записи критерия Котельникова)

$$\max(1 - P) = \max_{\hat{B}_i} \sum_{i=1}^m P(b_i) \int_{\hat{B}_i} w(\bar{\mathbf{z}}/b_i) d\bar{\mathbf{z}} \quad (6.2)$$

Учитывая, что демодулятор должен реализовать критерий (6.1) или (6.2), принимая решение \hat{b}_j на основе анализа единственной реализации $\bar{\mathbf{z}}$ на интервале $0 - T$, рассмотрим апостериорную вероятность вида $P(b_i/\bar{\mathbf{z}})$, т.е. вероятность того, что при приеме сигнала $z(t) \Rightarrow \bar{\mathbf{z}}$ передавалось сообщение b_i . Очевидно, что максимум средней вероятности правильного приема будет достигнут, если всякую реализацию принятого колебания $z(t)$ относить к той области \hat{B}_i , для которой апостериорная вероятность $P(b_i/\bar{\mathbf{z}})$ максимальна, т.е. решение в пользу \hat{b}_i принимается при совместном выполнении совокупности неравенств $P(b_i/\bar{\mathbf{z}}) > P(b_j/\bar{\mathbf{z}})$, $j = 1, 2, \dots, m \quad j \neq i$

Иначе говоря, критерий Котельникова требует максимизации апостериорной (обратной) вероятности и его можно записать в виде

$$\hat{i} = \arg \left[\max_i [P(b_i/\bar{\mathbf{z}})] \right] \quad (6.3)$$

Для выполнения анализа (6.3) воспользуемся известной формулой Байеса

$$P(b_i/\bar{\mathbf{z}})w(\bar{\mathbf{z}}) = P(b_i)w(\bar{\mathbf{z}}/b_i)$$

Тогда

$$\max P(b_i/\bar{\mathbf{z}}) = \max P(b_i) \frac{w(\bar{\mathbf{z}}/b_i)}{w(\bar{\mathbf{z}})}$$

а выражение (6.3) принимает вид

$$\hat{i} = \arg \left\{ \max_i [P(b_i)w(\bar{\mathbf{z}}/b_i)] \right\} \quad (6.4)$$

(безусловная плотность вероятности $w(\bar{\mathbf{z}})$ здесь исключена, т. к. она не зависит от i и, следовательно, не влияет на решение).

В развернутом виде критерий (6.4) можно записать в виде системы из $m-1$ неравенств

$$P(b_i)w(\bar{\mathbf{z}}/b_i) > \underbrace{P(b_j)w(\bar{\mathbf{z}}/b_j)}_{j=1,2,\dots,m; j \neq i} \rightarrow \hat{b}_i$$

или

$$\frac{w(\bar{\mathbf{z}}/b_i)}{w(\bar{\mathbf{z}}/b_j)} > \frac{P(b_j)}{P(b_i)} \quad (j = 1, 2, \dots, m; j \neq i) \rightarrow \hat{b}_i$$

Условную плотность вероятности $w(\bar{\mathbf{z}}/b_i)$, рассматриваемую при известном после приема векторе $\bar{\mathbf{z}}$ как функцию аргумента b_i , называют функцией правдоподобия гипотезы о передаче сообщения b_i , а

$$\Lambda_{i,j} = \frac{w(\bar{\mathbf{z}}/b_i)}{w(\bar{\mathbf{z}}/b_j)}$$

- отношением правдоподобия двух гипотез о передаче сообщений b_i и b_j . С учетом этого критерий Котельникова можно записать в виде:

$$\Lambda_{i,j} > \frac{P(b_j)}{P(b_i)} \quad (j = 1, 2, \dots, m; j \neq i)$$

если $\Lambda_{i,j} > \frac{P(b_j)}{P(b_i)}$, то решение \hat{b}_i . (6.5)

Рассмотренный критерий Котельникова обладает следующими особенностями:

требуется знание априорных безусловных вероятностей отдельных сообщений $P(b_i)$;

безразличен к виду ошибок $P(\hat{b}_j / b_i)$ (все виды ошибок одинаково нежелательны), что приводит к росту ошибок при приеме менее вероятных сообщений, а они являются более информативными.

6.2.2. Критерий максимального правдоподобия

Полагая, что все передаваемые сообщения равновероятны

$$P(b_1) = P(b_2) = \dots = P(b_m) = \frac{1}{m},$$

из (6.5) получим

если $\Lambda_{i,j} > 1$ ($j = 1, 2, \dots, m; j \neq i$), то решение \hat{b}_i .

Удобно помимо гипотез о передаче сообщений b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ввести еще одну «нулевую» гипотезу о том, что никакое сообщение (сигнал) не передавалось, т. е. принятое колебание является реализацией только помехи $z(t) = n(t)$ ($\vec{z} = \vec{n}$). Обозначим отношение правдоподобия

$$\frac{w(\vec{z} / b_i)}{w(\vec{z} / 0)} = \Lambda_i$$

тогда правило решения можно записать в виде

если $\Lambda_i > \Lambda_j$, при всех $j \neq i$, то решение \hat{b}_i
или

$$\hat{i} = \arg \left[\max_i (\Lambda_i) \right] \quad (6.6)$$

Критерий (6.6) называют критерием максимального правдоподобия. Он совпадает с критерием Котельникова при равных вероятностях передаваемых сообщений.

6.2.3. Критерий минимального среднего риска (байесовский критерий)

Для учета разных последствий ошибок передачи различных сообщений следует обобщить критерий

Котельникова, минимизируя сумму условных вероятностей $P(\hat{b}_j / b_i)$ в его выражении (6.1) с заранее назначенными весами (ценой, платой) $L_{i,j}$. Средневзвешенная сумма условных вероятностей $P(\hat{b}_j / b_i)$ при передаче сообщения b_i (обычно называемая условным риском) имеет вид

$$R_i = \sum_{j=1}^m L_{i,j} P(\hat{b}_j / b_i)$$

а сам критерий требует

$$\min R = \min_{i=1}^m P(b_i) \sum_{j=1}^m \underbrace{L_{i,j} P(\hat{b}_j / b_i)}_{L_{i,i}=0} \quad (6.7)$$

где R – средний риск.

При использовании этого критерия оптимальной считается решающая схема, обеспечивающая наименьшее значение среднего риска (6.7).

Из критерия минимального среднего риска, как наиболее общего, вытекают оба вышерассмотренных критерия: критерий Котельникова при $L_{i,i} = 0$ и $L_{i,j} = \text{const}$ ($i \neq j$),

$$L_{i,j} = L_i = \frac{1}{P(b_i)}$$

критерий максимального правдоподобия при $L_{i,i} = 0$ и

Практическое использование критерия минимального среднего риска затруднено необходимостью знать

вероятности передачи сообщений $P(b_i)$ и сложностью объективного определения весовых коэффициентов $L_{i,j}$.

6.2.4. Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона применяется в двоичных системах в ситуациях, когда невозможно определить априорные вероятности отдельных сообщений, а последствия ошибок разного рода неодинаковы. Такая ситуация типична для радиолокации, где осуществляется зондирование пространства узким радиолучом и прием отраженного от цели сигнала. При этом имеют место две ситуации: 1) наличие цели – колебание на входе приемника содержит сигнал в аддитивной смеси с помехой (с неизвестной априорной вероятностью $P(b_1)$), 2) отсутствие цели – на входе приемника действует одна помеха (с вероятностью $P(b_0) = 1 - P(b_1)$). Задача приема – обнаружение сигнала на фоне помех. При ее реализации возможны два вида ошибок:

пропуск цели (цель есть, но отраженный сигнал не обнаружен) с условной вероятностью $P(\hat{b}_0 / b_1)$;
 ложная тревога (цель отсутствует, но принято решение о наличии отраженного сигнала) с условной вероятностью $P(\hat{b}_1 / b_0)$.

Очевидно, что последствия этих ошибок сильно различаются.

В таком случае целесообразно стремиться к уменьшению условной вероятности ошибки, вызывающей особо тяжелые последствия (пропуск цели), что можно сделать только за счет увеличения вероятности ошибки другого вида (ложной тревоги). Ясно, что это можно делать до определенной степени, т. к. слишком большая вероятность ложной тревоги приведет к ощутимым экономическим потерям и к подрыву доверия к системе в целом. Разумный выход – зафиксировать вероятность ложной тревоги на выбранном уровне ε

$$P(b_1 / b_0) = \int_{\hat{B}_1} w(\bar{\mathbf{z}} / b_0) d\bar{\mathbf{z}} = \varepsilon \quad (6.8)$$

и затем минимизировать вероятность пропуска цели

$$\min P(b_0 / b_1) = \min \int_{\hat{B}_0} w(\bar{\mathbf{z}} / b_1) d\bar{\mathbf{z}} = \min \left[1 - \int_{\hat{B}_1} w(\bar{\mathbf{z}} / b_1) d\bar{\mathbf{z}} \right] \quad (6.9)$$

Минимизация (6.9) при заданной величине (6.8) достигается, если решение о наличии цели принимается при выполнении неравенства

$$\Lambda_1 = \frac{w(\bar{\mathbf{z}} / b_1)}{w(\bar{\mathbf{z}} / 0)} > \lambda(\varepsilon)$$

где $\lambda(\varepsilon)$ – пороговый уровень, определяемый заданной вероятностью ложной тревоги.

6.3. Синтез оптимального демодулятора при известном ансамбле сигналов (когерентный прием)

6.3.1. Постановка и решение задачи когерентного приема на корреляторах

Постановка задачи:

Известны:

Ансамбль сигналов на выходе модулятора

$\{s_i(t)\}; i = 1, 2, \dots, m; t \in (0, T)$.

Непрерывный канал

$$Z(t) = s_i(t) + N(t); \quad i = 1, 2, \dots, m$$

где $N(t)$ – квазибелый нормальный шум, т. е.

$$G_N(f) = \begin{cases} N_0 = \text{const} & f \in (0, F) \\ 0 & f \notin (0, F) \end{cases}$$

В качестве критерия качества приема задан критерий максимального правдоподобия (6.6)

$$\hat{i} = \arg \left\{ \max_i [\Lambda_i] \right\} = \arg \left\{ \max_i \left[\frac{w(\bar{\mathbf{z}} / b_i)}{w(\bar{\mathbf{z}} / 0)} \right] \right\}$$

Требуется синтезировать оптимальный демодулятор, иначе говоря, найти алгоритм оптимальной обработки входного сигнала и принятия решения о передаваемом сообщении.

Решение

В основу решения положим выражение заданного критерия качества приема, для чего рассмотрим входящие в него функции правдоподобия гипотез:

1) о наличии во входном колебании $z(t)$ i -го сигнала $[z(t) = s_i(t) + n(t)]$

$$w(\vec{z} / b_i) = w(z_1, z_2, \dots, z_n; t_1, t_2, \dots, t_n / b_i),$$

2) об отсутствии в нем какого-либо сигнала $[z(t) = n(t)]$

$$w(\vec{z} / 0) = w(z_1, z_2, \dots, z_n; t_1, t_2, \dots, t_n / 0),$$

где
$$n = \frac{T}{\Delta t}, \quad \Delta t = \frac{1}{2F}, \quad n = 2FT$$

$$\Delta t = \frac{1}{2F}, \text{ не}$$

Начнем с последней. Учитывая, что сечения квазизелого шума, разделенные интервалами коррелированы, а в силу нормального распределения шума и независимы, получим

$$w(\vec{z} / 0) = \prod_{k=1}^n w(z_k / 0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n z_k^2\right)$$

Поскольку СП $Z(t) = s_i(t) + N(t)$ отличается от шума $N(t)$ только известным, а потому неслучайным сигналом $s_i(t)$, играющим роль математического ожидания $Z(t)$, то

$$w(\vec{z} / b_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (z_k - s_{i,k})^2\right],$$

где использовано обозначение $s_{i,k} = s_i(t_k)$.

В итоге отношение правдоподобия гипотез о наличии и отсутствии сигнала принимает вид

$$\Lambda_i = \frac{w(\vec{z} / b_i)}{w(\vec{z} / 0)} = \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n z_k^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (z_k - s_{i,k})^2\right]$$

$$2\sigma^2 = 2N_0 F = \frac{N_0}{\Delta t}$$

или с учетом

$$\Lambda_i = \exp\left[\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^n z_k^2 \Delta t - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^n (z_k - s_{i,k})^2 \Delta t\right]$$

Перейдем к белому шуму, сняв ограничение на ширину его спектра ($F \rightarrow \infty$). Иначе говоря, от евклидова пространства перейдем к гильбертовому. При этом

$$\Delta t = \frac{1}{2F} \rightarrow dt, \quad s_{i,k} = s_i(t_k) \rightarrow s_i(t), \quad z_k = z(t_k) \rightarrow z(t), \quad \sum \rightarrow \int$$

и

$$\Lambda_i = \exp\left\{\frac{1}{N_0} \int_0^T z^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_i(t)]^2 dt\right\} \quad (6.10)$$

Синтезируемый демодулятор должен принимать решение в пользу \hat{b}_i , обеспечивающего максимум выражения (6.10), или, что эквивалентно, максимум показателя экспоненты в нем

$$\max_i \Lambda_i \rightarrow \max_i \left\{ \int_0^T z^2(t) dt - \int_0^T [z(t) - s_i(t)]^2 dt \right\} \rightarrow \hat{b}_i \quad (6.11)$$

Нетрудно видеть, что максимум (6.11) достигается при минимуме вычитаемого

$$\max_i \Lambda_i \rightarrow \min_i \left\{ \int_0^T [z(t) - s_i(t)]^2 dt \right\} = \min_i d^2(\vec{z}, \vec{s}_i) \rightarrow \hat{b}_i \quad (6.12)$$

Демодулятор оптимальный по критерию максимального правдоподобия принимает решение в пользу того символа \hat{b}_i , сигнал $s_i(t)$ которого отстоит от принятого колебания $z(t)$ на меньшее расстояние.

Рассматривая выражение (6.12) как алгоритм обработки принятого колебания $z(t)$ приходим к схеме демодулятора, представленной на рис. 6.2.

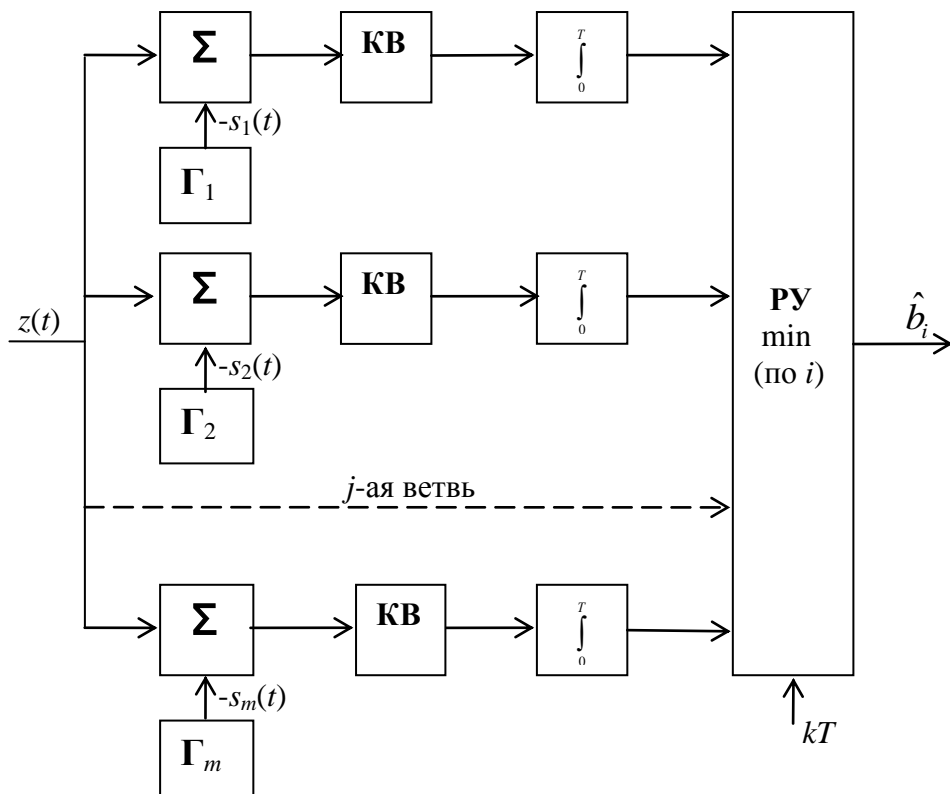


Рис. 6.2. Схема демодулятора, реализующего алгоритм (6.12)

Другую форму алгоритма можно получить из выражения (6.11)

$$\begin{aligned} \max_i \left\{ \int_0^T z^2(t) dt - \int_0^T [z(t) - s_i(t)]^2 dt \right\} = \\ = \max_i \left\{ \int_0^T [z^2(t) - z^2(t) + 2z(t)s_i(t) - s_i^2(t)] dt \right\} \rightarrow \\ \rightarrow \max_i \left[\int_0^T z(t)s_i(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T s_i^2(t) dt \right] = \max_i \left[(\vec{z}, \vec{s}_i) - \frac{1}{2} \underbrace{\|\vec{s}_i\|^2}_{E_i} \right] \rightarrow \hat{b}_i \end{aligned}$$

или

$$\hat{i} = \arg \left\{ \max_i \left[(\vec{z}, \vec{s}_i) - \frac{1}{2} E_i \right] \right\}, \quad (6.13)$$

где E_i – энергия i -го сигнала.

Схема оптимального демодулятора, реализующего алгоритм (6.13), приведена на рис. 6.3. Поскольку в каждой ветви такого демодулятора присутствует вычислитель скалярного произведения (\bar{z}, \bar{s}_i) – коррелятор, то его называют демодулятором на корреляторах (активных фильтрах). Если использовать сигналы равных энергий, то алгоритм (6.13) и схема демодулятора (рис. 6.3) существенно упрощаются (рис. 6.4)

$$\hat{i} = \arg \left\{ \max_i (\bar{z}, \bar{s}_i) \right\} = \arg \left\{ \max_i \int_0^T z(t) s_i(t) dt \right\} \quad (6.14)$$

Все вышерассмотренные демодуляторы используют всю информацию о форме сигналов $s_i(t)$, включая

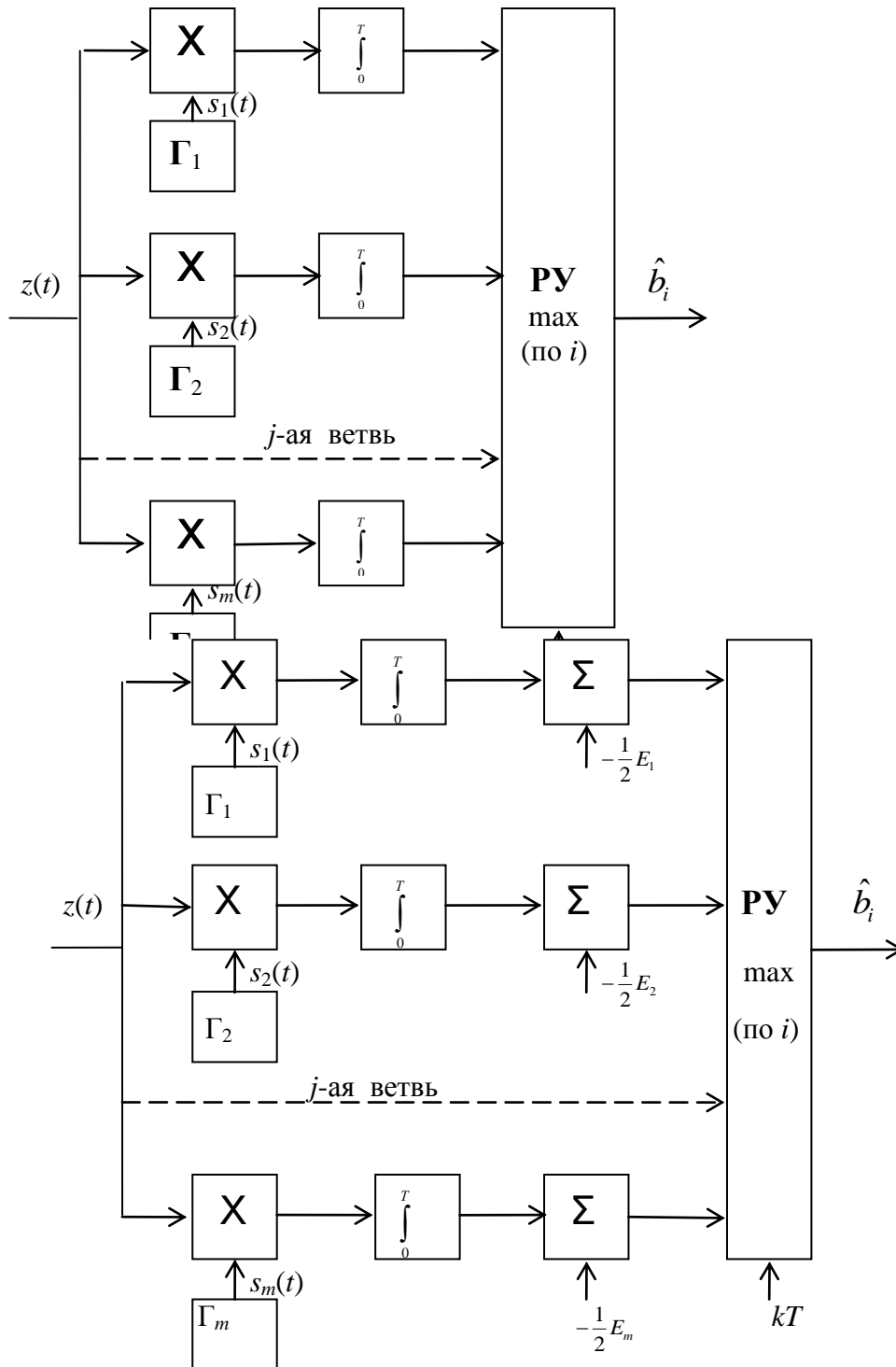


Рис. 6.3. Оптимальный демодулятор на корреляторах (6.13)

начальную фазу. В каждой их ветви содержатся генераторы, генерирующие синфазные образцы этих сигналов, поэтому их называют когерентными демодуляторами.

6.4. Потенциальная помехоустойчивость когерентного приема

Постановка задачи:

Известны:

Ансамбль сигналов на выходе модулятора
 $\{s_i(t)\}_m; i = 1, 2, \dots, m; t \in (0, T)$.

Непрерывный канал

$$Z(t) = s_i(t) + N(t); \quad i = 1, 2, \dots, m$$

где $N(t)$ – квазибелый нормальный шум, т. е.

$$G_N(f) = \begin{cases} N_0 = \text{const} & f \in (0, F) \\ 0 & f \notin (0, F) \end{cases}$$

Алгоритм работы демодулятора (оптимального когерентного по критерию максимального правдоподобия) (6.13)

$$\hat{i} = \arg \left\{ \max_i \left[(\bar{z}, \bar{s}_i) - \frac{1}{2} E_i \right] \right\}$$

Определить P – среднюю вероятность ошибочного приема.

Ограничимся случаем двоичной системы ($m = 2$), когда

$$\{s_i(t)\}_{m=2} = \begin{cases} s_0(t) \\ s_1(t) \end{cases} \quad t \in (0, T)$$

Перепишем алгоритм (6.13) в развернутом виде

$$(\bar{z}, \bar{s}_0) - \frac{1}{2} E_0 \stackrel{\hat{b}_0}{>} \stackrel{\hat{b}_1}{<} (\bar{z}, \bar{s}_1) - \frac{1}{2} E_1$$

или

$$\int_0^T z(t) s_0(t) dt - \frac{1}{2} E_0 \stackrel{\hat{b}_0}{>} \stackrel{\hat{b}_1}{<} \int_0^T z(t) s_1(t) dt - \frac{1}{2} E_1$$

Из иной записи того же алгоритма

$$\int_0^T z(t) [s_0(t) - s_1(t)] dt \stackrel{\hat{b}_0}{>} \stackrel{\hat{b}_1}{<} \frac{1}{2} (E_0 - E_1) = \lambda$$

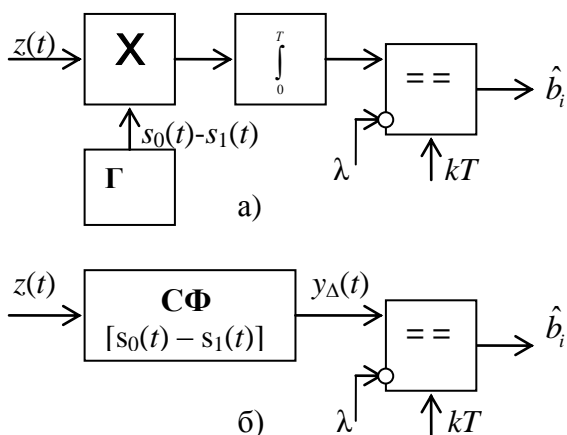


Рис. 6.25. Демодуляторы двоичной системы:

- а) на корреляторе,
- б) на согласованном фильтре

вытекает достаточность одной ветви в оптимальном демодуляторе, которая должна содержать либо коррелятор с опорным генератором разностного сигнала, либо согласованный с этим разностным сигналом фильтр (рис. 6.25). В этих демодуляторах в качестве решающих устройств используются компараторы со стробированием. Компаратор представляет собой дифференциальный усилитель с цифровым выходом и коэффициентом усиления $K \rightarrow \infty$. Напряжение на выходе компаратора может принимать одно из двух значений: высокое (уровень логической «1»), если напряжение на его прямом входе больше, чем на инверсном, и низкое (уровень логического «0») в противном случае. В данном случае производится сравнение выходного напряжения коррелятора или СФ с пороговым в моменты kT поступления коротких стробирующих импульсов. Символом « $\Leftarrow \Rightarrow$ » в УГО компаратора обозначена операция сравнения, а кружком –

инверсный вход.

Для решения поставленной задачи рассмотрим случайную величину $Y_{\Delta}(T)$ – отсчеты реакции СФ в конце каждого сигнала на входной СП $Z(t) = si(t) + N(t)$. Очевидно, что $Y_{\Delta}(T)$ имеет нормальное распределение с

двумя возможными математическими ожиданиями $\overline{Y_{\Delta}(T)}$:

y_0 – при передаче сообщения b_0 ,

y_1 – при передаче сообщения b_1 .

$$y_0 = \int_{-\infty}^{\infty} yw(y/b_0)dy = S_0 \quad y_1 = \int_{-\infty}^{\infty} yw(y/b_1)dy = S_1$$

Условные распределения величины $Y_{\Delta}(T)$ показаны на рис. 6.26

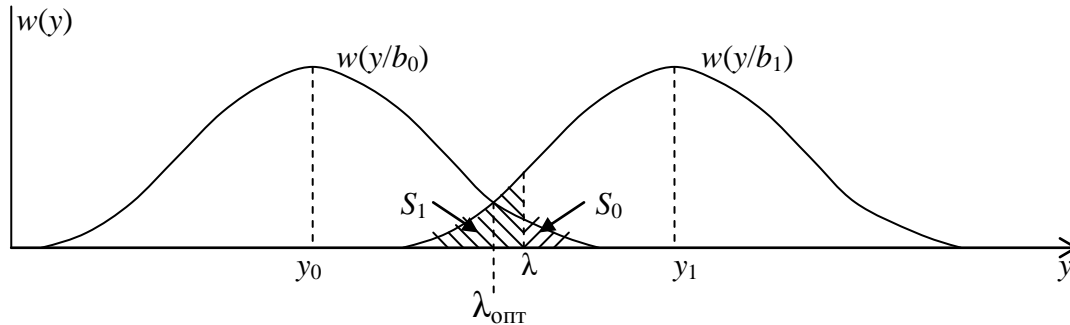


Рис. 6.26. Условные распределения отсчетов $Y_{\Delta}(T)$

В двоичных системах имеют место ошибки двух типов. Определим их вероятности

$$P(\hat{b}_1/b_0) = \int_{\lambda}^{\infty} yw(y/b_0)dy = S_0 \quad P(\hat{b}_0/b_1) = \int_{-\infty}^{\lambda} yw(y/b_1)dy = S_1$$

Средняя вероятность ошибочного приема

$$P = P(b_0)P(\hat{b}_1/b_0) + P(b_1)P(\hat{b}_0/b_1)$$

$$P(b_0) = P(b_1) = 0,5$$

При равных вероятностях передаваемых сообщений

$$P = 0,5[P(\hat{b}_1/b_0) + P(\hat{b}_0/b_1)] = 0,5[S_0 + S_1]$$

Минимизация P означает минимизацию суммы $S_0 + S_1$, что достигается при выборе оптимального порога $\lambda_{\text{опт}}$,

определяемого из условия $w(y/b_0) = w(y/b_1)$ (рис. 6.26)

$$\lambda_{\text{опт}} = \frac{y_0 + y_1}{2}$$

При таком выборе порога

$$P(\hat{b}_1/b_0) = P(\hat{b}_0/b_1) = P$$

и, следовательно, для вычисления средней вероятности ошибочного приема P достаточно определить любую

условную вероятность ошибок, например, $P(\hat{b}_1/b_0)$

$$P = P(\hat{b}_1/b_0) = \int_{\lambda_{\text{опт}}}^{\infty} yw(y/b_0)dy = \int_{\lambda_{\text{опт}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} dy$$

Произведя замену переменных

$$\frac{y - y_0}{\sigma} = v, \quad \frac{dy}{\sigma} = dv, \quad v_{\text{опт}} = \frac{\lambda_{\text{опт}} - y_0}{\sigma} = \frac{\frac{y_0 + y_1}{2} - y_0}{\sigma} = \frac{y_1 - y_0}{2\sigma},$$

получим

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{v_{\text{опт}}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = Q(v_{\text{опт}}) = 1 - F(v_{\text{опт}}) = \frac{1}{2} [1 - \Phi(v_{\text{опт}})]$$

(6.18)

где $Q(v_{\text{опт}})$ – дополнительная функция ошибок,

$F(v_{\text{опт}})$ – функция ошибок,

$\Phi(v_{\text{опт}})$ – функция Крампа.

Все эти функции табулированы, их можно найти в математических справочниках. Полученный результат свидетельствует, что для любой двоичной системы при когерентном приеме вероятность ошибок определяется исключительно величиной вопт, на которой сосредоточим свое внимание. Из рассмотренного вытекает

$$v_{\text{опт}} = \frac{y_1 - y_0}{2\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\overline{Y_{\Delta}(T)}}{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\text{ш}} \right)_{\text{ВЫХ}},$$

где $\overline{Y_{\Delta}(T)} = y_1 - y_0$ – математическое ожидание отклика фильтра, согласованного с разностным сигналом $s_{\Delta}(t) = s_1(t) - s_0(t)$, на «свой» сигнал в момент $t = T$,
 σ – квадратный корень из дисперсии этого отклика.

Используя ранее вычисленное значение отношения с/ш на выходе согласованного фильтра (6.17), получаем

$$v_{\text{опт}} = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\text{ш}} \right)_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E_{\Delta}}{N_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} h_{\Delta}, \quad (6.18)$$

где E_{Δ} – энергия разностного (эквивалентного) сигнала $s_{\Delta}(t)$,
 N_0 – спектральная плотность мощности шума,

$$h_{\Delta} = \sqrt{\frac{E_{\Delta}}{N_0}}.$$

Учитывая геометрический смысл энергии сигнала $E_{\Delta} = \|\vec{s}_1 - \vec{s}_0\|^2$, выражение (6.18) можно переписать в виде

$$v_{\text{опт}} = \frac{d(\vec{s}_1, \vec{s}_0)}{\sqrt{2N_0}}.$$

Выводы

1. Помехоустойчивость когерентного приема в двоичных системах определяется исключительно соотношением энергии E_{Δ} разностного сигнала (расстоянием между сигналами) и спектральной плотности мощности N_0 нормального белого шума

$$h_{\Delta} = \sqrt{\frac{E_{\Delta}}{N_0}} = \frac{d(\vec{s}_1, \vec{s}_0)}{\sqrt{N_0}}. \quad (6.19)$$

2. Средняя вероятность ошибочного приема для этого случая вычисляется с помощью дополнительной функции ошибок по формуле

$$P = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}} h_{\Delta}\right) = Q\left[\frac{d(\vec{s}_1, \vec{s}_0)}{\sqrt{2N_0}}\right] \quad (6.20)$$

6.5. Сравнительный анализ потенциальной помехоустойчивости основных видов цифровой модуляции

Для сравнения помехоустойчивости основных видов цифровой модуляции АМ, ЧМ (при использовании ортогональных сигналов) и ФМ достаточно для каждого из них определить эквивалентную энергию E_{Δ} разностного сигнала $s_{\Delta}(t) = s_1(t) - s_0(t)$ или расстояние между этими сигналами и воспользоваться выражением (6.20). Сравнение удобно выполнять на энергетической основе, т.е. определять соотношение энергий сигналов с разными видами модуляции, при котором обеспечиваются равные вероятности ошибочного приема. На рис. 6.27. в двумерном пространстве показаны векторы сигналов $s_0(t)$, $s_1(t)$ с равными энергиями и $s_{\Delta}(t)$ для: а) АМ (при $s_0(t) = 0$), б) ЧМ и в) ФМ.

Из этих рисунков и (6.20) следует:

$$P_{\text{АМ}} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}} h\right), \quad (6.21)$$

$$P_{\text{ЧМ}} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) = Q(h), \quad (6.22)$$

$$P_{\text{ФМ}} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4E}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{2}h), \quad (6.23)$$

$$h = \sqrt{\frac{E}{N_0}}$$

где

Для достижения одинаковой помехоустойчивости (РАМ = РЧМ = РФМ) энергия сигналов E при ЧМ должна быть в 2 раза, а при ФМ – в 4 раза меньше чем при АМ, т.е. по пиковой мощности ЧМ обеспечивает двукратный, а ФМ четырехкратный энергетический выигрыш по сравнению с АМ. По средней мощности

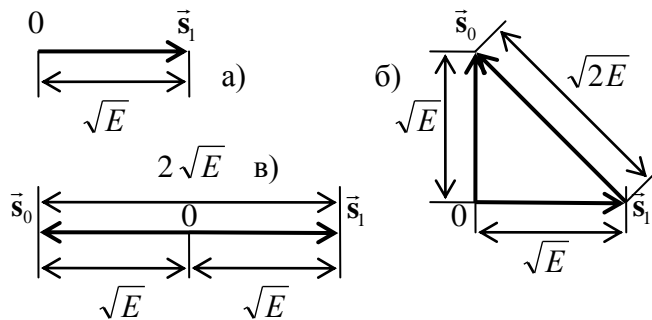


Рис. 6.27. К определению эквивалентной энергии АМ, ЧМ и ФМ сигналов.

выигрыши ЧМ и ФМ уменьшаются в 2 раза за счет пассивной паузы при АМ.

Таким образом, при равных энергиях сигналов наибольшей помехоустойчивостью обладает система с ФМ (использующая противоположные сигналы), наименьшей – система с АМ (с пассивной паузой). Система с ЧМ, использующая ортогональные сигналы, занимает промежуточное положение.

Следует отметить, что оптимальный порог в демодуляторе при использовании АМ не равен нулю, как при ЧМ и ФМ (при использовании сигналов с равными энергиями). Он зависит от энергии E (мощности) сигнала, которая может быть неизвестной или изменяться в процессе

передачи, что затрудняет практическую реализацию оптимального приема.

Полученные результаты имеют общий характер и относятся не столько к конкретному виду модуляции при использовании гармонического переносчика, сколько к выбору сигналов. В частности, формулы расчета средней вероятности ошибочного приема применимы для любых двоичных систем:

(6.21) - с пассивной паузой,

(6.22) – с ортогональными сигналами,

(6.23) – с противоположными сигналами.

Практическая реализация оптимального приема сигналов с наиболее помехоустойчивой модуляцией – ФМ является весьма проблематичной из-за чрезмерных требований к точности работы системы синхронизации:

При использовании согласованной фильтрации требуется высокая временная точность взятия отсчета реакции на выходе СФ (погрешность не должна превышать малой доли периода несущей частоты).

При использовании активного фильтра (коррелятора) столь же высокие требования предъявляются к фазовой погрешности опорного колебания.

Использование автономного опорного генератора в демодуляторе по этой причине исключается.

Использование систем автоподстройки его частоты и фазы к соответствующим параметрам несущего колебания невозможно по причине отсутствия оного в спектре ФМ сигнала (при равновероятных сообщениях). Возможный выход из этой ситуации состоит в использовании различных схем восстановления несущего колебания из принимаемого сигнала, например, схемы Пистолькорса А.А., использующей последовательно включенные умножитель и делитель частоты в два раза (рис. 6.28). Однако, все схемы такого рода обладают существенным недостатком – неоднозначностью фазы (0 или π) восстановленного колебания несущей частоты, что может приводить к так называемой «обратной работе», когда принимаемые сообщения инвертируются, т.е. вместо 0 регистрируются 1 и наоборот.

Эффективный способ решения этих проблем был предложен Н.Т.Петровичем путем перехода к относительной фазовой модуляции (ОФМ). При ОФМ сообщение («0» или «1») передается не абсолютным значением фазы несущего колебания (0 или π), а разностью фаз текущего и предшествующего сигналов, т.е. «0» передается

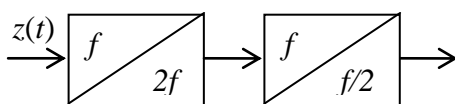
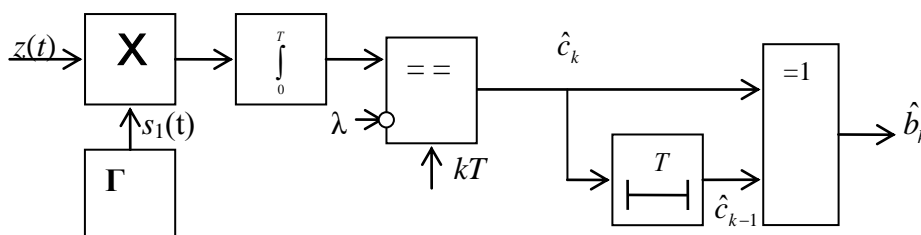


Рис. 6.28. Схема Пистолькорса

сохранением фазы колебания, а «1» ее изменением на π . Систему с ОФМ можно рассматривать как систему с ФМ со специальным перекодированием кодовых символов b_k в c_k на входе фазового модулятора по правилу $c_k = b_k \oplus c_{k-1}$. Символ \oplus означает суммирование по модулю 2 (логическую операцию «исключающее ИЛИ»). Принимать сигналы с ОФМ можно с помощью фазовых демодуляторов (рис. 6.18) с последующим обратным

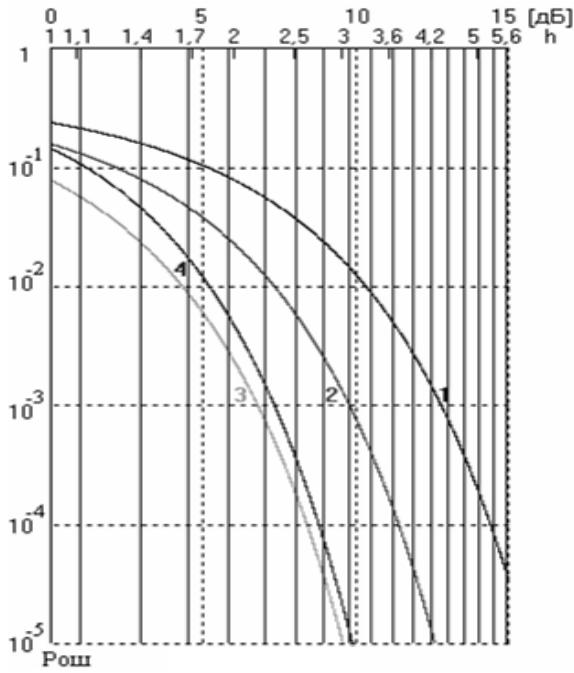
перекодированием выходных символов (рис. 6.29). В этой схеме обратное перекодирование осуществляется логическим элементом «исключающее ИЛИ» (символ «=1») совместно с элементом задержки на T .



Определим вероятность ошибочного приема в системе с ОФМ при когерентном приеме.

Рис. 6.29. Демодулятор двоичной системы с ОФМ

Поскольку в формировании выходного символа \hat{b}_k участвуют символы \hat{c}_k и \hat{c}_{k-1} , ошибочный прием имеет место при выполнении одного из двух условий:



символ \hat{c}_k принят верно, а символ \hat{c}_{k-1} ошибочно,
символ \hat{c}_k принят ошибочно, а символ \hat{c}_{k-1} верно.
Каждое из этих условий реализуется с вероятностью РФМ(1-РФМ). Таким образом получаем $P_{\text{ОФМ}} = 2P_{\text{ФМ}}(1 - P_{\text{ФМ}})$. Поскольку требуется

обеспечивать $P_{\text{ФМ}} \ll 1$, то $P_{\text{ОФМ}} \cong 2P_{\text{ФМ}} = 2Q(\sqrt{2h})$.

Таким образом, «платой» за переход от ФМ к ОФМ для устранения «обратной работы» является удвоение средней вероятности ошибочного приема. На рис. 6.30 приведены кривые помехоустойчивости когерентного приема в двоичных системах, рассчитанные по выше полученным формулам.

Рис. 6.30. Кривые помехоустойчивости оптимального когерентного приема: 1 – АМ, 2 – ЧМ, 3 – ФМ, 4 – ОФМ

6.6. Синтез оптимального демодулятора в канале с неопределенной фазой (некогерентный прием)

Постановка задачи:

Известны:

1. Ансамбль сигналов на выходе модулятора

$$\{s_i(t)\}; m; i = 1, 2, \dots, m; t \in (0, T).$$

2. Непрерывный канал с неопределенной фазой

$$Z(t) = s_i(t - \tau) + N(t); i = 1, 2, \dots, m$$

где τ - случайная задержка сигнала в канале,

$$s_i(t - \tau) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i - \Theta_k) = s_{i, \Theta_k}; i = 1, 2, \dots, m$$

$\Theta_k = \omega_i \tau$ - случайная фаза с равномерным распределением

$$w(\Theta_k) = \frac{1}{2\pi}, \quad \Theta_k \in (0, 2\pi)$$

$N(t)$ – квазибелый нормальный шум, т. е.

$$G_N(f) = \begin{cases} N_0 = \text{const} & f \in (0, F) \\ 0 & f \notin (0, F) \end{cases}$$

В качестве критерия качества приема используем критерий максимального правдоподобия (6.6), в котором

отношение правдоподобия $\Lambda_i = \Lambda_i(\Theta_k)$, зависящее от Θ_k , является случайной величиной. Поэтому потребуем максимизации его математического ожидания

$$\hat{i} = \arg \left\{ \max_i \left[\overline{\Lambda_i(\Theta_k)} \right] \right\} = \arg \left\{ \max_i \int_0^{2\pi} \Lambda_i(\Theta_k) w(\Theta_k) d\Theta_k \right\} \quad (6.24)$$

Требуется синтезировать оптимальный демодулятор, иначе говоря, найти алгоритм оптимальной обработки входного сигнала и принятия решения о передаваемом сообщении.

Решение

Исходя из ранее полученного выражения для Λ_i (6.10), с учетом (6.13) можно записать

$$\Lambda_i(\Theta_k) = \exp\left\{\frac{2}{N_0}\left[(\vec{z}, \vec{s}_{i,\Theta_k}) - \frac{1}{2}E_i\right]\right\}$$

Для дальнейшего удобно сигнал разложить на квадратурные составляющие по углу Θ_k

$$\begin{aligned} s_{i,\Theta_k} &= A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i - \Theta_k) = \\ &= \underbrace{A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)}_{s_i(t)} \cos \Theta_k + \underbrace{A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)}_{\tilde{s}_i(t)} \sin \Theta_k = s_i(t) \cos \Theta_k + \tilde{s}_i(t) \sin \Theta_k. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\vec{z}, \vec{s}_{i,\Theta_k}) &= \int_0^T z(t) [s_i(t) \cos \Theta_k + \tilde{s}_i(t) \sin \Theta_k] dt = \\ &= \cos \Theta_k \int_0^T z(t) s_i(t) dt + \sin \Theta_k \int_0^T z(t) \tilde{s}_i(t) dt = \\ &= (\vec{z}, \vec{s}_i) \cos \Theta_k + (\vec{z}, \vec{\tilde{s}}_i) \sin \Theta_k = V_i \cos(\Theta_k - \Theta_i), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_i &= \sqrt{(\vec{z}, \vec{s}_i)^2 + (\vec{z}, \vec{\tilde{s}}_i)^2}, \\ \Theta_i &= \operatorname{arctg} \frac{(\vec{z}, \vec{\tilde{s}}_i)}{(\vec{z}, \vec{s}_i)}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Вернемся к отношению правдоподобия

$$\begin{aligned} \Lambda_i(\Theta_k) &= \exp\left\{\frac{2}{N_0}\left[(\vec{z}, \vec{s}_{i,\Theta_k}) - \frac{1}{2}E_i\right]\right\} = \\ &= \exp\left\{\frac{2}{N_0}\left[V_i \cos(\Theta_k - \Theta_i) - \frac{1}{2}E_i\right]\right\} = \\ &= \exp\left(-\frac{E_i}{N_0}\right) \exp\left[\frac{2V_i}{N_0} \cos(\Theta_k - \Theta_i)\right] = \exp(-h_i^2) \exp\left[\frac{2V_i}{N_0} \cos(\Theta_k - \Theta_i)\right]. \end{aligned}$$

Найдем математическое ожидание отношения правдоподобия (6.24)

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda_i(\Theta_k)} &= \int_0^{2\pi} \exp(-h_i^2) \exp\left[\frac{2V_i}{N_0} \cos(\Theta_k - \Theta_i)\right] w(\Theta_k) d\Theta_k = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp(-h_i^2) \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2V_i}{N_0} \cos(\Theta_k - \Theta_i)\right] d\Theta_k \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a \cos \varphi} d\varphi = I_0(a)$$

Учитывая, что

– модифицированная функция Бесселя 0-го порядка, получим

$$\overline{\Lambda_i(\Theta_k)} = \exp(-h_i^2) I_0\left(\frac{2V_i}{N_0}\right)$$

Окончательно искомый алгоритм можно записать в виде

$$\hat{i} = \arg \left\{ \max_i \left[\exp(-h_i^2) I_0 \left(\frac{2V_i}{N_0} \right) \right] \right\}$$

В таком виде алгоритм сложен для реализации. Для его упрощения можно применить любую монотонную функцию к выражению, стоящему в прямоугольных скобках [x], например, $\ln[x]$, что не изменит его суть

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \arg \left\{ \max_i \ln \left[\exp(-h_i^2) I_0 \left(\frac{2V_i}{N_0} \right) \right] \right\} = \\ &= \arg \left\{ \max_i \left[-h_i^2 + \ln I_0 \left(\frac{2V_i}{N_0} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

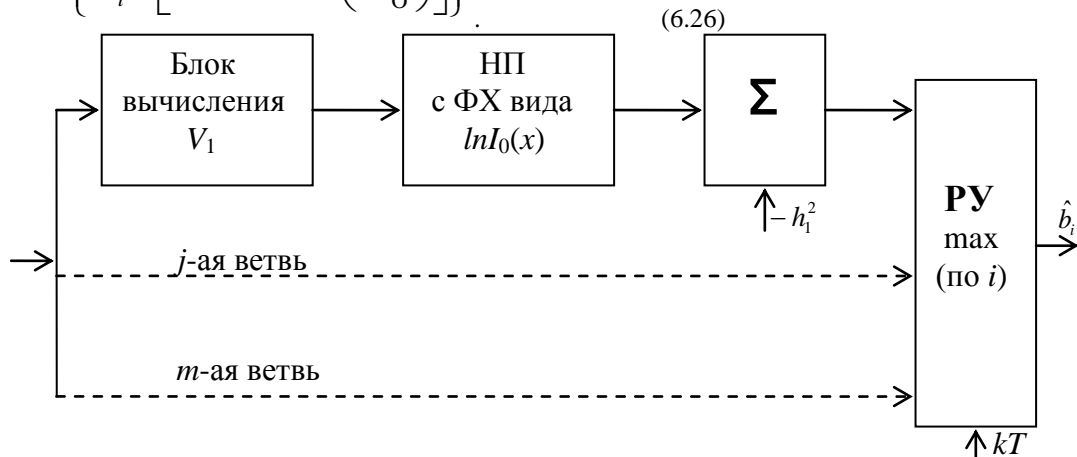


Рис. 6.33. Схема демодулятора по алгоритму (6.26)

Из алгоритма (6.26) вытекает схема демодулятора, показанная на рис. 6.33. Такая схема сложна для реализации,

а сам алгоритм чувствителен к h_i^2 . Снятие этой проблемы и упрощение схемы демодулятора возможно при выборе сигналов равных энергий $E_1 = E_2 = \dots = E_m$, что обеспечивает равенство $h_1 = h_2 = \dots = h_m$. Это позволяет исключить в ветвях демодулятора сумматоры и нелинейные преобразователи со сложной монотонной функциональной характеристикой вида $\ln[I_0(x)]$ (рис. 6.34), а алгоритм (6.26) принимает вид

$$\hat{i} = \arg \left\{ \max_i V_i \right\} = \arg \left\{ \max_i \left[(\vec{z}, \vec{s}_i)^2 + (\vec{z}, \vec{\tilde{s}}_i)^2 \right] \right\} \quad (6.27)$$

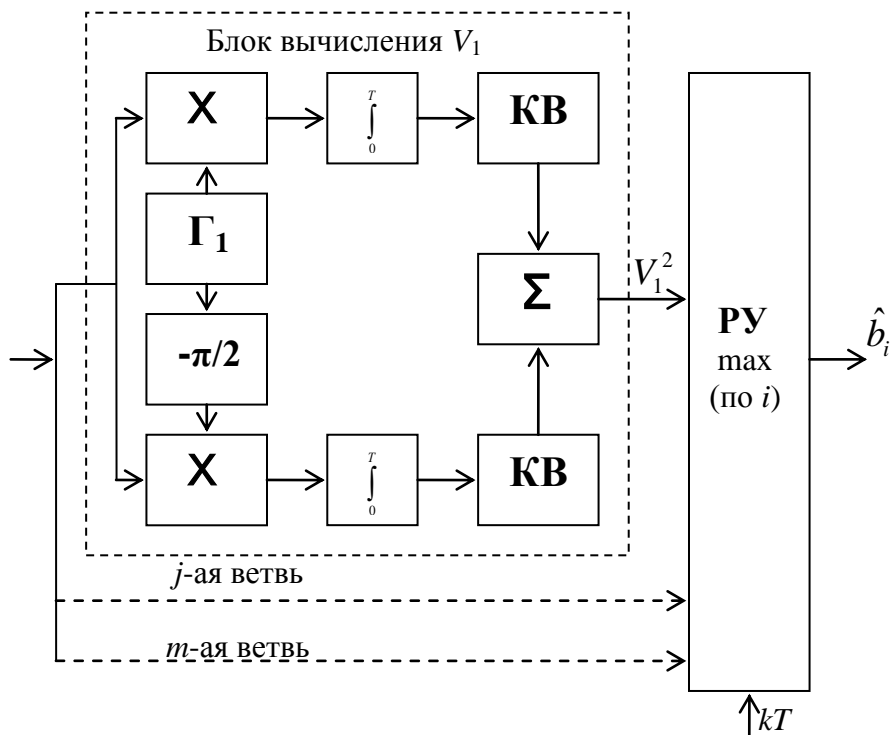


Рис. 6.34. Схема демодулятора по алгоритму (6.27)

Способ приема сигналов, при котором не используется информация о его фазе, называют некогерентным, как и соответствующие демодуляторы. Его алгоритм был впервые получен Л.М.Финком.

Выше введенная функция V_i , как это следует из выражения (6.25), представляет собой не что иное, как огибающую реакции СФ для соответствующего сигнала $s_i(t)$. Отсюда вытекает возможность реализации оптимального демодулятора, содержащего в каждой своей ветви СФ и детектор огибающей (ДО) (рис. 6.25).

Решение о переданном символе принимается по максимум огибающей в моменты kT .

Из выражения (6.25) очевидно, что максимальная помехоустойчивость некогерентного приема достигается при минимальном (нулевом) значении огибающей V_j (в моменты отсчетов) на выходах ветвей $j \neq i$ при передаче сигнала $s_i(t)$. Для этого необходимо выбирать сигналы равных энергий, удовлетворяющие требованию ортогональности в усиленном смысле

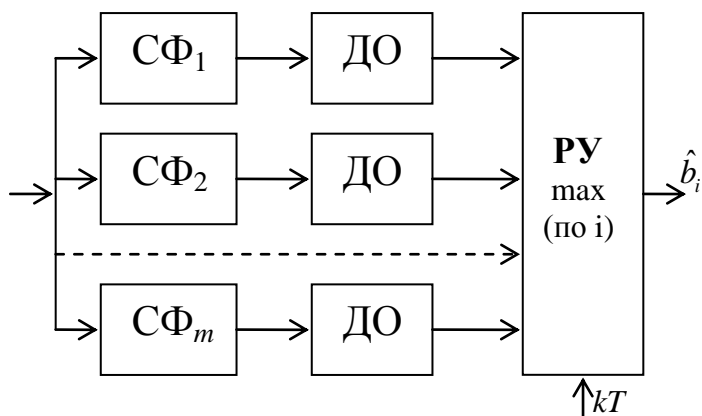


Рис. 6.25. Оптимальный некогерентный демодулятор на согласованных фильтрах

$$(\vec{s}_i, \vec{s}_j) = \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, m; \quad j \neq i,$$

$$(\vec{s}_i, \vec{\tilde{s}}_j) = \int_0^T s_i(t) \tilde{s}_j(t) dt = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

Примеры ортогональных в усиленном смысле сигналов:

1. Сигналы с ЧМ при соответствующем выборе частот

$$s_i(t) = A \cos \left[\frac{2\pi(l+i)}{T} + \varphi_i \right]; \quad i, l = 1, 2, 3, \dots; \quad l \gg i$$

2. Сигналы с время-импульсной модуляцией (ВИМ) (рис. 6.36,а)

$$s_i(t) = \begin{cases} A \sin \omega t, & t \in \left[i \frac{T}{m}, (i+1) \frac{T}{m} \right] \\ 0, & t \notin \left[i \frac{T}{m}, (i+1) \frac{T}{m} \right] \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, (m-1)$$

3. Сигналы с ОФМ обладают ортогональностью в усиленном смысле на интервале $-T \div T$ (рис. 6.36,б). На этом интервале сообщения «0» и «1» передаются сигналами:

$$\text{"0"} \rightarrow s_0(t) = A \sin \omega t, \quad t \in (-T, T)$$

$$\text{"1"} \rightarrow s_1(t) = \begin{cases} A \sin \omega t, & t \in (-T, 0) \\ -A \sin \omega t, & t \in (0, T) \end{cases}$$

Рекомендуется доказать ортогональность этих сигналов самостоятельно.

6.7. Потенциальная помехоустойчивость

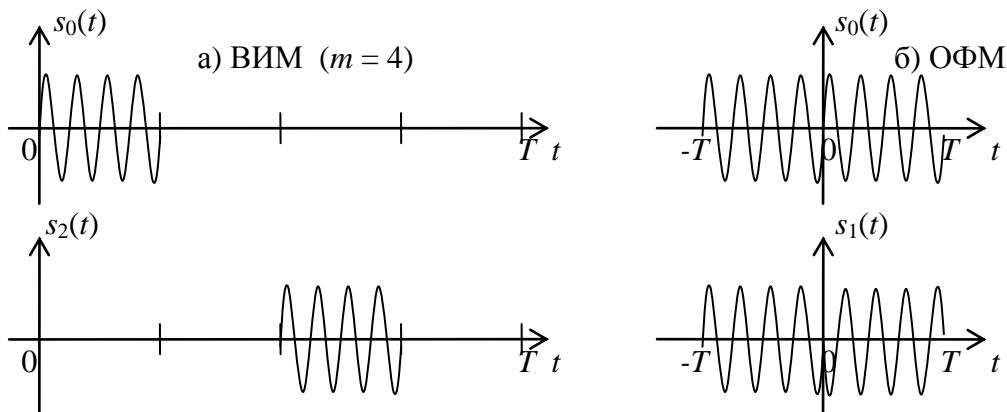


Рис. 6.36. Примеры ортогональных в усиленном смысле сигналов

некогерентного приема в двоичной системе связи

Для определения средней вероятности ошибки оптимального некогерентного приема в двоичной системе при равных вероятностях передаваемых сообщениях $P(b_0) = P(b_1)$ достаточно вычислить условную вероятность ошибки любого типа, как это было установлено в разделе 6.4,

$$P = P(\hat{b}_0 / b_1) = P(\hat{b}_1 / b_0)$$

Вычислим $P(\hat{b}_0 / b_1)$, ориентируясь на схему некогерентного демодулятора на СФ (рис. 6.37). Ошибка вида

\hat{b}_0 / b_1 (при передаче сообщения b_1)

принимается решение в пользу \hat{b}_0)

если для отсчетов огибающих на выходах демодулятора выполняется неравенство

$$V_0 > V_1 / b_1$$

Для определения его вероятности

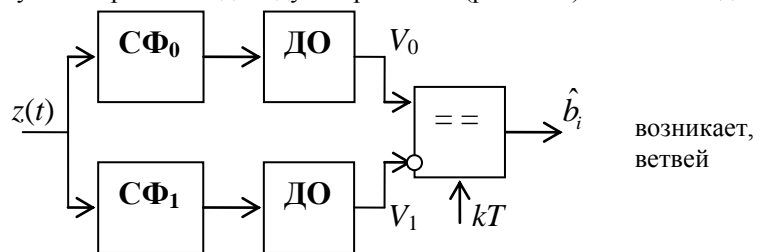


Рис. 6.37. Некогерентный демодулятор

$$P(V_0 > V_1 / b_1) = \int_0^{\infty} P(V_0 > V_1) w(V_1 / b_1) dV_1 = \int_0^{\infty} w(V_1 / b_1) dV_1 \int_{V_1}^{\infty} w(V_0 / b_1) dV_0$$

надо знать плотности вероятности $w(V_0 / b_1)$ и $w(V_1 / b_1)$, вычислением которых и займемся. Вспомним, что

$$V_i = \sqrt{(\vec{\mathbf{Z}}, \vec{\mathbf{s}}_i)^2 + (\vec{\mathbf{Z}}, \vec{\mathbf{s}}_i^*)^2}$$

где i – номер ветви (индекс сигнала, на который настроен СФ)

$$\vec{\mathbf{Z}} = \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{s}}_j$$

j – индекс передаваемого сообщения.

$$\begin{aligned} V_i &= \sqrt{(\vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{s}}_j, \vec{\mathbf{s}}_i)^2 + (\vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{s}}_j, \vec{\mathbf{s}}_i^*)^2} = \\ &= \sqrt{[(\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_i) + (\vec{\mathbf{s}}_j, \vec{\mathbf{s}}_i)]^2 + [(\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_i^*) + (\vec{\mathbf{s}}_j, \vec{\mathbf{s}}_i^*)]^2} = \sqrt{[(\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_i) + (\vec{\mathbf{s}}_j, \vec{\mathbf{s}}_i)]^2 + (\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_i^*)^2} \end{aligned}$$

Запишем отсчеты огибающих V_0 и V_1 на выходах соответствующих ветвей демодулятора при передаче сигнала $s_1(t)$ ($j = 1$)

$$i=0 \quad V_0 = \sqrt{[(\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_0) + (\vec{\mathbf{s}}_1, \vec{\mathbf{s}}_0)]^2 + (\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_0^*)^2} = \sqrt{(\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_0)^2 + (\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_0^*)^2}$$

$$i=1 \quad V_1 = \sqrt{[(\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_1) + (\vec{\mathbf{s}}_1, \vec{\mathbf{s}}_1)]^2 + (\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_1^*)^2} = \sqrt{[(\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_1) + E]^2 + (\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_1^*)^2}$$

Входящие в эти выражения скалярные произведения

$$(\vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{s}}_i) = \int_0^T N(t) s_i(t) dt$$

представляют собой нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием, следовательно, огибающие V_i будут иметь распределение Рэлея на выходе СФ0 ($i = 0$)

$$w(V_0 / b_1) = \frac{V_0}{\sigma^2} e^{-\frac{V_0^2}{2\sigma^2}}$$

и обобщенное распределение Рэлея на выходе СФ1 ($i = 1$)

$$w(V_1 / b_1) = \frac{V_1}{\sigma^2} e^{-\frac{V_1^2 + E^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{V_1 E}{\sigma^2}\right)$$

Вернемся к вычислению средней вероятности ошибки при оптимальном некогерентном приеме

$$\begin{aligned} P &= P(\hat{b}_0 / b_1) = P(V_0 > V_1 / b_1) = \int_0^\infty w(V_1 / b_1) dV_1 \int_{V_1}^\infty w(V_0 / b_1) dV_0 = \\ &= \int_0^\infty w(V_1 / b_1) dV_1 \int_{V_1}^\infty w(V_0 / b_1) dV_0 = \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma^2} e^{-\frac{V_1^2 + E^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{V_1 E}{\sigma^2}\right) dV_1 \int_{V_1}^\infty \frac{V_0}{\sigma^2} e^{-\frac{V_0^2}{2\sigma^2}} dV_0 \end{aligned}$$

Произведя замену переменных

$$\frac{V_0^2}{2\sigma^2} = x, \quad dx = \frac{V_0 dV_0}{\sigma^2}, \quad x_1 = \frac{V_1^2}{2\sigma^2}$$

получим

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma^2} e^{-\frac{V_1^2 + E^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{V_1 E}{\sigma^2}\right) dV_1 \int_{V_1}^\infty e^{-x} dx = \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma^2} e^{-\frac{V_1^2 + E^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{V_1 E}{\sigma^2}\right) dV_1 e^{-x} \Big|_\infty^x = \\ &= \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma^2} e^{-\frac{V_1^2 + E^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{V_1 E}{\sigma^2}\right) dV_1 e^{-\frac{V_1^2}{2\sigma^2}} = \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma^2} e^{-\frac{4V_1^2 + 2E^2}{4\sigma^2}} I_0\left(\frac{V_1 E}{\sigma^2}\right) dV_1 = \\ &= \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma^2} e^{-\frac{4V_1^2 + 2E^2}{4\sigma^2}} I_0\left(\frac{V_1 E}{\sigma^2}\right) dV_1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{E^2}{4\sigma^2}} \int_0^\infty \frac{2V_1}{\sigma^2} e^{-\frac{4V_1^2 + E^2}{4\sigma^2}} I_0\left(\frac{V_1 E}{\sigma^2}\right) dV_1 \end{aligned}$$

Обозначим $2V_1=V$, $2\sigma^2=\gamma^2$, тогда $2dV_1=dV$, $\frac{V_1}{\sigma^2}=\frac{V}{\gamma^2}$ и

$$P = \frac{1}{2} e^{-\frac{E^2}{4\sigma^2}} \int_0^\infty \underbrace{\frac{V}{\gamma^2} e^{-\frac{V^2+E^2}{2\gamma^2}} I_0\left(\frac{VE}{\gamma^2}\right)}_{w(V)} dV = \frac{1}{2} e^{-\frac{E^2}{4\sigma^2}}$$

Здесь учтено то, что подынтегральное выражение можно трактовать как плотность вероятности обобщенного распределения Рэля (5.13).

Вычислим σ^2 – мощность шума на выходе СФ

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H_{\text{СФ}}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} S(j\omega) S^*(j\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} E$$

и окончательно получим

$$P = \frac{1}{2} e^{-\frac{E^2}{4N_0E}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}h^2},$$

$$h = \sqrt{\frac{E}{N_0}}$$

где, как и ранее,

Полученный результат относится к любым двоичным системам, использующим ортогональные в усиленном смысле сигналы.

Нетрудно сообразить, что для некогерентного приема в двоичных системах с пассивной паузой (АМ)

$$P_{\text{АМ}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}h^2}$$

Некогерентный прием сигналов с ФМ исключается, т.к. огибающие противоположных сигналов неразличимы, однако возможна реализация оптимального некогерентного демодулятора для системы с ОФМ (рис. 6.38), сигналы которой ортогональны в усиленном смысле на двойном интервале $2T$ и, следовательно, имеют на этом интервале удвоенную энергию. По этой причине

$$P_{\text{ОФМ}} = \frac{1}{2} e^{-h^2}$$

На рис. 6.39. приведены кривые помехоустойчивости оптимального некогерентного приема сигналов с АМ, ЧМ и ОФМ.

На практике используют также квазиоптимальный прием ЧМ сигналов, применяя в схеме (рис. 6.37) вместо СФ (согласованных с сигналами по их форме) полосовые фильтры (ПФ) с прямоугольной АЧХ, согласуя их с шириной спектра сигналов. В.И.Сифоровым было установлено, что максимальное отношение с/ш на выходе

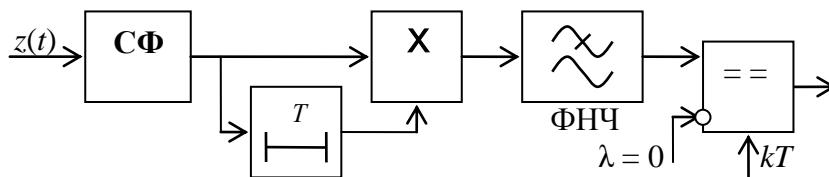


Рис. 6.38. Некогерентный демодулятор двоичной системы с ОФМ

$$\Delta f_{\text{ПФ}} = \frac{1,37}{T}$$

ПФ с прямоугольной АЧХ достигается при ширине полосы пропускания несколько меньше, чем для СФ (энергетический проигрыш 0,86 дБ). Дополнительное снижение помехоустойчивости при использовании ПФ вызывается межсимвольной интерференцией, возникающей из-за наложения переходных процессов от предшествующих посылок на последующие (что не имеет места при согласованной фильтрации).

4.3. Лабораторные работы

<i>№ п/п</i>	<i>Номер раздела дисциплины</i>	<i>Наименование лабораторной работы</i>	<i>Объем (час.)</i>	<i>Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)</i>
1	1.	Цифровая система связи	5	3
2	2.	Дискретизация непрерывных сигналов	6	3
3	3.	Преобразование формы и спектра сигналов во времени	6	3
4	3.	Усиление сигналов	6	3
5	4.	Умножение частоты. Преобразование частоты	6	3
6	4.	Амплитудная модуляция.	6	3
7	5.	Исследование частотного модулятора.	6	4
8	5.	Исследование LC автогенератора	6	4
9	6.	Исследование аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования сигналов	6	4
ИТОГО			53	30

4.4. Практические занятия

<i>№ п/п</i>	<i>Номер раздела дисциплины</i>	<i>Наименование практической работы</i>	<i>Объем (час.)</i>	<i>Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)</i>
1	4.	Расчет первичных параметров передачи кабеля связи.	6	-
2	5.	Расчет вторичных параметров передачи кабеля связи.	6	-
3	6.	Определение по критериям эффективности систем связи.	6	-
ИТОГО			18	-

4.5. Контрольные мероприятия: курсовая работа

Цель: приобретение навыков практического расчета энергетических параметров радиолиний, входящих в сеть спутниковой связи, который включает в себя обоснованный выбор энергетических параметров аппаратуры: мощности передатчика, коэффициента шума приемника, коэффициента усиления антенн и потерь в антенно-фидерном тракте, удовлетворяющих заданной достоверности и надежности работы сети

Структура: Каждое индивидуальное задание предполагает выполнение студентом следующих разделов:

1. Выполнить энергетический расчет спутникового канала.
 - 1.1. Определить расстояния от земных станций до бортового ретранслятора.
 - 1.2. Рассчитать угол места и азимут на спутник с земных станций.
 - 1.3. Рассчитать затухание энергии сигнала в свободном пространстве.
 - 1.4. Определить коэффициенты усиления антенны спутника.
 - 1.5. Рассчитать полное затухание радиосигнала на участках линии спутниковой связи.
 - 1.6. Рассчитать мощности для передатчиков земной станции и бортового ретранслятора

2. Определить параметры электромагнитной совместимости системы.
 - 2.1. Рассчитать приращение шумовой температуры.
 - 2.2. Определить расстояние от станции до спутников.
 - 2.3. Определить расстояние между земными станциями.
 - 2.4. Рассчитать усиление антенн по направлению на мешающую систему.
 - 2.5. Вычислить потери при распространении сигнала на трассе вверх и вниз.
- Основная тематика: Энергетический расчет спутникового канала.

Рекомендуемый объем: Пояснительная записка объемом 20 - 25 страниц должна содержать титульный лист, задание, описание выполняемых действий по каждому разделу и полученные результаты.

Выдача задания, прием и защита проводится в соответствии с календарным учебным графиком

Оценка	Критерии оценки курсовой работы
отлично	Во время защиты курсовой работы студент демонстрирует знание всех основных определений и продемонстрировал уверенное умение использовать методов выделения основных атрибутов и сущностей из предметной области, и способностью самостоятельно высказать мысль на научно-техническом языке.
хорошо	Ответ содержит неточности. Дополнительные вопросы требуется, но студент с ними справляется отлично.
удовлетворительно	Ответил только на один вопрос. На дополнительные вопросы отвечает неуверенно.
неудовлетворительно	На вопросы студент отвечает неубедительно. На дополнительные вопросы преподавателя также не может ответить.

5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

<i>№, наименование разделов дисциплины</i>	<i>Компетенции</i>	<i>Кол-во часов</i>	<i>Компетенции</i>		<i>Σ комп.</i>	<i>$t_{ср}$, час</i>	<i>Вид учебных занятий</i>	<i>Оценка результатов</i>
			<i>ОПК</i>	<i>ПК</i>				
			<i>3</i>	<i>8</i>				
1		2	3	4	5	6	7	8
1. Общие сведения о системах связи		16	+	+	2	8	Лк, ЛР, СРС	ЗАЧЕТ
2. Математические модели сигналов		18	+	+	2	9	ЛК, ЛР, СРС	ЗАЧЕТ
3. Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи		20	+	+	2	10	ЛК, ЛР, СРС	ЗАЧЕТ
4. Математические модели случайных процессов		48	+	+	2	24	Лк, ЛР, ПЗ, СРС	ЭКЗАМЕН
5. Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов		48	+	+	2	24	Лк, ЛР, ПЗ, КР, СРС	ЭКЗАМЕН
6. Оптимальный прием дискретных сообщений		48	+	+	2	24	Лк, ЛР, ПЗ, КР, СРС	ЭКЗАМЕН
<i>всего часов</i>		198	99	99	2	99		

6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№	Наименование издания	Вид занятия	Количество экземпляров в библиотеке, шт.	Обеспеченность, (экз./чел.)
1	2	3	4	5
Основная литература				
1	Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.	Лк, КР, ПЗ, ЛР	5	0,5
Дополнительная литература				
2	Сальникова, М. К. Теория электрической связи. Энергетический расчет спутникового канала : методические указания к выполнению курсового проекта / М. К. Сальникова. - Братск : БрГУ, 2008. - 65 с	КР	32	1
3	Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf	ПЗ	ЭР	1

8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО - ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Электронный каталог библиотеки БрГУ
http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r_15/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=.
2. Электронная библиотека БрГУ
<http://ecat.brstu.ru/catalog> .
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»
<http://biblioclub.ru> .
4. Электронно-библиотечная система «Издательство «Лань»
<http://e.lanbook.com> .
5. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"
<http://window.edu.ru> .
6. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru> .
7. Университетская информационная система РОССИЯ (УИС РОССИЯ)
<https://uisrussia.msu.ru/> .
8. Национальная электронная библиотека НЭБ
<http://xn--90ax2c.xn--plai/how-to-search/> .

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению лабораторных работ/практических работ

Лабораторная работа №1

Цифровая система связи

Цель работы:

Знакомство с основными функциональными узлами цифровой системы связи для передачи как дискретных, так и аналоговых сигналов. Преобразование сигналов в отдельных блоках системы связи с разными видами модуляции и кодирования. Демонстрация помехоустойчивости системы связи.

Задание:

1. Наблюдать сигналы в разных точках системы связи при фиксированных видах модуляции.
2. Познакомиться с различными видами модуляции.
3. Наблюдать прохождение сигналов через систему связи при действии помех в канале.

Порядок выполнения:

1. Передача дискретных сигналов через канал без помех.
2. Передача дискретных сигналов по каналу с помехами.
3. Передача аналоговых сигналов через канал без помех.
4. Передача аналоговых сигналов через канал с помехами.

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 1 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Перечислите блоки цифровой системы связи для передачи
 - дискретных сигналов;
 - аналоговых сигналов.
2. Каково назначение модулятора и демодулятора в цифровой системе связи?
3. Какова причина ошибок в работе системы связи?
4. Какие блоки "ответственны" за возникновение ошибок в системе связи?
5. Какие возможности борьбы с помехами Вам известны?
6. В чем состоит идея преобразования аналогового сигнала в цифровой и наоборот?

Лабораторная работа №2

Дискретизация непрерывных сигналов

Цель работы:

Исследование процессов дискретизации и восстановления непрерывных сигналов.

Задание:

1. Произвести дискретизацию одного из сложных сигналов (s_1 , s_2 или s_3).
2. Исследовать спектры исходного и дискретизированного сигналов.
3. Исследовать частотные и импульсные характеристики фильтров – восстановителей.
4. Исследовать процесс восстановления дискретизированных сигналов.

Порядок выполнения:

1. Дискретизация сигнала.
2. Исследование фильтров.
3. Восстановление дискретизированного сигнала.

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 2 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Каков практический смысл в дискретизации аналоговых сигналов?
2. Сформулируйте теорему Котельникова.
3. При каких условиях теорема Котельникова гарантирует двойное преобразование сигналов (дискретизация и восстановление) без искажений?
4. Могут ли быть дискретизированы и затем восстановлены импульсы прямоугольной формы?
5. Каков алгоритм восстановления дискретизированного сигнала?
6. Какова роль ряда Котельникова в объяснении процесса восстановления сигнала?

Лабораторная работа №3

Преобразование формы и спектра сигналов во времени.

Цель работы:

Изучение формы и спектра сигналов на выходе резистивной цепи, содержащей нелинейный безинерционный элемент при моно- и бигармоническом воздействии.

Задание:

1. Снимите и постройте вольтамперную характеристику нелинейного элемента.

- Исследуйте преобразование формы и спектра моногармонического сигнала на квадратичном участке вольтамперной характеристики нелинейного элемента.
- Исследуйте преобразование формы и спектра бигармонического сигнала на квадратичном участке вольтамперной характеристики нелинейного элемента.
- Выполните исследования по пунктам 2 и 3 для кусочно-параболического участка характеристики.

Порядок выполнения:

- Снятие вольтамперной (сток-затворной) характеристики полевого транзистора $i_c=f(E_{CM})$.
- Моногармоническое воздействие $u_{зи} = E_{CM} + U_m \cos 2\pi f_1 t$.
- Бигармоническое воздействие $u_{зи} = E_{CM} + U_{1m} \cos 2\pi f_1 t + U_{2m} \cos 2\pi f_2 t$.

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 3 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

- Каковы характерные особенности спектров тока, протекающего через нелинейный безынерционный элемент, при моно- и бигармоническом воздействиях?
- Что называется порядком комбинационного колебания? Поясните примером.
- Какова связь между наивысшим порядком комбинационного колебания и степенью полинома, аппроксимирующего характеристику нелинейного элемента?
- Перечислите наиболее часто применяемые методы спектрального анализа колебаний на выходе безынерционных нелинейных преобразователей. Укажите, при каких видах аппроксимации целесообразно применять каждый из них.

Лабораторная работа №4

Усиление сигналов.

Цель работы:

Исследование процессов усиления сигналов в линейном и нелинейном режимах.

Задание:

1. Исследуйте работу резонансного усилителя в линейном и нелинейном режимах.

Порядок выполнения:

- Линейный режим усиления.
- Нелинейный режим усиления.

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 3 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какова роль полевого транзистора в схеме линейного усилителя?
2. Почему в качестве нагрузки в линейном усилителе применяются резистор, колебательный контур?
3. Как выбрать рабочую точку на характеристике усилительного элемента линейного усилителя?
4. Каковы преимущества нелинейных усилителей?
5. Какова связь между формой напряжения на входе и выходе нелинейного резонансного усилителя?

Лабораторная работа №5

Умножение частоты. Преобразование частоты.

Цель работы:

Исследование работы умножителя частоты.

Задание:

1. Исследуйте работу умножителя частоты при постоянной величине амплитуды импульса тока стока или при постоянной амплитуде входного сигнала (по указанию преподавателя).

Порядок выполнения:

1. Принципиальная схема макета
2. Амплитудная характеристика умножителя частоты
3. Временные диаграммы процесса умножения частоты

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 4 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Части 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Изобразить схему умножителя частоты. Пояснить принцип её работы.
2. С какой целью применяются умножители частоты?
3. Как выбрать оптимальный режим работы усилителя?
4. Как выбрать оптимальный режим работы умножителя частоты?
5. Какова роль нелинейного элемента в схеме умножителя частоты?
6. Какова роль избирательной нагрузки в схеме умножителя частоты?

Лабораторная работа №6

Амплитудная модуляция.

Цель работы:

Исследование процесса амплитудной модуляции, получение статической модуляционной характеристики и выбор оптимального режима работы модулятора.

Задание:

1. Получите статическую модуляционную характеристику устройства.
2. Определите величины напряжений, необходимых для получения колебаний с наибольшей глубиной модуляции без заметных искажений.
3. Исследуйте форму и спектр колебаний в оптимальном режиме, а также при различных отклонениях от этого режима.

Порядок выполнения:

1. Настройка в резонанс
2. Статические модуляционные характеристики $I_{C1}=\gamma(E_{CM})$
3. Оптимальный режим модулятора
4. Временные диаграммы и спектры на входах и выходе модулятора
5. Диаграммы искаженных колебаний на выходе вне оптимального режима
6. Модуляция сложным сигналом

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 4 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Части 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что такое амплитудная модуляция? Запишите аналитическое выражение АМ сигнала.
2. Какая форма ВАХ нелинейного элемента является наилучшей для получения АМ сигналов?
3. Что такое глубина модуляции?
4. Как измерить глубину модуляции по временной диаграмме АМ сигнала или по спектру?
5. Как связаны между собой ширина спектра модулирующего и ширина спектра модулированного сигнала при АМ?
6. Как распределяется мощность между составляющими АМ сигнала?

Лабораторная работа №7

Исследование частотного модулятора.

Цель работы:

Исследование принципа действия частотного модулятора. Получение характеристик частотного модулятора при воздействии на его вход моногар-монического сигнала. Исследование формы и спектра сигналов с частотной модуляцией.

Задание:

1. Снимите статическую модуляционную характеристику и определите оптимальный режим модулятора.
2. Определите влияние амплитуды модулирующего сигнала на форму и ширину спектра ЧМ-сигнала (при постоянной частоте модуляции).
3. Определите влияние частоты модуляции на форму и ширину спектра ЧМ-сигнала (при постоянной амплитуде модулирующего сигнала).
4. Наблюдайте форму сигнала на входе и выходе частотного модулятора.

Порядок выполнения:

1. Статическая модуляционная характеристика
2. Влияние амплитуды модулирующего сигнала на спектр ЧМ
3. Влияние частоты модуляции на спектр ЧМ-сигнала
4. Форма колебаний на входе и выходе частотного модулятора

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 5 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Дайте определение ЧМ-колебания.
2. Приведите пример записи тонального ЧМ-колебания с параметрами
 $f_0 = 100 \text{ МГц}$; $F_{\text{мод}} = 10 \text{ КГц}$; $\Delta f_{\text{МАХ}} = 50 \text{ КГц}$.

3. Опишите принцип действия частотного модулятора. Какие способы получения ЧМ-колебаний Вам известны?
4. Статическая модуляционная характеристика и её смысл.
5. Что такое угловая модуляция?
6. Как рассчитать спектр ЧМ-колебания?

Лабораторная работа №8

Исследование LC автогенератора.

Цель работы:

Исследование схемы транзисторного автогенератора гармонических колебаний с трансформаторной обратной связью. Экспериментальная проверка основных положений теории самовозбуждения, стационарного и переходного режимов.

Задание:

1. Исследуйте «мягкий» и «жесткий» режимы самовозбуждения генератора.
2. Получите амплитудные характеристики стационарного режима при разных смещениях.
3. Получите колебательные характеристики резонансного усилителя без обратной связи.
4. Наблюдайте колебания в стационарном и переходных режимах.

Порядок выполнения:

1. Исследование режимов самовозбуждения генератора
2. Колебательные характеристики
3. Переходной режим

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 5 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Изобразить обобщенную схему автогенератора.
2. Сформулируйте критерии устойчивости.
3. Баланс фаз и баланс амплитуд на примере изучаемой цепи.
4. Какие колебания дают начало процессу самовозбуждения?
5. Какова роль усилительного элемента в схеме автогенератора?
6. Какова роль обратной связи?
7. Какова роль нелинейного элемента?
8. От чего зависит частота генерации?

Лабораторная работа №9

Исследование аналого-цифрового и цифроаналогового преобразования сигналов.

Цель работы:

Изучение принципов действия преобразователей аналогового сигнала в цифровой и наоборот. Снятие статических характеристик преобразователей. Наблюдение осциллограмм преобразованных сигналов при разных частотах дискретизации и разрядности цифрового сигнала.

Задание:

1. Получите статические характеристики А-Ц и Ц-А преобразований.
2. Получите осциллограммы исходного сложного сигнала, отсчеты этого сигнала и сигнала, восстановленного в ЦАП.
3. Изучите влияние частоты дискретизации, разрядности кода и сглаживающего фильтра на точность преобразования.

Порядок выполнения:

1. Снятие статической характеристики АЦП.
2. Снятие статической характеристики ЦАП
3. Прохождение сложного сигнала через систему АЦП+ЦАП.
4. Влияние разрядности на точность А-Ц преобразования.

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 6 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004.
<http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Изобразите функциональную схему цифровой системы связи для передачи аналоговых сигналов.
2. Каково назначение АЦП?
3. Какое отношение к работе АЦП имеет теорема В.А. Котельникова?
4. Какое влияние на работу АЦП и ЦАП оказывает разрядность?
5. Какой вид имеет статическая характеристика системы АЦП+ЦАП?

Практическое занятие №1

Расчет первичных параметров передачи кабеля связи.

Цель работы:

Приобрести общее представление о расчете первичных параметров передачи кабеля связи

Задание:

1. Определение конструктивных данных цепи кабеля связи
2. Расчет первичных параметров передачи цепи

Порядок выполнения:

1. Расчет активного сопротивления
2. Расчет индуктивности цепи
3. Расчет емкости цепей линий связи
4. Расчет проводимости изоляции цепей линии связи.

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 4 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какие первичные параметры кабельных систем вы знаете?.
2. Какие параметры необходимы для расчета первичных параметров кабелей связи?

Практическое занятие №2

Расчет вторичных параметров передачи кабеля связи.

Цель работы:

Приобрести общее представление о расчете вторичных параметров передачи кабеля связи

Задание:

1. Расчет вторичных параметров передачи кабеля связи

Порядок выполнения:

1. Расчет коэффициента затухания
2. Расчет коэффициента фазы
3. Расчет скорости распространения
4. Расчет волнового сопротивления

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 5 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какие вторичные параметры кабельных систем вы знаете?
2. Какие параметры необходимы для расчета вторичных параметров кабелей связи?

Практическое занятие №3

Определение по критериям эффективности систем связи.

Цель работы:

Приобрести общее представление об определении эффективности аналоговых и цифровых систем по критериям.

Задание:

1. Расчет по критериям эффективности систем связи

Порядок выполнения:

1. Определение критериев
2. Расчет по определенным критериям
3. Анализ результатов

Форма отчетности:

Отчет по лабораторной работе, скрепленный титульным листом. Отчет должен содержать название работы, цель, задание и результат выполнения задания.

Задания для самостоятельной работы:

Предусмотрены вариантом студента.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в 6 разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Нефедов, В. И. Общая теория связи : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. И. Нефедов, А. С. Сигов. - Москва : Юрайт, 2016. - 495 с.

Дополнительная литература

1. Борисенко А.В. Теория электрической связи / Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1,2. / Санкт-Петербург, СПбГУТ, - 2004. <http://ecat.brstu.ru/catalog/Ресурсы%20свободного%20доступа/Борисенко%20А.В.Теория%20электрической%20связи.МУ.2004.pdf>.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какие критерии эффективности систем связи вы знаете?
2. Какие параметры наиболее значимы?

9.2. Методические указания по выполнению контрольной работы

Работа посвящена разработке информационного обеспечения задачи предметной области. Задание включает в себя следующие разделы:

1. Выполнить энергетический расчет спутникового канала.
 - 1.1. Определить расстояния от земных станций до бортового ретранслятора.
 - 1.2. Рассчитать угол места и азимут на спутник с земных станций.
 - 1.3. Рассчитать затухание энергии сигнала в свободном пространстве.
 - 1.4. Определить коэффициенты усиления антенны спутника.
 - 1.5. Рассчитать полное затухание радиосигнала на участках линии спутниковой связи.
 - 1.6. Рассчитать мощности для передатчиков земной станции и бортового ретранслятора
 2. Определить параметры электромагнитной совместимости системы.
 - 2.1. Рассчитать приращение шумовой температуры.
 - 2.2. Определить расстояние от станции до спутников.
 - 2.3. Определить расстояние между земными станциями.
 - 2.4. Рассчитать усиление антенн по направлению на мешающую систему.
 - 2.5. Вычислить потери при распространении сигнала на трассе вверх и вниз.
- Расчет производится каждым студентом индивидуально, по вариантам.

10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) – преподаватель использует для:

- получения информации при подготовке к занятиям,
- создания презентационного сопровождения лекций;
- интерактивного общения;
- ОС Windows 7 Professional;
- Microsoft Office 2007 Russian Academic OPEN NO Level;
- Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Security;
- ПО “Антиплагиат”

11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

<i>Вид занятия</i>	<i>Наименование аудитории</i>	<i>Перечень основного оборудования</i>	<i>№ ЛР или ПЗ</i>
1	2	3	4
ЛР	Дисплейные классы	Персональные компьютеры	1-9
ПЗ	Дисплейные классы	Персональные компьютеры	1-3
КР	Дисплейные классы	Персональные компьютеры	
СР	ЧЗЗ	-	-

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
ОПК-3	Способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации	1. Общие сведения о системах связи	1.1. Информация, сообщения, сигналы	Вопрос к зачету. Экзаменационный билет
		2. Математические модели сигналов	2.1. Сигналы как элементы функциональных пространств	Вопрос к зачету. Экзаменационный билет
			2.2. Разложение сигналов в обобщенный ряд Фурье	
			2.3. Спектральное представление сигналов	
		3. Преобразование сигналов в типовых функциональных узлах систем связи	3.1. Особенности преобразования сигналов в линейных, параметрических и нелинейных функциональных узлах	Вопрос к зачету. Экзаменационный билет
			3.2. Перемножение сигналов	
			3.3. Амплитудная модуляция	
			3.4. Другие виды линейной модуляции (БМ, ОМ, КАМ)	
			3.5. Детектирование сигналов с линейными видами модуляции	
			3.6. Преобразование частоты сигналов	
		4. Математические модели случайных процессов	4.1. Понятие случайного процесса	Экзаменационный билет
			4.2. Сокращенное описание случайных процессов	
		5. Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов	5.1. Прохождение случайных процессов через безынерционные цепи	Экзаменационный билет
5.2. Прохождение случайных процессов через линейные цепи				
6. Оптимальный прием дискретных сообщений	6.1. Постановка задачи	Экзаменационный билет		
	6.2. Критерии качества приема дискретных сообщений			
	6.3. Синтез оптимального демодулятора при известном ансамбле сигналов			
ПК-8	Умение собирать и анализировать	1. Общие сведения о системах	1.2. Обобщенная структурная схема системы связи	Вопрос к зачету. Экзаменационный билет

информацию для формирования исходных данных для проектирования средств и сетей связи и их элементов	связи		
	2. Математические модели сигналов	2.4. Дискретизация и восстановление сигналов 2.5. Квазигармоническое представление сигналов	Вопрос к зачету. Экзаменационный билет
	3. Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи	3.7. Угловая (ЧМ и ФМ) модуляция	Вопрос к зачету. Экзаменационный билет
		3.8. Детектирование сигналов с угловой модуляцией	
		3.9. Виды модуляции, используемые при передаче дискретных сообщений	
	4. Математические модели случайных процессов	4.3. Спектральный анализ случайных процессов	Экзаменационный билет
	5. Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов	5.3. Узкополосные случайные процессы	Экзаменационный билет
	6. Оптимальный прием дискретных сообщений	6.4. Потенциальная помехоустойчивость когерентного приема	Экзаменационный билет
		6.5. Сравнительный анализ потенциальной помехоустойчивости основных видов цифровой модуляции	
		6.6. Синтез оптимального демодулятора в канале с неопределенной фазой	

2. Вопросы к зачету / экзаменационные вопросы

№ п/п	Компетенции		Вопросы к зачету	№ и наименование раздела
	Код	Определение		
1	2	3	4	5
1	ОПК-3	Способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации	1. Информация, сообщения, сигналы	1. Общие сведения о системах связи
			1. Сигналы как элементы функциональных пространств	2. Математические модели сигналов
			2. Разложение сигналов в обобщенный ряд Фурье	
			3. Спектральное представление сигналов	
			1. Особенности преобразования сигналов в линейных, параметрических и нелинейных функциональных узлах	3. Преобразования сигналов в типовых функциональных

			2.Перемножение сигналов 3.Амплитудная модуляция 4.Другие виды линейной модуляции (БМ, ОМ, КАМ) 5.Детектирование сигналов с линейными видами модуляции 6.Преобразование частоты сигналов	узлах систем связи
2	ПК-8	Умение собирать и анализировать информацию для формирования исходных данных для проектирования средств и сетей связи и их элементов	1. Обобщенная структурная схема системы связи	1. Общие сведения о системах связи
			1. Дискретизация и восстановление сигналов	2. Математические модели сигналов
			2. Квазигармоническое представление сигналов	
			1. Угловая (ЧМ и ФМ) модуляция	3. Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи
			2. Детектирование сигналов с угловой модуляцией	
3. Виды модуляции, используемые при передаче дискретных сообщений				

№ п/п	Компетенции		ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ	№ и наименование раздела
	Код	Определение		
1	2	3	4	5
1	ОПК-3	Способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации	1. Информация, сообщения, сигналы	1. Общие сведения о системах связи
			2. Сигналы как элементы функциональных пространств	2. Математические модели сигналов
			3. Разложение сигналов в обобщенный ряд Фурье	
			4. Спектральное представление сигналов	
			5. Особенности преобразования сигналов в линейных, параметрических и нелинейных функциональных узлах	3. Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи
			6. Перемножение сигналов	
			7. Амплитудная модуляция	
			8. Другие виды линейной модуляции (БМ, ОМ, КАМ)	
			9. Детектирование сигналов с линейными видами модуляции	
			10. Преобразование частоты сигналов	4. Математические модели случайных процессов
			11. Понятие случайного процесса	
			12. Сокращенное описание случайных процессов	5. Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов
			13. Прохождение случайных процессов через безынерционные цепи	
			14. Прохождение случайных процессов через линейные цепи	

			15.Постановка задачи	6.Оптимальный прием дискретных сообщений
			16.Критерии качества приема дискретных сообщений	
			17.Синтез оптимального демодулятора при известном ансамбле сигналов	
2	ПК-8	Умение собирать и анализировать информацию для формирования исходных данных для проектирования средств и сетей связи и их элементов	1.Обобщенная структурная схема системы связи	1. Общие сведения о системах связи
			2.Дискретизация и восстановление сигналов	2.Математические модели сигналов
			3.Квазигармоническое представление сигналов	3.Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи
			4.Угловая (ЧМ и ФМ) модуляция	
			5.Детектирование сигналов с угловой модуляцией	
			6.Виды модуляции, используемые при передаче дискретных сообщений	4.Математические модели случайных процессов
			7.Спектральный анализ случайных процессов	5.Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов
			8.Узкополосные случайные процессы	
			9.Потенциальная помехоустойчивость когерентного приема	6.Оптимальный прием дискретных сообщений
			10.Сравнительный анализ потенциальной помехоустойчивости основных видов цифровой модуляции	
			11.Синтез оптимального демодулятора в канале с неопределенной фазой	

3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

Показатели	Оценка	Критерии
Знать (ОПК-3): - основы теории четырехполюсников и цепей с распределенными параметрами; (ПК-8): - основы устойчивости электрических цепей с	отлично	Во время защиты курсовой работы студент демонстрирует знание всех основных определений и продемонстрировал уверенное умение использовать методов выделения основных атрибутов и сущностей из предметной области, и способностью самостоятельно высказать мысль на научно-техническом языке.

<p>обратной связью, электрических аналоговых, дискретных и цифровых фильтров.</p> <p>Уметь (ОПК-3):</p> <ul style="list-style-type: none"> – проводить анализ физических процессов, происходящих в различных направляющих системах, устройствах сверхвысоких частот, в однородных и неоднородных средах; <p>(ПК-8):</p> <ul style="list-style-type: none"> – рассчитывать параметры электромагнитной совместимости. <p>Владеть (ОПК-3):</p> <ul style="list-style-type: none"> – навыками практической работы с лабораторными макетами аналоговых и цифровых устройств; <p>(ПК-8):</p> <ul style="list-style-type: none"> - методами компьютерного моделирования физических процессов при передаче информации 	хорошо	<p>Ответ содержит неточности. Дополнительные вопросы требуется, но студент с ними справляется отлично.</p>
	удовлетворительно	<p>Ответил только на один вопрос. На дополнительные вопросы отвечает неуверенно.</p>
	неудовлетворительно	<p>На вопросы студент отвечает неубедительно. На дополнительные вопросы преподавателя также не может ответить.</p>
	зачтено	<p>Во время ответа на зачете студент продемонстрировал уверенное знание материала и ответил на вопросы преподавателя.</p>
	не зачтено	<p>На поставленные вопросы студент не ответил. На дополнительные вопросы преподавателя также не может ответить.</p>

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности

Дисциплина Общая теория связи позволяет освоить основные закономерности обмена информацией на расстоянии, её обработку, эффективную передачу и помехоустойчивый приём в телекоммуникационных системах различного назначения. Она должна способствовать развитию творческих способностей студентов, умению формулировать и решать задачи оптимизации систем связи, умению творчески применять и самостоятельно повышать свои знания в области инфокоммуникаций.

Изучение дисциплины Общая теория связи предусматривает:

- лекции,
- лабораторные работы,
- практические занятия,
- курсовую работу,
- самостоятельную работу студента,

- зачет,
- экзамен.

В ходе освоения раздела 1 «Общие сведения о системах связи» студенты должны изучить: основные понятия и определения дисциплины и способы их применения.

В ходе освоения раздела 2 «Математические модели сигналов» студенты должны изучить: различные виды представления и математические модели сигналов.

В ходе освоения раздела 3 «Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи» студенты должны изучить: основные виды преобразований сигналов в узлах связи.

В ходе освоения раздела 4 «Математические модели случайных процессов» студенты должны изучить: различные виды представления и математические модели случайных сигналов, их математическое описание.

В ходе освоения раздела 5 «Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов» студенты должны изучить: преобразования случайных сигналов в узлах связи.

В ходе освоения раздела 6 «Оптимальный прием дискретных сообщений» студенты должны изучить: критерии и параметры оптимального приема сигналов.

В процессе проведения лабораторных работ происходит закрепление знаний, формирование умений и навыков реализации представления о работе с преобразованием сигналов.

В процессе проведения практических работ происходит закрепление знаний, формирование умений и навыков проектирования различных узлов связи.

В процессе проведения курсовой работы происходит закрепление знаний, формирование умений и навыков по расчету энергетических характеристик спутниковых каналов связи.

При подготовке к зачету/экзамену рекомендуется особое внимание уделить следующим вопросам: математические модели сигналов, преобразования сигналов, критерии и параметры оптимального приема сигналов.

Работа с литературой является важнейшим элементом в получении знаний по дисциплине. Прежде всего, необходимо воспользоваться списком рекомендуемой по данной дисциплине литературой. Дополнительные сведения по изучаемым темам можно найти в периодической печати и Интернете.

АННОТАЦИЯ
рабочей программы дисциплины
Общая теория связи

1. Цель и задачи дисциплины

Целью изучения дисциплины является: приобретение умений и навыков исследования проблем в своей предметной области, выбора методов и средств их решения, анализа результатов теоретических и экспериментальных исследований.

Задачей изучения дисциплины является: подготовка студента к самостоятельному решению теоретических и прикладных задач связанных с проектированием систем связи.

2. Структура дисциплины

2.1 Распределение трудоемкости по отдельным видам учебных занятий, включая самостоятельную работу: Лк – 53 часов, ЛР – 53 часов, ПЗ – 18 часов, СРС – 74 часов.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 252 часов, 7 зачетных единиц

2.2 Основные разделы дисциплины:

1. Общие сведения о системах связи
2. Математические модели сигналов
3. Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи
4. Математические модели случайных процессов
5. Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов
6. Оптимальный прием дискретных сообщений

3. Планируемые результаты обучения (перечень компетенций)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующей компетенции:

ОПК-3 - Способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации;

ПК-8 - Умение собирать и анализировать информацию для формирования исходных данных для проектирования средств и сетей связи и их элементов.

4. Вид промежуточной аттестации: зачет, экзамен

*Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе
на 20__-20__ учебный год*

1. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие дополнения:

2. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие изменения:

Протокол заседания кафедры № _____ от «___» _____ 20__ г.,
(разработчик)

Заведующий кафедрой _____
(подпись)

(Ф.И.О.)

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО
КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
ОПК-3	Способность владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации	3.Преобразование сигналов в типовых функциональных узлах	Преобразование формы и спектра сигналов во времени	<i>Отчеты по лабораторным работам.</i>
		4. Математические модели случайных процессов	Преобразование формы и спектра сигналов во времени	<i>Отчеты по лабораторным работам.</i>
		5. Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов	Исследование частотного модулятора. Расчет вторичных параметров передачи кабеля связи.	<i>Отчеты по лабораторным работам, практическим занятиям.</i>
		6. Оптимальный прием дискретных сообщений	Исследование аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования сигналов	<i>Отчеты по лабораторным работам.</i>
ПК-8	Умение собирать и анализировать информацию для формирования исходных данных для проектирования средств и сетей связи и их элементов	3.Преобразование сигналов в типовых функциональных узлах	Усиление сигналов	<i>Отчеты по лабораторным работам,</i>
		4. Математические модели случайных процессов	Амплитудная модуляция. Расчет первичных параметров передачи кабеля связи.	<i>Отчеты по лабораторным работам, практическим занятиям.</i>
		5. Прохождение случайных процессов через преобразователи сигналов	Исследование LC автогенератора	<i>Отчеты по лабораторным работам.</i>

		6. Оптимальный прием дискретных сообщений	Определение по критериям эффективности систем связи.	<i>Отчеты по практическим занятиям, курсовой работе.</i>
--	--	---	--	--

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

Показатели	Оценка	Критерии
<p>Знать (ОПК-3):</p> <ul style="list-style-type: none"> - основы теории четырехполюсников и цепей с распределенными параметрами; <p>(ПК-8):</p> <ul style="list-style-type: none"> - основы устойчивости электрических цепей с обратной связью, электрических аналоговых, дискретных и цифровых фильтров. <p>Уметь (ОПК-3):</p> <ul style="list-style-type: none"> - проводить анализ физических процессов, происходящих в различных направляющих системах, устройствах сверхвысоких частот, в однородных и неоднородных средах; <p>(ПК-8):</p> <ul style="list-style-type: none"> - рассчитывать параметры электромагнитной совместимости. <p>Владеть (ОПК-3):</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками практической работы с лабораторными макетами аналоговых и цифровых устройств; <p>(ПК-8):</p> <ul style="list-style-type: none"> - методами компьютерного моделирования физических процессов при передаче информации 	отлично	Во время защиты курсовой работы студент показал знание все основных определений и продемонстрировал уверенное умение использовать методы преобразования информации на практике, владение достаточным уровнем понимания материала, и способностью самостоятельно высказать мысль на научно-техническом языке.
	хорошо	Во время защиты курсовой работы студент показал не полное понимание материала и навыков владения практическими приемами.
	удовлетворительно	Во время защиты курсовой работы студент показал слабое понимание материала и навыков владения практическими приемами.
	неудовлетворительно	Во время защиты курсовой работы студент не продемонстрировал теоретических знаний по теме работы, либо не показал ни каких практических навыков..
	зачтено	Во время защиты лабораторных работ и практических работ студент ответил на поставленные преподавателем вопросы.
	не зачтено	Во время защиты лабораторных работ и практических работ студент не смог дать ответы на поставленные преподавателем вопросы. Либо отчет имеет ряд замечаний.

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи от «6» марта 2015 г. №174 и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «13» июля 2015 г. №475 и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «6» июня 2016 г. №429 и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «13» марта 2017 г. №125 и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «12» марта 2018 г. №130.

Программу составил:

Колтыгин Д.С., к.т.н, доцент _____

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры УТС

от «28» декабря 2018 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой _____ И.В. Игнатъев

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий выпускающей кафедрой _____ И.В. Игнатъев

Директор библиотеки _____ Т.Ф. Сотник

Рабочая программа одобрена методической комиссией факультета ЭиА

от «28» декабря 2018 г., протокол № 5

Председатель методической комиссии факультета _____

СОГЛАСОВАНО:

Начальник
учебно-методического управления _____

Г.П. Нежевец

Регистрационный № _____