МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра управления в технических системах

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
__________ Е.И. Луковникова
«_____» ___________ 201__ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Б1.В.8

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ

11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи

ПРОФИЛЬ ПОДГОТОВКИ

Многоканальные телекоммуникационные системы

Программа академического бакалавриата

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Стр.

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ …..…… 3

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ………………………„,…………………………….……….. 3

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ 4

3.1 Распределение объёма дисциплины по формам обучения……………...……… 4

3.2 Распределение объёма дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости ……………………………………………………………….……… 4

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ ……………………………………….………… 5

4.1 Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий …………… 5

4.2 Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам …..………… 7

4.3 Лабораторные работы………………………………………………………… 28

4.4 Семинары / практические занятия…. ………………………………….……… 28

4.5. Контрольные мероприятия: курсовой проект (курсовая работа), контрольная работа, РГР, реферат………………………………………………….……… 29

5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ………………………………… 30

6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ 31

7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ…………………………… 31

8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО – ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ………………………………………… 31

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ………………………………………………………………… 32

9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению лабораторных работ/ семинаров / практических работ ………………………………………….……… 32

10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ ………………………………………………………..…… 36

11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ ………………………………………………………..…… 36

Приложение 1. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине…………………………. 37

Приложение 2. Аннотация рабочей программы дисциплины ……………………….. 41

Приложение 3. Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе …..……… 42

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Вид деятельности выпускника

Дисциплина охватывает круг вопросов, относящихся к экспериментально-исследовательскому виду профессиональной деятельности выпускника в соответствии с компетенциями и видами деятельности, указанными в учебном плане.

Цель дисциплины

Формирование у обучающихся знаний по теории численных методов, навыков их применения для решения практических задач с использованием ЭВМ.

Задачи дисциплины

Подготовить обучающихся к самостоятельной работе по освоению основных численных методов решения линейных и нелинейных уравнений и систем, теории интерполирования, численного дифференцирования и интегрирования.

Код компетенции	Содержание компетенций	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3
ПК-17	способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики	**знать:** современные теоретические и экспериментальные методы исследования. **уметь:** применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования на практике. **владеть:** основными методами работы на ЭВМ с использованием универсальных прикладных программ.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.В.8 Численные методы относится к вариативной части.

Дисциплина Численные методы базируется на знаниях, полученных при изучении учебной дисциплины основной общеобразовательной программы: Б1.Б.7 Дискретная математика.

Основываясь на изучении перечисленной дисциплины, Численные методы представляет основу для изучения дисциплин: Б1.Б.16 Вычислительная техника и информационные технологии.

Такое системное междисциплинарное изучение направлено на достижение требуемого ФГОС уровня подготовки по квалификации бакалавр.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Распределение объема дисциплины по формам обучения

2015-2017 год набора

Форма обучения	*Курс*	*Семестр*	*Трудоемкость дисциплины в часах*						*Контрольная работа*	*Вид промежуточной аттестации*
			Всего часов (с экз.)	*Аудиторных часов*	*Лекции*	*Лабораторные работы*	*Практические занятия*	*Самостоятельная работа*		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Очная	2	4	144	54	18	-	36	54	кр	экзамен
Заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Заочная (ускоренное обучение)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Очно-заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

2018 год набора

Форма обучения	*Курс*	*Семестр*	*Трудоемкость дисциплины в часах*						*Контрольная работа*	*Вид промежуточной аттестации*
			Всего часов (с экз.)	*Аудиторных часов*	*Лекции*	*Лабораторные работы*	*Практические занятия*	*Самостоятельная работа*		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Очная	2	4	144	54	18	-	36	54	-	экзамен
Заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Заочная (ускоренное обучение)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Очно-заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

3.2. Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости

Вид учебных занятий	*Трудо-емкость (час.)*	*в т.ч. в интерактивной, активной, иннова-циионной формах, (час.)*	*Распределение по семестрам, час*
			4
1	**2**	**3**	**4**
I. Контактная работа обучающихся с преподавателем (всего)	54	12	54
Лекции (Лк)	18	4	18
Практические занятия (ПЗ)	36	8	36

Контрольная работа (кр)	+	-	+
Групповые (индивидуальные) консультации	+	-	+
II.Самостоятельная работа обучающихся (СР)	54	-	54
Подготовка к практическим занятиям	15		15
Выполнение контрольной работы	15		15
Подготовка к экзамену в течении семестра	24		24
III. Промежуточная аттестация экзамен	36	-	36
Общая трудоемкость дисциплины час	144	-	144
зач. ед.	4	-	4

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий для очной формы обучения:

№ раз-дела и темы	*Наименование раздела и тема дисциплины*	*Трудоем-кость, (час.)*	*Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)*		
			учебные занятия		*самостоятельная работа обучающихся*
			лекции	*практические занятия*	
1	2	3	4	5	6
1.	**Основы теории погрешностей.**	**10**	**1**	**-**	**9**
1.1.	Классификация погрешностей.	4,5	0,5	-	4
1.2.	Действия с приближенными числами.	5,5	0,5	-	5
2.	**Численные методы решения систем линейных уравнений.**	**20**	**3**	**8**	**9**
2.1.	Методы решения систем линейных уравнений.	4	1	-	3
2.2.	Конечные методы решения систем линейных уравнений.	8	1	4	3
2.3.	Итерационные методы решения систем линейных уравнений.	8	1	4	3
3.	**Численные методы решения нелинейных уравнений.**	**21**	**4**	**8**	**9**
3.1.	Решение нелинейных уравнений.	3	1	-	2
3.2.	Отделение и уточнение корней нелинейного уравнения.	2	1	-	1
3.3.	Конечные методы уточнения корней.	8	1	4	3
3.4	Итерационные методы уточнения корней.	8	1	4	3
4.	**Интерполирование функций.**	**20**	**4**	**7**	**9**
4.1.	Интерполяционный полином Лагранжа.	9,5	2	3,5	4
4.2.	Интерполяционный полином Ньютона.	10,5	2	3,5	5
5.	**Численное дифференцирование.**	**19**	**3**	**7**	**9**
5.1	Использование интерполяционных многочленов Лагранжа для формул численного дифференцирования.	10,5	2	3,5	5
5.2	Метод неопределенных коэффициентов.	8,5	1	3,5	4

6.	**Численное интегрирование.**	**18**	**3**	**6**	**9**
6.1	Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами.	7	1	3	3
6.2	Квадратурные формулы типа Гаусса.	7	1	3	3
6.3	Приближенное вычисление несобственных интегралов.	4	1	-	3
	ИТОГО	**108**	**18**	**36**	**54**

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам

Раздел 1. Основы теории погрешностей.
Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Тема 1.1 Классификация погрешностей.

Поскольку численные методы предназначены для отыскания приближенного решения задач, не решаемых точными методами, такому решению всегда свойственна некоторая погрешность. Рассмотрим здесь источники погрешности.

1) Погрешность модели.
2) Погрешность исходных данных.
3) Погрешность метода
4) Погрешность округления.

Погрешность – это разница между точным значением величины и известным значением. Известное значение называют приближенным.

Абсолютной погрешностью приближённой величины А называется модуль разности точного (АТ) и приближённого значения (А).

Относительной погрешностью γ называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближённой величины.

Абсолютную погрешность обычно невозможно определить, так как неизвестно точное значение, поэтому пользуются оценками этой величины.

Оценка погрешности d – это положительная величина заведомо превышающая реальную абсолютную погрешность. По данному определению понятно, что оценок бесконечно много. Среди всех возможных при данной информации оценок погрешностей есть наименьшая. Такая оценка называется **предельной погрешностью.** В некоторых случаях предельная погрешность равна абсолютной, а в некоторых – больше. Целью оценки погрешности всегда является максимальное приближение к предельной погрешности.

Тема 1.2 Действия с приближенными числами.

Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

В частности, для суммы двух чисел a и b любого знака получаем $\Delta_{a\pm b} \le \Delta_a + \Delta_b$.

Из этой теоремы следует, что абсолютная погрешность алгебраической суммы не меньше абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых, т. е. увеличение точности за счет других слагаемых невозможно. Поэтому бессмысленно сохранять излишние десятичные знаки в более точных слагаемых. Отсюда вытекает следующее.

Правило сложения и вычитания приближенных чисел:

1) выделить наименее точное число (или числа), т. е. такое, в десятичной записи которого наименьше е число верных десятичных знаков;

2) округлить остальные числа так, чтобы каждое из них содержало на один (запасной) знак больше, чем выделенное число;

3) выполнить сложение и вычитание с учетом сохраненных знаков;

4) полученный результат округлить до предпоследнего знака.

Напомним правила округления числа, т. е. его замены числом с меньшим количеством значащих цифр:

1) если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые десятичные знаки оставляют без изменения;

2) если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;

3) если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а среди следующих за ней цифр есть отличные от нуля, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;

4) если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а все последующие - нули, то последний из сохраняемых десятичных знаков увеличивают на 1, когда он нечетен, и сохраняют неизменным, когда он четен (правило четной цифры).

Относительная погрешность произведения (частного) приближенных чисел не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел.

В частности, для трех чисел $\delta_{ab/c} \le \delta_a + \delta_b + \delta_c$

Из этого следует, что относительная погрешность произведения и частного не может быть меньше относительной погрешности наименее точного из исходных чисел (т. е. имеющего меньше всеговерных значащих цифр). Поскольку относительная погрешность числа определяется количеством его верных значащих цифр, то при умножении и делении бессмысленно оставлять значащих цифр больше, чем их было в исходном числе с наименьшим количеством верных значащих цифр.

Отсюда вытекает следующее правило.

Правило умножения и деления приближенных чисел:

1) из всех чисел, которые предстоит умножать и делить, выделить наименее точное — то, в котором меньше всего верных значащих цифр;

2) округлить остальные числа так, чтобы каждое из них содержало на одну (запасную) значащую цифру больше, чем выделенное число;

3) выполнить умножение и деление округленных чисел с учетом сохраненных значащих цифр;

4) оставить в ответе столько значащих цифр, сколько их было в наименее точном числе.

Раздел 2. Численные методы решения систем линейных уравнений.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Тема 2.1 Методы решения систем линейных уравнений.

Системой Линейных Алгебраических Уравнений (СЛАУ) будем называть систему уравнений следующего вида:

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
A_{11} & *X_1 & + & A_{12} & *X_2 & + & A_{13} & *X_3 & + & A_{14} & *X_4 & + & \dots & + & A_{1n} & *X_n & = & B_1 \\
A_{21} & *X_1 & + & A_{22} & *X_2 & + & A_{23} & *X_3 & + & A_{24} & *X_4 & + & \dots & + & A_{2n} & *X_n & = & B_2 \\
\dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_{n1} & *X_1 & + & A_{n2} & *X_2 & + & A_{n3} & *X_3 & + & A_{n4} & *X_4 & + & \dots & + & A_{nn} & *X_n & = & B_n
\end{array}
$$

Такую систему уравнений можно записывать в сокращенном виде, используя как минимум 2 формы:

1. С использованием знака суммы $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$
2. С использованием матриц: ***A*X=B,*** здесь ***A*** – матрица системы, ***X*** – вектор неизвестных, ***B*** – вектор правой части. Иногда используют расширенную матрицу системы ***A'*** – которая образуется дописыванием вектора ***B*** справа к матрице ***A***.

Матрица системы:

$$
\begin{array}{cccccc}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \dots & A_{1n} \\
A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \dots & A_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & A_{n4} & \dots & A_{nn}
\end{array}
$$

Расширенная матрица системы:

$$
\begin{array}{ccccccc}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \dots & A_{1n} & B_1 \\
A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \dots & A_{2n} & B_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & A_{n4} & \dots & A_{nn} & B_n
\end{array}
$$

В алгебре для линейных уравнений вводится понятие линейной зависимости.

О. Линейной комбинацией уравнений T и M называют уравнение полученное по формуле C_1*T+ C_2*M, где C_1 и C_2 постоянные коэффициенты.

Если одно из уравнений системы может быть представлено линейной комбинацией остальных, то такая система называется линейно-зависимой. Линейная зависимость системы определяется вырождением матрицы системы.

О. Матрица *A* будет вырожденной, если определитель этой матрицы равен нулю => ***det(A)=0***.

Линейная зависимость СЛАУ означает, что некоторые из уравнений системы «лишние» и могут быть без ущерба для решения удалены из системы. В дальнейшем будем считать, что все зависимые уравнения уже удалены из системы, хотя проверку неравенства нулю определителя матрицы системы будем планировать перед решением СЛАУ.

В алгебре доказывается, что для линейно независимой СЛАУ, в которой N уравнений и M неизвестных:

- При N>M (число уравнений больше числа неизвестных) – решения СЛАУ не существует.
- При N<M (число уравнений меньше числа неизвестных) – существует бесконечно много решений СЛАУ.
- При N=M (число уравнений равно числу неизвестных) – существует единственное решение СЛАУ.

Нас интересует только последний вариант, поэтому будем считать, что число уравнений равно числу неизвестных. Таким образом, рассмотрим методы численного решения СЛАУ с квадратной матрицей системы, которая является линейно-независимой. Для численного решения СЛАУ (аналогично нелинейных уравнениям) используют конечные и итерационные методы.

Тема 2.2 Конечные методы решения систем линейных уравнений.

В конечном методе можно заранее точно указать количество операций, которое потребуется для решения СЛАУ.

Метод исключения Гаусса

Метод делится на два этапа: прямой и обратный ход. ***Прямой*** ход – с помощью эквивалентных преобразований (не изменяющих решения системы) исключаем элементы (делаем равными 0), лежащие ниже или выше главной диагонали. В общем случае необходимо получить треугольную матрицу. Тогда возможны 2 варианта: приведение матрицы системы к L или U виду.

О. Главной диагональю квадратной матрицы называют множество элементов с одинаковыми индексами A_{ii}. Эти элементы располагаются на диагонали матрицы от верхнего левого угла до правого нижнего.

О. Матрица называется треугольной, если все элементы, лежащие ниже главной диагонали равны нулю (**L –матрица**, от слова Low-нижний) или выше главной диагонали равны нулю (**U –мат**рица, от слова Upper-верхний)

Обратный ход используется для определения неизвестных x_i в треугольной матрице системы.

В качестве преобразований, не изменяющихся решений системы, являются следующие преобразования **расширенной матрицы** системы:

1. Деление или умножение строки на любое постоянное число, кроме 0.
2. Сложение или вычитание любых двух строк.
3. Построение линейных комбинаций строк.
4. Перестановка строк.
5. Перестановка столбцов с одновременным изменением индексов переменных.

Рассмотрим процесс исключения прямого хода на примере получения L матрицы:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} & b_n \end{matrix}$$

В данном случае необходимо исключить элементы, лежащие ниже главной диагонали. При исключении элемент нужно будет обратить в ноль. Исключения производятся по столбцам, при этом базовым или **главным** является диагональный элемент и его строка. Для

L матрицы нужно начинать с 1-го столбца и исключать элементы ниже главной диагонали. Таким образом, номер столбца будет совпадать с номером главной строки, которая содержит главный диагональный элемент. Легко убедиться, что вариант исключения, приводящий к получению L матрицы из произвольной матрицы можно реализовать с помощью линейных преобразований следующего вида:

$$a_{2j} = a_{2j} - a_{1j}\frac{a_{21}}{a_{11}} \Rightarrow a_{kj} = a_{kj} - a_{1j}\frac{a_{k1}}{a_{11}} \Rightarrow a_{kj} = a_{kj} - a_{mj}\frac{a_{km}}{a_{mm}} \text{ и } b_k = b_k - b_m\frac{a_{km}}{a_{mm}}$$

$$m = 1,2,\ldots,n-1$$
$$k = m+1, m+2,\ldots,n$$
$$j = m, m+1,\ldots,n$$

Для получения U – матрицы необходимо идти в обратную сторону:

$$m = n, n-1,\ldots,2$$
$$k = m-1, m-2,\ldots,1$$
$$j = m, m-1,\ldots,1$$

Точность вычисления по методу Гаусса определяется процессами округления при этом, чем больше абсолютное значение использующегося диагонального элемента, тем точнее будет вычисление. Если диагональный элемент =0, то вычислять нельзя. Если он мал, то результат будет неточным.

Существует модификация метода Гаусса за счет использования алгоритма выбора главного элемента (главный элемент – диагональный элемент, который используется при вычислениях). В процессе вычисления используются все элементы главной диагонали, как главные элементы. Поэтому, на главной диагонали матричной системы желательно иметь мах по модулю элементы в своих строках (столбцах). Выбор такого главного элемента может производиться либо перестановкой строк расширенной матрицы, либо перестановкой столбцов (во втором случае необходимо будет переименовывать переменные, поэтому чаще всего используется первый вариант – перестановка строк).

Таким образом, метод Гаусса существует в двух видах: просто метод Гаусса и с выбором главного элемента.

Рассмотрим обратный ход метода Гаусса. Пусть в результате исключения мы получим L матрицу.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{matrix} \Rightarrow x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{a'_{33}}\left(b'_3 - a'_{34}x_4\right) \Rightarrow x_k = \frac{1}{a'_{kk}}\left(b'_k - \sum_{j=k+1}^{n} a'_{kj}x_j\right)$$

получили формулу обратного кода для L матрицы при $k = n, n-1, n-2,\ldots,1$

Для U – матрицы: $x_k = \frac{1}{a'_{kk}}\left(b'_k - \sum_{j=1}^{k-1} a'_{kj}x_j\right)$

Метод полного исключения Жордана

Жордан предложил исключительные элементы не только ниже главной диагонали, но и выше, в результате такого преобразования матрица становится полностью диагональной, т. е. все элементы, кроме диагональных равны 0.

Для такого исключения можно воспользоваться той же формулой Гаусса, но индексы меняются иначе:

m =1,2…n. $k \neq m$ j = 1…n

Обратный ход для метода Жордана чрезвычайно прост.

$x_i = \frac{b'_i}{a_{ii}}$ i = 1,2…n. Штрих означает, что это элементы расширенной матрицы, преобразованные после процедуры исключения.

Использования метода Гаусса и Жордана для матричных вычислений

Вычисление определителя матрицы.

Так как исключения в методе Гаусса не меняют значение определителя матрицы, то с помощью прямого хода можно привести матрицу к треугольному виду L или U. В тоже время определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. Следовательно, получаем алгоритм вычисления определителя для произвольной матрицы:

По данной формуле производим исключение элементов выше или ниже главной диагонали и перемножаем элементы главной диагонали $\det A = \prod_{i=1}^{n} a'_{ii}$

Определение элементов обратной матрицы:

По определению обратной матрицы $AA^{-1} = E$. Это произведение эквивалентно множеству систем уравнений для столбцов обратной матрицы. Таким образом, определение обратной матрицы сводится к решению систем линейных уравнений, где вектор неизвестных – один из столбцов обратной матрицы, а в правой части один из столбцов единичной матрицы. Матрица системы во всех уравнениях ода и та же. Для решения этих систем лучше использовать метод Жордана.

Метод Халецкого

Суть метода Халецкого в разложении матричной системы в произведение матрицы U*L = A. При этом диагональные элементы одной из треугольных матриц равны 1. Для решения методом Халецкого необходимо получить матрицы разложения и воспользоваться обратным ходом:

$$A = U * L \;=>\; AX = B \;=>\; U(L * X) = B \;=>\; Y = L * X \;\Rightarrow \begin{cases} UY = B \\ LX = Y \end{cases}$$

В методе Халецкого вместо 1 задачи решения СЛАУ получают 2 задачи решения СЛАУ, но обе эти задачи имеют треугольные матрицы систем и решаются только с помощью 2-х обратных хода. Поскольку обратный ход имеет только 2 цикла вместо 3 циклов прямого хода, то такой вариант сулит значительные выгоды. Все определяется только затратами на

Для решения полученной системы уравнений требуется следующие формулы обратного хода для треугольных матриц U и L:

Для U – матрицы: $y_k = \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} U_{kj} x_j \right)$, для L матрицы $x_k = \frac{1}{L_{kk}} \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} L_{kj} x_j \right)$

Очень интересен алгоритм вычисления элементов матриц разложения L и U. Диагональные элементы матрицы U_{kk} =1. Воспользуемся формулой произведения матриц. A=U*L =A_{ij}= $\left(\sum_{k=1}^{n} U_{ik} L_{kj} \right)$ - здесь строка U умножается на столбец L. 1-я строка U и 1-й столбец L содержат только по одному элементу => A_{11}=L_{11}, далее можно найти элементы 2-й строки U и 2 столбца L => 3-я строка и 3-й столбец и т.д.. Таким образом, вычисление треугольных матриц максимально оптимизировано. Кроме того, элементы этих матриц можно последовательно располагать на месте элементов матрицы A. Когда размер оперативной памяти – критичный параметр, такой алгоритм будет очень полезным.

Сравнительная характеристика методов решения СЛАУ

- При решении сравнительно небольших СЛАУ метод Гаусса выгоднее других методов компромиссом между простотой и скоростью. Метод Жордана проще чем метод Гаусса, но требует гораздо больше вычислений (так как использует двойной прямой ход). Метод Халецкого быстрее метода Гаусса, но при этом и гораздо сложнее для реализации.
- Сравнение вариантов метода Гаусса с выбором главного элемента и без него показывает, что выбор главного элемента всегда лучше.
- При увеличении размера СЛАУ метод Гаусса постепенно теряет свое преимущество перед методом Халецкого. Этот метод разработан специально для ЭВМ и имеет оптимальные варианты расчета.
- Метод Жордана особенно удобен при решении задач, когда есть много СЛАУ у которых одна матрица (например при вычислении обратной матрицы). В такой задаче

он существенно лучше метода Гаусса. Правда в этой задаче ему конкурентом является метод Халецкого, где так же можно оптимизировать подобные вычисления.

Тема 2.3 Итерационные методы решения систем линейных уравнений.

В алгебре для векторов и матриц вводят численную характеристику – норму. В некоторых случаях она имеет аналогию с длиной. Норма должна удовлетворять условиям:

$$1.\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \_\_\_\_\_\_ 2.\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \_\_\_\_\_ 3.\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

Обычно определяют 3 разных нормы:

а) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ в) бесконечная $\|x\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\|A\| = \max\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ $\|A\|_\infty = \max\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$

с) Евклидова $\|x\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$ $\_и$ ____________ $\|A\|_e = \dfrac{\sqrt{\sum_j \sum_j a_{ij}^{\,2}}}{N}$

Итерационные методы СЛАУ основаны на получении итерационных векторов последовательных приближений. Находится каждое к-е приближение через к–1: $x^{(k)} = F(x^{(k-1)})$

Начиная преобразования с начального вектора ($x^{(0)} \to x^{(1)} \to x^{(2)} \to$), получим последовательные приближения векторов. Говорят, что эта последовательность векторов сходится к вектору x если $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x, \lim_{k\to\infty} \|x - x^{(k)}\| = 0$ Так как, оценить сходимость такой последовательности сложно, то пользуются косвенной оценкой вида $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le d.$

Метод простой итерации

Пусть задана система уравнений $AX = B,$ которая записывается в виде $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ ·

Выразим из этой системы в каждом уравнении по одной неизвестной

$$x_i + \sum_{j\ne i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} => x_i = b_i' - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}' x_{j,}где\_\mathrm{b_i}' = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$a_{ij}' = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, j \ne i \\ 0, i = j \end{cases} \_\_\_\_\_\_ X = B' - A'X \_\_\_\_ X^{(k)} = B' - nA'X^{(k-1)} \_\_\_ X_i = b_i' - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}' x_j$$

В качестве нулевого приближения выбираем $x^0 = B'$. Сходимость данного метода доказывается теоремой (следствие теоремы о сжимающих отображений).

Теорема: Если матрица А не вырождена и норма преобразованной матрицы $\|A'_{ij}\| \le 1,$ то метод простой итерации будет сходящимся.

Замечание:

Таким образом, сходимость метода простой итерации не зависит от выбора начального приближения x^0, а зависит только от матричной системы. Условием сходимости будет следующая формула $\|A'\| \le 1$. В качестве нормы может быть выбрана любая из трех норм. По норме а) норма матрицы равна сумме модулей элементов столбца, который имеет мах сумму. По норме в) норма = сумме модулей элементов строки, среди которой выбирается мах.

Таким образом, либо $\begin{cases} \max\limits_{j} \sum\limits_{j} \left| a_{ij}' \right| < 1 \\ \max\limits_{j} \sum\limits_{j} \left| a_{ij}' \right| < 1 \end{cases}$ => Рассмотрим формулу для a_{ij}, $= \max\limits_{j} \sum\limits_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$

Для всех строк *i*: $\sum\limits_{j \neq i} \left| a_{ij} \right| < \left| a_{ii} \right|$ – условие диагонального преобладания. Модуль элемента главной диагонали больше суммы модулей остальных элементов строки. Такое условие должно быть справедливо для всех строк. Из второй нормы получаем другое условие $\sum\limits_{i \neq j} \left| a_{ij} \right| < \left| a_{jj} \right|$. В данном случае диагональный элемент должен быть больше по модулю суммы модулей остальных элементов столбца. Это свойство справедливо для всех столбцов.

Алгоритм метода простой итерации

1. Выбираем $x^0 = B'$ и преобразуем матричную систему к итерационному виду $x^{(k)} = B' - A' X^{(k-1)}$.
2. Используя итерационную формулу находим следующее приближение.
3. Сравним по формуле $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| < d$ норму с заданной погрешностью. Если условие выполняется, то прекращаем вычисление, в противном случае, возвращаемся к п 2.

Метод Зейделя

Зейдель предложил усовершенствовать итерационную формулу, путем использования уже полученных элементов вектора X. Тогда формула выглядит следующим образом:

$$x_i^{(k)} = b_i' - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}' x_j^{(k-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}' x_j^{(k)}$$ – формула Зейделя.

У Зейделя каждое приближение сходится быстрее, чем в методе простой итерации. Поэтому весь метод сходится гораздо быстрее. Сходимость метода Зейделя можно определять по формулам метода простой итерации (так как этот метод просто улучшение метода простой итерации => если сходится простой метод, то должен сходиться и улучшенный метод).

Метод координатной релаксации

Суть метода – последовательное уменьшение (релаксации) вектора невязки.

Пусть задана система уравнений *A*X=B*, если у нас есть некое приближение к точному решению $X^{(0)}$, то после подстановки этого приближения в систему уравнений равенства не будет $A^* X^{(0)} \neq B$ => можно определить вектор разности правой и левой части $N = B - A^* X^{(0)}$ – это вектор невязки. Чем точнее приближение, тем меньше вектор невязки (в общем случае норма вектора невязки стремится к нулю при приближении к точному решению). Таким образом, если есть метод, который будет последовательно уменьшать вектор невязки, то этот метод является методом решения СЛАУ. Такой метод назвали методом релаксации. Построим алгоритм подобного метода путем изменения на 1 шаге только 1 координаты, когда это изменение приводит к обнулению максимального по модулю элемента вектора невязки. Примерный алгоритм:

1. Задаем систему уравнений (все исходные матрицы *A и B*).
2. Выбираем начальное приближение $X^{(0)} = B$ аналогично методу простой итерации (в методе релаксации сходимость тоже не зависит от выбора начального приближения).
3. Вычислим вектор невязки по формуле $N_i^{(k)} = b_i - \sum\limits_{j=i}^{n} A_{ij} x_j^{(k-1)}$
4. Найдем максимальный по модулю элемент вектора невязки $N_k = max_i(N_i)$ здесь k – номер максимального элемента.

5. Изменим x_k на такую величину Δx_k , чтобы $N_k = 0$. => $N_i^{(t)} = b_i - \sum_{j=i}^{n} A_{ij} x_j^{(t-1)} - A_{kk} * \Delta x_k = 0$

=> $N_k^{(t)} = N_k^{(t-1)} - A_{kk} * \Delta x_k = 0$ => $\Delta x_k = \frac{N_k^{(t-1)}}{A_{kk}}$. Данная формула дает простое вычисление Δx_k.
6. Теперь вычислим следующее приближение $X^{(t)}_p = X^{(t-1)}_p$ при $p \neq k$ и $X^{(t)}_k = X^{(t-1)}_k + \Delta x_k$ и следующее приближение вектора невязки $N_p^{(t)} = N_p^{(t-1)} - A_{pk} * \Delta x_k$. Эти формулы являются итерационными формулами для данного метода.
7. Повторяем п.4-6 до тех пор пока норма вектора невязки не станет меньше заданной погрешности $\|N\|<\varepsilon$ - это условие прерывания итераций в данном итерационном методе.

Сравнительная характеристика итерационных методов решения СЛАУ

- Наиболее быстрый метод Зейделя, но он и самый сложный по формуле вычисления. Однако для большинства задач это усложнение вычисления не очень важно.
- Метод релаксации наименее сходящийся и количество итераций в нем всегда гораздо больше чем в других методах, но зато и операций на 1 итерацию здесь в N (число уравнений) раз меньше. Поэтому эффективность метода возрастает при увеличении числа уравнений в СЛАУ.
- Конечные методы предпочтительнее итерационных всегда, кроме 2 случаев – когда система уравнений чрезвычайно велика (слишком большие массивы требуются) и когда в матрице системы много нулей (разреженные матрицы).

Раздел 3. Численные методы решения нелинейных уравнений.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Тема 3.1 Решение нелинейных уравнений.

Во многих научных и инженерных задачах возникает необходимость решения нелинейных уравнений вида: $f(x)=0$. Решение такого уравнения принято называть корнем. Решить уравнение с заданной погрешностью ε фактически означает указать значение корня X такое, что в интервал неопределенности корня $X \pm \varepsilon$ попадает и точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью x. Эта точка и есть точное значение корня.

Численное решение нелинейного уравнения обычно проводят в два этапа. На первом этапе необходимо отделить корни нелинейного уравнения, т.е. найти такие интервалы изменения переменной x, где расположен только один корень. По сути дела, на этом этапе находят приближённое значение корней с погрешностью равной половине длины интервала (интервал неопределенности корня). Приближенное значение корня при этом выбирается в центре данного интервала. Нередко отделение корней удаётся провести, не обращаясь к математическим методам и алгоритмам, на основании физического смысла задачи или из анализа её упрощённой модели. На втором этапе проводят уточнение отделённых корней, т.е. находят корни с заданной точностью, для этого известен богатый набор алгоритмов, например, метод дихотомии рассмотренный ниже.

Вывод:

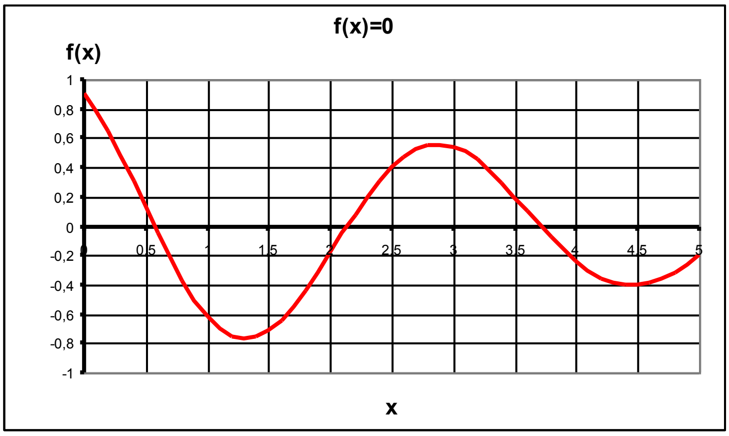
Процесс решения нелинейных уравнений разбивается на два этапа:
1. Отделение корней
2. Уточнение корней

Тема 3.2 Отделение и уточнение корней нелинейного уравнения.

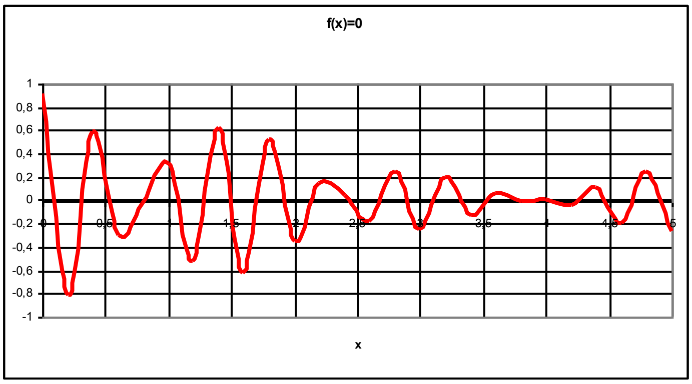
Отделить корни – задать такие отрезки, на которых корень существует и он единственный. Основная проблема задачи отделения – возможность наличия нескольких (в принципе бесконечного количества) корней.

Рассмотрим два наиболее употребительных на практике метода отделения корней:

А) Графический метод.

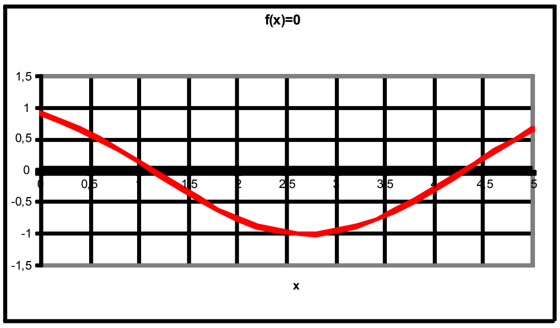


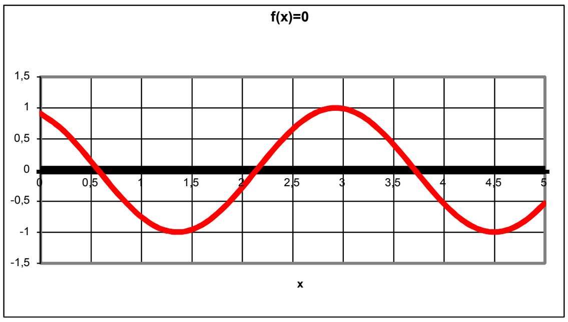
Суть метода заключается в построении графика функции f(x) для нелинейного уравнения вида ***f(x)=0***. На графике выделяются отрезки, на которых есть один единственный корень (точка пересечения функцией оси X). При необходимости выяснить поведение функции строится график части отрезка в увеличенном масштабе.



Б) **Приближенный аналитический метод.**

Аналитический метод основан на теореме математического анализа – если непрерывная функция меняет знак на концах отрезка [a,b] (т.е. ***f(a)*f(b) < 0***), то на этом отрезке обязательно существует корень уравнения ***f(x)=0.*** Используя теорему можно построить простой метод отделения корней на конечном отрезке– разделить весь отрезок на большое число маленьких отрезков и проанализировав произведение функции на концах отрезков $f(a_i)*f(b_i)$ выделить отрезки, где это произведение отрицательно или равно нулю (корень в конце отрезка). К сожалению, существуют возможности поведения функции ***f(x)***, которые приведут в этом алгоритме к потере корней:





В приведенных примерах:

- В первом случае функция не меняет знак, но корни есть – их четное количество 2,4,6 ….
- Во втором случае функция меняет знак, но корней 3 а не один. Возможны так же варианты 5, 7, 9 и другого нечетного количества корней.

В принципе математика не дает общего метода отделения корней для любого нелинейного уравнения, хотя существует частные методы отделения корней некоторых классов функций ***f(x)*** – тригонометрические, полиномы. Однако для практического использования можно сформулировать не абсолютно точный, но достаточно эффективный метод, основанный на простейшем алгоритме.

Приведем такой примерный алгоритм отделения корней аналитически:

1. Задается отрезок [a,b], на котором необходимо отделить корни функции f(x).
2. Задается начальное значение n и строится сетка $x_i = a + ih$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $i = 0,1,2,...n$.

   Сетка делит отрезок на n частей с помощью n+1 точки.
3. Вычисляется значение функции $f(x_i)=f_i$ и вычисляется произведение значений функции на концах отрезка $f_i \cdot f_{i+1}$, i = 0,1,2,…n+1.
4. Подсчитываем количество отрицательных произведений и запоминаем отрезки, где произведение отрицательно или равно 0. Число таких отрезков k. Каждый из таких отрезков должен содержать хотя бы 1 корень.
5. Увеличиваем n в два раза и повторяем процедуру. Получаем новое количество отрезков (корней) k_1.
6. Если $\begin{cases} k < k_1 \Rightarrow k = k_1 \text{ и повторяем п.5} \\ k = k_1 \Rightarrow \text{выход} \end{cases}$

Данный алгоритм теоретически может пропустить корень, но практика показала его эффективность и достаточную точность.

Уточнение корней

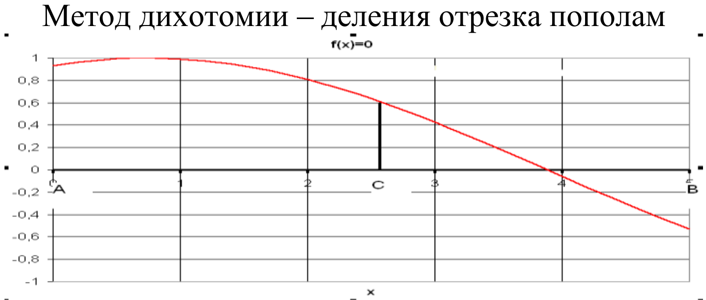
Методы уточнения корней делятся на конечные и итерационные. Конечные методы основаны на идее уменьшения интервала неопределенности на каждом шаге с помощью какого-либо процесса.

Суть итерационного метода в построении итерационной формулы и вычисления итерационной последовательности такой, чтобы эта последовательность сходилась к заданному корню.

Конечный метод построен таким образом, что можно заранее оценить количество итераций, которое потребуется для уточнения корня с заданной погрешностью. Для итерационного метода это не возможно. К конечным методам можно отнести метод «дихотомии» (деления отрезка пополам) и конечный вариант метода хорд.

Тема 3.3 Конечные методы уточнения корней нелинейного уравнения

Метод дихотомии – деления отрезка пополам



<u>Суть метода:</u> Пусть задан отрезок [a,b] на котором отделен корень уравнения ***f(x)=0.*** Если разделить этот отрезок пополам точкой **C**, то можно проверить знак произведения ***F(a)*F(c)*** и выбрать ту часть отрезка, где это произведение отрицательно и находится корень. Таким образом, отрезок неопределенности корня уменьшится в 2 раза. Это 1 итерация метода. За n итераций отрезок уменьшится в 2^n раз. Если необходимо получить результат с абсолютной погрешностью ε, то можно оценить количество итераций n

$$(b-a)/2^n < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (b-a)/\varepsilon < 2^n \quad \Rightarrow \quad n > \ln((b-a)/\varepsilon) / \ln(2)$$

Алгоритм метода дихотомии:

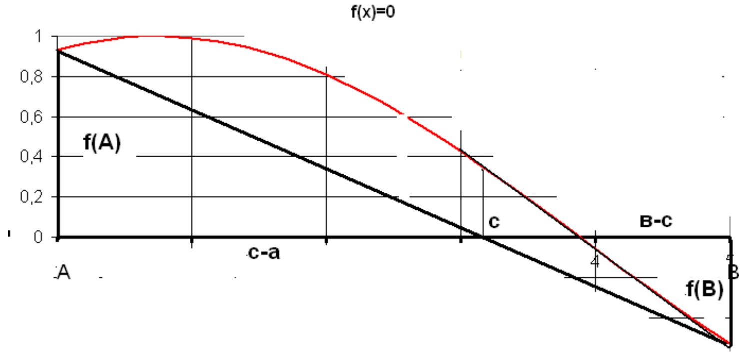
1. Задаем уравнение F(x)=0, отрезок для корня [a,b], погрешность ε.
2. Ищем c=(a+b)/2 и значение произведения F(a)*F(c).
3. Если F(a)*F(c)<0 => a=a; b=c, при F(a)*F(c)>0 => a=c; b=b, при F(c)=0 a=b=c.
4. Находим оценку погрешности d=|b-c|. Если d>ε то возвращаемся в п.2, в противном случае найден корень $X_к$ = c при заданной погрешности.

Метод хорд

Суть метода: Если в методе дихотомии выбор точки С изменить на точку пересечения хорды с осью x, то мы получим новый более быстрый конечный метод. Найдем значение точки С – пересечения хорды с осью x. Из правила подобия треугольников получаем 2 формулы вычисления:

$$C = A - \frac{f(A)*(b-a)}{f(B)-f(A)} \quad \text{или} \quad C = B - \frac{f(B)*(b-a)}{f(B)-f(A)}$$

Обе эти формулы должны давать один и тот же результат, но с точки зрения реализации итераций метода они отличаются кардинально.



Проблемой такого метода является тот факт, что как правило работает только одна из формул. Это значит, что один из концов отрезка всегда остается неподвижным. Можно легко определить какой именно – например на вышележащем рисунке хорда отделяет корень на отрезке [С,В], следовательно новая хорда вновь будет отсекать точку С слева от корня, хотя и гораздо ближе к нему. Таким образом, если мы будем оценивать отрезок неопределенности как [С,В], то это будет явно неправильно – длина этого отрезка не будет стремиться к нулю, хотя как видно из рисунка точка С к корню быстро приближается. Это приводит к 2 характерным особенностям конечного метода хорд:

- На первой итерации необходимо выбрать неподвижный конец отрезка и соответствующую формулу. Далее вычисления ведутся только по этой формуле, а проверять условие ***F(a)*F(c)<0*** нет необходимости.
- Так как один конец отрезка не меняется, то точка С образует быстро сходящуюся последовательность значений C_1, C_2, C_3, C_4,…. Для оценки погрешности здесь используют косвенную оценку (как правило используемую в итерационных методах) $\mathbf{d \approx |C_{k+1} - C_k|}$.

Сравнительная характеристика конечных методов

Конечные методы можно сравнивать по нескольким важным характеристикам:

1. Количеству итераций.
2. Сложности алгоритма.
3. Удобства реализации.

С точки зрения 1-го критерия метод дихотомии уступает методу хорд, который сходится быстрее. По другим характеристикам метод дихотомии существенно лучше. Его алгоритм прост, надежен и легко реализуем. Первый критерий становится важен только в задачах критичных по времени вычисления корня. В некоторых задачах корни вычисляются многократно (тысячи или десятки тысяч раз), тогда метод хорд имеет некоторые конкурентные преимущества.

Тема 3.4 Итерационные методы уточнения корней.

Итерационные вычисления производятся по итерационным формулам, которые бывают двух видов:

- явная формула ***x=f(x)***

- неявная формула ***F(x)=0***.

Неявные формулы могут быть преобразованы к явному виду: ***x=C*F(x)+x***, где C-константа, которая выбирается из условия сходимости метода. Явная формула может быть представлена в виде рекуррентной формулы, когда элемент x_k последовательности выражается в виде $x_k = F(x_{k-1}, x_{k-2} \ldots)$. Результатом вычисления по такой формуле является итерационная последовательность x_k. Пределом последовательности является решение нашего уравнения.

Алгоритм вычисления по итерационной формуле:

1. Определение начального приближения из условия сходимости.
2. Организация вычисления последовательности по правилу: $x_1 = f(x_0) \Rightarrow x_2 = f(x_1) \Rightarrow \ldots x_n = f(x_{n-1})$
3. Прерывание вычислений производится при достижении косвенной оценки заданной погрешности ε

$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$

Метод простой итерации

В данном методе формула выражается в явном виде $x=\varphi(x)$. Условие сходимости для этого метода определяется с помощью теоремы о сжимающем отображении (если отображение $\varphi(x)$ удовлетворяет условию сжимаемости, то итерационная последовательность будет сходящейся). В одномерном случае будет простая формула для начального приближения x_0: $|\varphi'(x_0)| < 1$. В простейшем случае $\varphi(x) = F(x)/n + x$ или $\varphi(x) = -F(x)/n + x$, ***n*** – положительно число. Если $|F'(x)|>1$, *то* $n>1$, *е*сли $|F'(x)|<1$, *то* $n \le 1$. Выбирая n можно практически всегда удовлетворить условие сходимости.

Таким образом, производная первой итерационной формулы **x=y/x** в близи корня близка к единице и метод не сходится. Если формулу преобразовать к виду **x=(x+y/x)/2**, то производная будет уже близка к нулю и метод будет не только сходится, но и сходится максимально быстро. Чем ближе производная к нулю, тем быстрее сходимость. Это свидетельствует о необходимости правильного выбора итерационной формулы и некоторого начального исследования области вокруг предполагаемого корня нелинейного уравнения. Теперь можно сформулировать итоговый порядок метода простой итерации:

1. Задается отрезок отделения корня и нелинейное уравнение.
2. Строится итерационная формула.
3. Исследуется сходимость построенной итерационной формулы на заданном отрезке. При необходимости формула корректируется. Для упрощения часто проверяется условие сходимости на концах отрезка, если там все в порядке, то считается, что на всем отрезке условие сходимости тоже выполняется.
4. Для выбранной формулы выбирается подходящее начальное приближение x_0. Для упрощения часто выбирается середина отрезка.
5. Производится вычисление итерационной последовательности до тех пор пока не будет выполнено условие выхода, которое определяется как $d<\varepsilon$, *где* $d = |x_{k+1} - x_k|$.Тогда x_{k+1} - искомый корень нелинейного уравнения.

Данный алгоритм применим к любому итерационному методу, отличаются только итерационные формулы и условие сходимости. Более того, можно доказать что рассматриваемые далее итерационные методы – частные случаи метода простой итерации со специально выбранными итерационными формулами.

Итерационный метод хорд

Из формулы метода хорд $C = B - \dfrac{f(B)*(b-a)}{f(B)-f(A)}$ можно построить итерационную формулу $X_{k+1} = X_k - \dfrac{f(X_k)*(X_k - X_{k-1})}{f(X_k)-f(X_{k-1})}$

Это частный случай метода простой итерации, поэтому условие сходимости можно определить как в этом методе, но лучше использовать условие сходимости метода Ньютона, поскольку метод хорд (в пределе) сходится к методу Ньютона. Главная особенность метода хорд – необходимость 2-х начальных условий для расчета по итерационной формуле, что явно не удобно для расчета на ЭВМ.

Метод Ньютона – Чебышева

Русский математик Чебышев предложил обобщить итерационные методы решения нелинейного уравнения путем вывода наилучших последовательных приближений.

Пусть задано нелинейное уравнение: $f(x) = 0$ и существует корень этого уравнения, который обозначим как x_k. Разложение в ряд Тейлора в точке корня имеет вид:

$$f(x_k) = 0 = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x_k - x) + \ldots$$

В первом приближении разложения в ряд получается метод Ньютона. Для более точных оценок Чебышев предложил раскладывать в ряд не функцию f, а обратную к ней функцию $x = C(f)$. Тогда такое разложение имеет вид:

$$x_k = x + \frac{C'}{1!}\left(f(x_k) - f(x)\right) + \frac{C''}{2!}\left(f(x_k) - f(x)\right)^2 + \ldots$$

Использование данной формулы, дает принципиальную возможность вычислить любое, сколь угодно точное приближение к корню.

Рассмотрим пример вычисления первого приближения*:*

$$x_k = x + \frac{dC}{df}(-f(x)) \quad => \quad \frac{dC}{df} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \quad x_k = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

В терминах рекурсивных формул имеем: $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \dfrac{f(x^{k-1})}{f'(x^{(k-1)})}$

Таким образом, в первом приближении метод Чебышева так же дает формулу метода Ньютона.

Рассмотрим пример вычисления второго приближения*:*

$$x_k = x - \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{C''}{2!} f^2(x)$$

$$C'' = \frac{d}{df}(C') = \frac{d}{df}\left(\frac{1}{f'}\right) = -\frac{1}{(f')^2}\cdot\frac{df'}{df} = -\frac{1}{(f')^2}\cdot\frac{df'}{dx} => C'' = -\frac{f''}{(f')^3}$$

$$\frac{dx}{df} = -\frac{1}{(f')^2} f''\cdot C' = -\frac{1}{(f')^3}\cdot f''$$

$$x_k = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x) f^2(x)}{2(f'(x))^3} \quad => \quad x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} - \frac{f''(x^{(k-1)}) f^2(x^{(k-1)})}{2\cdot(f'(x^{(k-1)}))^3}$$

Второе же приближение можно уже назвать формулой Чебышева.

Рассмотрим теперь условия сходимости для этих приближений. Условия сходимости для метода Ньютона можно получить, если считать его частным случаем метода простой итерации. Получаем формулу:

$$\text{При } \varphi(x)=f/f' => \left| \frac{f''\cdot f}{(f')^2} \right| \le 1$$

Так как метод Ньютона – это 1-е приближение формулы Чебышева, то формула сходимости останется справедливой и для последующих, более точных приближений (обратное неверно – если метод Ньютона не сходится, то следующее приближение может в этой точке сходиться). Таким образом, на практике можно сходимость метода Чебышева оценивать по формуле для метода Ньютона.

Комбинированный метод

Для реализации итерационных методов в ЭВМ некоторые из представленных итерационных методов модернизировали. Так, например, существует метод Ньютона с постоянной производной. В формуле Ньютона самое сложное для реализации на ЭВМ – вычислить производную. Ее приходится считать на каждой итерации. С другой стороны в близи корня (при малых изменениях x) производная меняется слабо. Это дало основание упростить алгоритм – производная вычисляется в начальной точке, а дальше считается неизменной. Алгоритм сходится медленнее, но вычисления на ЭВМ в результате часто даже ускоряются. Формула для этого метода $x_k = x - \dfrac{f(x)}{f'(x_0)}$.

Другая модификация метода Ньютона заключается в установленном математиками факте отделения корня результатами вычисления по формулам Ньютона и хорд. Это значит, что если начальное приближение в обеих формулах одинаковое, то результат вычисления дает отрезок (между $x_к$ для Ньютона и хорд) на котором точно есть корень. Середина этого отрезка уточняет корень лучше чем оба используемых методов, кроме того метод получает дополнительную сходимость. Описанная процедура уточнения корня с помощью двух методов сразу получила название комбинированного метода. Он отличается исключительной скоростью уточнения.

Раздел 4. Интерполирование функций.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Тема 4.1 Интерполяционный полином Лагранжа.

Строится интерполяционный многочлен по системе функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n} = \{x^i\}_{i=0}^{n}$. Степень полинома при этом должна быть не более $n = 10$.

Для любого набора узлов $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a;b] = [0;1], x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и для любого набора значений $f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ существует и притом является единственным полином Лагранжа, имеющий вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

При этом для любой функции $f \in C_{[a;b]}^{(n+1)}$ и для любой точки $\bar{x} \in [a;b]$ справедлива оценка

$$|f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (\bar{x} - x_k) \right|,$$

где

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Отсюда следует, что величина $|f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})|$ будет минимизирована на всём отрезке тогда, когда будет минимизирована величина $|\prod_{k=0}^{n} (\bar{x} - x_k)|$.

Среди всех полиномов $(n+1)$-й степени наименее отклоняющимся от нуля является полином Чебышева, задаваемый на отрезке $[-1;1]$ следующим образом:

$$T_{n+1}(t) = \cos((n+1)\arccos t), n = 0, 1, \dots$$

На произвольном отрезке полином Чебышева задаётся как сложная функция при помощи

$$x = \frac{1}{2}[(b+a) - (b-a)t], t \in [-1, 1]$$

Корнями полинома Чебышева являются числа

$$x_i^0 = \frac{1}{2}\left[(b+a) - (b-a)\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right], i = 0, \dots, n$$

Если брать их в качестве узлов интерполяции, то получим, что величина $|\prod_{k=0}^{n} (\bar{x} - x_k)|$ станет минимальной, а, следовательно, минимальным станет и отклонение $L_n(x)$ от $f(x)$.

Тема 4.2 Интерполяционный полином Ньютона.

Рассматриваем попарно различные узлы $\{x_i\}_{i=0}^{10} \subset [0;1]$.

Опр. Разделённой разностью первого порядка $f(x_i;\ x_{i+1}) = f_{i,i+1}$ называется отношение

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Опр. Разделённой разностью второго порядка $f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2}) = f_{i,i+1,i+2}$ называется отношение

$$\frac{f(x_{i+1};\ x_{i+2}) - f(x_i;\ x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

Опр. Разделённой разностью $(k+1)$-го порядка $f(x_i; \dots ; x_{i+k+1}) = f_{i,\dots,i+k+1}$ называется отношение, которое можно вычислить, имея разделённые разности k-го порядка:

$$\frac{f(x_{i+1}; \dots ; x_{i+k+1}) - f(x_i; \dots ; x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}$$

Разделённая разность k-го порядка $f(x_i; \dots ; x_{i+k})$ задаётся через значения x_j следующим равенством:

$$f(x_i; \dots ; x_{i+k}) = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{l=i \\ l \neq j}}^{i+k} (x_j - x_l)}$$

Для любого набора узлов $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a;b] = [0;1], x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и для любого набора значений $f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ существует и притом является единственным интерполяционный полином Лагранжа. Его можем записать в форме Ньютона:

$$N_n^+(x) = f_0 + f_{01}(x - x_0) + \dots + f_{0,\dots,n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} f_{0,\dots,k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

- интерполяционный полином Ньютона вперёд.

$$N_n^-(x) = f_n + f_{n,n-1}(x - x_n) + \dots + f_{n,\dots,0}(x - x_n) \dots (x - x_1) = f_n + \sum_{k=1}^{n} f_{n,\dots,n-k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_{n-i})$$

- интерполяционный полином Ньютона назад.

Такая форма имеет свое преимущество, которое состоит в том, что если имеется полином Ньютона, построенный по системе узлов из s точек, то, добавляя ещё один узел к этой системе, мы не сталкиваемся с необходимостью заново находить интерполяционный полином – нужно добавить лишь одно слагаемое.

Раздел 5. Численное дифференцирование.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Тема 5.1 Использование интерполяционных многочленов Лагранжа для формул численного дифференцирования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и в точках $\{x_i\}$ $(i = 0, 1, 2, \dots n)$ этого отрезка принимает значения $y_i = f(x_i)$.

Разность между соседними значениями аргумента x_i постоянна и является шагом $h = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \dots n)$ разбиения отрезка на n частей, причем $a = x_0$ и $b = x_n$.

Найдем аппроксимации производных первого и второго порядков с помощью значений функций y_i в узловых точках x_i с погрешностью одного и того же порядка в зависимости от шага h, причем этот порядок не ниже, чем достигаемый при конечно-разностной аппроксимации производных для того же шага.

Для того чтобы выразить значения производных через значения функции y_i в узлах интерполяции x_i, построим интерполяционный многочлен Лагранжа $L_m(x)$ степени m, удовлетворяющий условиям

$$L_m(x_k) = f(x_k) = y_k \qquad (k = i, i+1, \ldots, i+m), \quad i+m \le n.$$

Многочлен $L_m(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+m}]$. Дифференцируя многочлен $L_m(x)$, получаем значения производных в точках $\{x_k\}$ $(k = i, i+1, \ldots, i+m)$.

Если m=1, то $L_1(x)$ – линейная функция, график которой проходит через точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}). Тогда

$$L_1(x) = -y_i \frac{x - x_{i+1}}{h} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{h},$$

$$y_i' = f'(x_i) \approx L_1'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \qquad y_{i+1}' = f'(x_{i+1}) \approx L_1'(x).$$

Если m=2, то график интерполяционного многочлена Лагранжа $L_2(x)$ – парабола, проходящая через три точки (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) и (x_{i+2}, y_{i+2}). Вычислим первую и вторую производные многочлена $L_2(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+2}]$:

$$L_2(x) = \frac{1}{2h^2}[y_i(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) - 2y_{i+1}(x - x_i)(x - x_{i+2}) + y_{i+2}(x - x_i)(x - x_{i+1})],$$

$$L_2'(x) = \frac{1}{2h^2}[y_i(2x - x_{i+1} - x_{i+2}) - 2y_{i+1}(2x - x_i - x_{i+2}) + y_{i+2}(2x - x_i - x_{i+1})],$$

$$L_2''(x) = \frac{1}{h^2}(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}).$$

Первая и вторая производные многочлена Лагранжа $L_2(x)$ в точках x_i, x_{i+1}, x_{i+2} являются приближениями соответствующих производных функции $f(x)$ в этих точках:

$$\left.\begin{aligned} y_i' &= f'(x_i) \approx L_2'(x_i) = \frac{1}{2h}(-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}), \\ y_{i+1}' &= f'(x_{i+1}) \approx L_2'(x_{i+1}) = \frac{1}{2h}(-y_i + y_{i+2}), \\ y_{i+2}' &= f'(x_{i+2}) \approx L_2'(x_{i+2}) = \frac{1}{2h}(y_i - 4y_{i+1} + 3y_{i+2}), \end{aligned}\right\}$$

$$y_i'' = y_{i+1}'' = y_{i+2}'' \approx L_2''(x) = \frac{1}{h^2}(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}).$$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+2}]$ имеет непрерывную производную до третьего порядка включительно, то справедливо представление функции в виде суммы:

$$f(x) = L_2(x) + R_2(x),$$

где $R_2(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы, причем

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}), \quad \xi \in (x_i, x_{i+2}).$$

В этом случае можно дать оценку погрешности приближений производных соотношениями. Дифференцируя, получим

$$f'(x) = L_2'(x) + R_2'(x),$$

$$f''(x) = L_2''(x) + R_2''(x).$$

Здесь

$$R_2'(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}[(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) + (x - x_i)(x - x_{i+2}) + (x - x_i)(x - x_{i+1})],$$

$\xi \in (x_i, x_{i+2})$,

$$R_2''(x) = \frac{f'''(\xi)}{3}[(x - x_i) + (x - x_{i+1}) + (x - x_{i+2})], \quad \xi \in (x_i, x_{i+2}).$$

Погрешности при вычислении производных в точках x_i, x_{i+1}, x_{i+2} определяются из формул следующими значениями остатков:

$$R_2'(x_i) = -2R_2'(x_{i+1}) = R_2'(x_{i+2}) = \frac{1}{3}h^2 f'''(\xi),$$

$$R_2''(x_i) = -hf'''(\xi), \quad R_2''(x_{i+1}) = 0, \qquad R_2''(x_{i+2}) = hf'''(\xi).$$

Таким образом, равенства показывают, что погрешности аппроксимации первой производной $f'(x)$ с помощью формул имеют один и тот же порядок $O(h^2)$, и естественна следующая рекомендация по их применению на отрезке $[a,b]$ в точках $\{x_i\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ при $n \geq 2$:

$$y_0' \approx \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2),$$

$$y_i' \approx \frac{1}{2h}(-y_{i-1} + y_{i+1}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$y_n' \approx \frac{1}{2h}(y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n).$$

Из равенства следует, что приближение второй производной с помощью формулы имеет различный порядок в зависимости от h в разных точках: в точках x_i, x_{i+2} имеется погрешность порядка h, а в точке x_{i+1} порядок погрешности выше $(R_2''(x_{i+1}) = 0)$.

В случае интерполяции функции $f(x)$, имеющей на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную до четвертого порядка включительно, можно получить погрешность интерполяции второй производной, имеющую порядок h^2 и одинаковую во всех точках, с помощью многочлена Лагранжа третьей степени $L_3(x)$ по четырем узлам интерполяции x_k $(k = i, i+1, i+2, i+3)$. Опуская выкладки, приведем результаты для аппроксимации второй производной:

$$y_i'' = \frac{1}{h^2}(2y_i - 5y_{i+1} + 4y_{i+2} - y_{i+3}) + O(h^2),$$

$$y_{i+1}'' = \frac{1}{h^2}(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}) + O(h^2),$$

$$y_{i+2}'' = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_{i+2} + y_{i+3}) + O(h^2),$$

$$y_{i+3}'' = \frac{1}{h^2}(-y_i + 4y_{i+1} - 5y_{i+2} + 2y_{i+3}) + O(h^2).$$

Формулы дают порядок аппроксимации $O(h^2)$ для производных первого порядка функции $f(x)$, непрерывно-дифференцируемой до четвертого порядка включительно на отрезке [*a*,*b*]. Этот порядок сохраняется при вычислении производной второго порядка на отрезке [*a*,*b*] в точках x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ при $n \geq 3$ по формулам

$$y_0'' \approx \frac{1}{2h}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3),$$

$$y_i'' \approx \frac{1}{2h}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$y_n'' \approx \frac{1}{2h}(-y_{n-3} + 4y_{n-2} - 5y_{n-1} + 2y_n).$$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+m}]$ имеет непрерывную производную до (*m*+1)-го порядка включительно, то справедливо представление

$$f(x) = L_m(x) + R_m(x),$$

где $L_m(x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа степени *m*, аппроксимирующий функцию $f(x)$ по узлам интерполяции $\{x_k\}$ $(k = i, i+1, \ldots, i+m)$; $R_m(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы, причем

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_i)(x - x_{i+1})\ldots(x - x_{i+m}), \quad \xi \in (x_i, x_{i+m}).$$

Тема 5.2. **Метод неопределенных коэффициентов**.

Суть метода неопределенных коэффициентов заключается в следующем. Выражение для производной k-го порядка в некоторой точке $x = x_*$ ищется в виде линейной комбинации заданных значений функции в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$f^{(k)}(x_*) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + R(f),$$

где $R(f)$ – остаточный член, зависящий от функции. Коэффициенты c_i подбираются из условия $R(f) = 0$, когда $f = 1, x, x^2, \ldots, x^n$. В результате для нахождения c_i получаем систему n+1 линейных алгебраических уравнений:

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_n = 0,$$
$$c_0 x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_0 x_0^{k-1} + c_1 x_1^{k-1} + \ldots + c_n x_n^{k-1} = 0,$$
$$c_0 x_0^{k} + c_1 x_1^{k} + \ldots + c_n x_n^{k} = k!,$$
$$c_0 x_0^{k+1} + c_1 x_1^{k+1} + \ldots + c_n x_n^{k+1} = (k+1)!x_*,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_0 x_0^{n} + c_1 x_1^{n} + \ldots + c_n x_n^{n} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x_*^{n-k}.$$

Эта система однозначно разрешима, так как ее определитель есть определитель Вандермонда, при этом для получения ненулевого решения необходимо и достаточно выполнения неравенства $n \geq k$.

Раздел 6. Численное интегрирование.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Тема 6.1 Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами.

Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами будем применять для вычисления интеграла

$$\int_a^b f\ \ x\ \ dx$$

с постоянной весовой функцией и конечным отрезком интегрирования. Для этого случая интерполяционная квадратурная формула может быть записана в виде

$$\int_a^b f\ \ x\ \ dx \approx\ \ b-a\ \ \sum_{k=0}^{n} B_k^n f\ \ a+kh$$

где коэффициенты

$$B_k^n = \frac{-1^{\ n-k}}{nk!\ \ n-k\ \ !}\int t\ \ t-1\ \ldots\ t-k+1\ \ \ t-k-1\ \ldots\ t-n\ \ dt$$

$$h = \ b-a\ /n.$$

Квадратурные формулы называются формулами Ньютона-Котеса. Когда число узлов в формуле большое, она малопригодна для вычислений, т.к. возникает большая погрешность в квадратурной сумме.

Положим n=1. Приближенное равенство преобразуется в известную формулу трапеции:

При n=2 квадратурная формула принимает вид

$$\int_a^b f\ \ x\ \ dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f\ \ a\ \ + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\ \ b\ \ \right]$$

Эту формулу называют квадратурной формулой Симпсона, или формулой парабол.

Точность простейших квадратурных формул Ньютона-Котеса лишь в редких случаях может быть удовлетворительной. Для уменьшения погрешности предварительно разбивают отрезок на достаточно большое число интервалов и к каждому из них применяют простейшую квадратурную формулу.

Так, разбивая отрезок на n равных частей длиной и применяя к частичному отрезку

$$\int_a^b f\ \ x\ \ dx \approx \frac{b-a}{2n}\Big[f\ \ a\ \ + 2f\ \ a+h\ \ +\ \ \ldots\ \ +2f\big[a+\ \ n-1\ \ h\big] + f\ \ b\ \ \Big]$$

Если $f''(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то остаточный член формулы трапеций представлен в виде

Приближенную формулу называют составной формулой Симпсона. Ее остаточный член

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{10n^4} f^{1v}(\xi), \ \xi \in [a, b].$$

Для оценки погрешности имеем неравенство

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4, \ M_4 = \max_{a \le x \le b}\left|f^{1v}(x)\right|$$

Тема 6.2 Квадратурные формулы типа Гаусса.

Если по условиям вычислитель располагает правом набора узлов, и функция $f(x)$ обладает высокой степенью гладкости, то для вычисления интеграла (7.1) часто применяются квадратурные формулы типа Гаусса или, как их еще называют, квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности.

В квадратурных формулах типа Гаусса

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и узлы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подбираются так, чтобы приближенное равенство (7.14) было точным для всех многочленов наивысшей возможной степени N.

Рассмотрим применение некоторых частных квадратур типа Гаусса к вычислению интегралов.

Формула Гаусса. Квадратурная формула Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

имеет своими узлами корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n}.$$

Коэффициенты A_k легко вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{2}{(1-x_k^2)\left(P_n'(x_k)\right)^2}, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Для остатка формулы Гаусса имеет представление

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 f^{(2n)}(\xi), \ \xi \in (-1, 1).$$

При вычислении интеграла $\int_a^b f(t)\,dt$ следует сделать замену переменной интегрирования

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}.$$

Тогда $\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left[\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right]dx$.

Применяя к интегралу в правой части формулу, находим

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) + R_n^*(f),$$

Остаток квадратуры вычисляется следующим образом:

$$R_n^*(f) = \left[\frac{b-a}{2}\right]^{2n+1}\cdot R_n(f).$$

Тема 6.3 Приближенное вычисление несобственных интегралов.

Часто к приближенному решению несобственных интегралов применяют метод выделения особенностей, предложенный Л.В.Канторовичем. Этот метод состоит в том, что на подынтегральной функции $f(x)$ в несобственном интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ выделяют в качестве слагаемого некоторую функцию $g(x)$, имеющую те же особенности, что и $f(x)$, легко интегрируемую и такую, чтобы разность $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ была бы достаточно гладкой функцией.

Укажем правило построения такой функции для достаточно широкого класса интегралов.

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = (x-x_0)^{-\alpha}\Phi(x) \quad (a \le x_0 \le b,\ 0<\alpha<1),$$

где $\Phi(x)$ для $a \le x \le b$ разлагаются в степенной ряд

$$\Phi(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots.$$

Тогда полагаем

$$g(x) = (x-x_0)^{-\alpha}\left[c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n\right],$$

$$\varphi(x) = (x-x_0)^{-\alpha}\left[c_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \ldots\right] = (x-x_0)^{n+(1-\alpha)}\left(c_{n+1} + \ldots\right).$$

Функция $g(x)$ интегрируется непосредственно, а $\varphi(x)$, очевидно, имеет на $[a, b]$ n непрерывных производных.

В некоторых случаях при вычислении несобственных интегралов можно использовать квадратурные формулы с весом (например, квадратурные формулы типа Гаусса). Для этого подынтегральную функцию $f(x)$ представляют в виде произведения $f(x) = p(x)\varphi(x)$, причем $\varphi(x)$ имеет достаточное число производных, а $p(x)$ рассматривают как весовую функцию.

При приближенном вычислении сходящихся несобственных интегралов

$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx,\quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ может оказаться полезным следующий простой прием, основанный на самом определении этих интегралов. Несобственные интегралы $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ и $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ представляют соответственно в виде $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{A} f(x)\,dx + \int_{A}^{\infty} f(x)\,dx$,

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \int_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx + \int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)\,dx,$$

причем А выбирают настолько большим, а $\delta_1,\ \delta_2$ – столь малыми, чтобы в пределах заданной точности интегралы $\int_{A}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)\,dx$ не влияли бы на результаты. Интегралы $\int_{a}^{A} f(x)\,dx$, $\int_{a}^{c-\delta_1} f(x)\,dx$, $\int_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx$ вычисляют уже изученными методами.

4.3. Лабораторные работы

Учебным планом не предусмотрено.

4.4. Практические занятия

№ п/п	*Номер раздела дисциплины*	*Наименование тем практических занятий*	*Объем (час.)*	*Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)*
1	**2.**	Конечные и итерационные методы решения систем линейных уравнений.	8	разбор конкретных ситуаций (2 часа)
2	**3.**	Конечные и итерационные методы уточнения корней нелинейных уравнений.	8	разбор конкретных ситуаций (2 часа)
3	**4.**	Интерполяционный полином.	7	разбор конкретных ситуаций (1 час)
4	**5.**	Численное дифференцирование.	7	разбор конкретных ситуаций (1,5 часа)
5	**6.**	Численное интегрирование.	6	разбор конкретных ситуаций (1 час)
		ИТОГО	**36**	**8**

4.5. Контрольные мероприятия: контрольная работа

2015-2017 год набора

Цель: Приобрести навыки решения численных методов нелинейных уравнений.

Структура: Каждое индивидуальное задание предполагает выполнение студентом следующих разделов:

1. Постановка задачи и общие сведения о нелинейных уравнениях.
2. Основные численные методы решения нелинейных уравнений.
3. Метод половинного деления.
4. Метод простых итераций.
5. Метод Ньютона (метод касательных).
6. Модифицированный метод Ньютона (метод секущих).
7. Метод хорд.

Основная тематика: «Численные методы решения нелинейных уравнений».

Рекомендуемый объем: Пояснительная записка объемом 10-15 страниц должна содержать титульный лист, задание, описание выполняемых действий по каждому разделу, полученные результаты и список используемой литературы.

Выдача задания и прием кр проводится в соответствие с календарным учебным графиком

Оценка	Критерии оценки контрольной работы
отлично	Во время защиты контрольной работы студент демонстрирует знание основных численных методов нелинейных уравнений, владеет достаточным уровнем понимания материала, и способностью самостоятельно высказать мысль на научно-техническом языке.
хорошо	Во время защиты контрольной работы студент показал не полное понимание материала и навыков владения практическими приемами.
удовлетворительно	Во время защиты контрольной работы студент показал слабое понимание материала и навыков владения практическими приемами.
неудовлетворительно	Во время защиты контрольной работы студент не продемонстрировал теоретических знаний по теме работы, либо не показал ни каких практических навыков.

2018 год набора

Учебным планом не предусмотрено

5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Компетенции / ***№, наименование разделов дисциплины***	***Кол-во часов***	***Компетенции ПК***	***Σ комп.***	t_{cp}***, час***	***Вид учебных занятий***	***Оценка результатов***
		17				
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1. Основы теории погрешностей.	10	+	1	10	Лк, СРС	экзамен
2. Численные методы решения систем линейных уравнений.	20	+	1	20	Лк, ПЗ, СРС	экзамен
3. Численные методы решения нелинейных уравнений.	21	+	1	21	Лк, ПЗ, СРС	экзамен, кр
4. Интерполирование функций.	20	+	1	20	Лк, ПЗ, СРС	экзамен
5. Численное дифференцирование.	19	+	1	19	Лк, ПЗ, СРС	экзамен
6. Численное интегрирование.	18	+	1	18	Лк, ПЗ, СРС	экзамен
всего часов	**108**	**108**	**1**	**108**		

6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Численные методы: учеб. пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. - 4-е изд., стереотип. - Москва: Академия, 2008. - 384 с. (стр. 122-268).

7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№	***Наименование издания***	***Вид заня-тия***	***Количество экземпляров в библиотеке, шт.***	***Обеспечен-ность, (экз./ чел.)***
1	**2**	**3**	**4**	**5**
	Основная литература			
1.	Численные методы: учеб. пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. - 4-е изд., стереотип. - Москва: Академия, 2008. - 384 с.	Лк, ПЗ, кр	10	1
2.	Измаилов, А.Ф. Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, В.М. Солодков. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2008. - 320 с. - ISBN 978-5-9221-0975-8 ; То же [Электронный ресурс]. URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69317 .	Лк, ПЗ, кр	ЭР	1
	Дополнительная литература			
3.	Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стереотип. - Москва: Высшая школа, 2008. - 480 с.	ПЗ, кр	20	1
4.	Турчак, Л. И. Основы численных методов: учебное пособие для вузов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Физматлит, 2003. - 300 с.	Лк, ПЗ, кр	20	1

8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО - ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.Электронный каталог библиотеки БрГУ http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r_15/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=.

2. Электронная библиотека БрГУ
http://ecat.brstu.ru/catalog .

3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru .

4. Электронно-библиотечная система «Издательство «Лань»
http://e.lanbook.com .

5. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" http://window.edu.ru .

6. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU http://elibrary.ru .

7. Университетская информационная система РОССИЯ (УИС РОССИЯ) https://uisrussia.msu.ru/ .

8. Национальная электронная библиотека НЭБ
http://xn--90ax2c.xn--p1ai/how-to-search /.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению практических работ

Практическое занятие №1
Конечные и итерационные методы решения систем линейных уравнений.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Цель занятия: приобрести навыки решения систем линейных уравнений конечными и итерационными методами.

Задание:
1. По заданному варианту составить систему линейных уравнений.
2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента.
3. Вычислить погрешность найденного решения.
4. Преобразовав систему линейных уравнений к виду, удобному для итераций, решить ее методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Порядок выполнения:
соответствует пунктам 1 – 4 задания.

Форма отчетности:
отчёт сдаётся в печатном виде. В отчёте должны присутствовать:
1. Номер варианта индивидуального задания;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Поэтапное выполнения всех заданий варианта индивидуального задания;
5. Заключение.

Задания для самостоятельной работы:
Предусмотрены индивидуальным заданием обучающегося.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным во втором разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Численные методы: учеб. пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. - 4-е изд., стереотип. - Москва: Академия, 2008. - 384 с.
2. Измаилов, А.Ф. Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, В.М. Солодков. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2008. - 320 с. - ISBN 978-5-9221-0975-8 ; То же [Электронный ресурс]. URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69317 .

Дополнительная литература

1. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стереотип. - Москва: Высшая школа, 2008. - 480 с.
2. Турчак, Л. И. Основы численных методов: учебное пособие для вузов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Физматлит, 2003. - 300 с.

Контрольные вопросы для самопроверки
1. Дать краткое описание решения систем линейных уравнений конечными методами.
2. Дать краткое описание решения систем линейных уравнений итерационными методами.

Практическое занятие №2
Конечные и итерационные методы уточнения корней нелинейных уравнений.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Цель занятия: приобрести навыки отделения и уточнения корней нелинейных уравнений конечными и итерационными методами.

Задание:
1. Выполните отделение корней с использованием графических оценок и выберите начальное приближения для корней.
2. Выполните решение системы уравнений методом Ньютона с точностью 0.000001.
3. Найдите решение системы с той же точностью простыми итерациями.
4. Сравните способы решения (точность, количество итераций).

Порядок выполнения:
Соответствует пунктам 1 – 4 задания.

Форма отчетности:
Отчёт сдаётся в печатном виде. В отчёте должны присутствовать:
1. Номер варианта индивидуального задания;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Поэтапное выполнения всех заданий варианта индивидуального задания;
5. Заключение.

Задания для самостоятельной работы:
Предусмотрены индивидуальным заданием обучающегося.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в третьем разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Численные методы: учеб. пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. - 4-е изд., стереотип. - Москва: Академия, 2008. - 384 с.
2. Измаилов, А.Ф. Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, В.М. Солодков. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2008. - 320 с. - ISBN 978-5-9221-0975-8 ; То же [Электронный ресурс]. URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69317 .

Дополнительная литература

1. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стереотип. - Москва: Высшая школа, 2008. - 480 с.
2. Турчак, Л. И. Основы численных методов: учебное пособие для вузов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Физматлит, 2003. - 300 с.

Контрольные вопросы для самопроверки
1. Дать краткое описание отделения и уточнения корней нелинейных уравнений конечными методами.
2. Дать краткое описание отделения и уточнения корней нелинейных уравнений итерационными методами.

Практическое занятие №3
Интерполяционный полином.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Цель занятия: приобрести навыки интерполирования полиномов.

Задание:
1. Создайте файл, в котором содержатся массивы *X* и *Y=f(x)*.
2. Постройте графическое изображение массива *[X,Y]*.
3. Постройте интерполяционный многочлен Лагранжа *L(x)* и с его помощью найдите значения функции в узлах, соответствующих полушагу таблицы. Постройте график.
4. Подсчитайте погрешность $= \max_i |L(x_i) - f(x_i)|$.

Порядок выполнения:
Соответствует этапам 1 – 4 задания.

Форма отчетности:
Отчёт сдаётся в печатном виде. В отчёте должны присутствовать:
1. Номер варианта индивидуального задания;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Поэтапное выполнения всех заданий варианта индивидуального задания;
5. Заключение.

Задания для самостоятельной работы:
Предусмотрены индивидуальным заданием обучающегося.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в четвертом разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Численные методы: учеб. пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. - 4-е изд., стереотип. - Москва: Академия, 2008. - 384 с.

Измаилов, А.Ф. Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, В.М. Солодков. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2008. - 320 с. - ISBN 978-5-9221-0975-8 ; То же [Электронный ресурс]. URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69317 .

Дополнительная литература

1. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стереотип. - Москва: Высшая школа, 2008. - 480 с.

2. Турчак, Л. И. Основы численных методов: учебное пособие для вузов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Физматлит, 2003. - 300 с.

Контрольные вопросы для самопроверки
1. Дать определение понятию интерполяция.

Практическое занятие №4
Численное дифференцирование.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Цель занятия: приобрести навыки численного дифференцирования.

Задание:
1. Для заданной по варианту функции f(x), заданной в виде таблицы в пяти узлах xi, i = 0,1, 2, 3, 4, найти значения ее 1-ой и 2-ой производных в первых четырех узлах, используя формулы численного дифференцирования.
2. Сравнить результаты с точными значениями производных в этих точках.

Порядок выполнения:
Соответствует этапам 1 – 2 задания.

Форма отчетности:
Отчёт сдаётся в печатном виде. В отчёте должны присутствовать:
1. Номер варианта индивидуального задания;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Поэтапное выполнения всех заданий варианта индивидуального задания;
5. Заключение.

Задания для самостоятельной работы:
Предусмотрены индивидуальным заданием обучающегося.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию.
Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в пятом разделе данной дисциплины.

Основная литература

1. Численные методы: учеб. пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. - 4-е изд., стереотип. - Москва: Академия, 2008. - 384 с.
2. Формалев, В. Ф. Численные методы: учеб. пособие для вузов / В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 400 с.

Дополнительная литература

1. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стереотип. - Москва: Высшая школа, 2008. - 480 с.
2. Турчак, Л. И. Основы численных методов: учебное пособие для вузов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Физматлит, 2003. - 300 с.

Контрольные вопросы для самопроверки
1. Дать краткое описание методов численного дифференцирования.

Практическое занятие №5
Численное интегрирование.

Занятие проводится в интерактивной форме с разбором конкретных ситуаций.

Цель занятия:
Научится решать задачи комбинаторики с помощью сочетания без повторений и с повторениями.

Задание:
1. Вычислить интегралы по формуле трапеций и оценить погрешность.
2. Вычислить интегралы по формуле Симпсона и оценить погрешность.
3. Вычислить интегралы по формулам трапеций и Симпсона с заданной точностью ε, определяя шаг интегрирования h по оценке остаточного члена.

Порядок выполнения:
Соответствует этапам 1 – 3 задания.

Форма отчетности:
Отчёт сдаётся в печатном виде. В отчёте должны присутствовать:
1. Номер варианта индивидуального задания;
2. Цель работы;
3. Задание;

4. Поэтапное выполнения всех заданий варианта индивидуального задания;
5. Заключение.

Задания для самостоятельной работы:
Предусмотрены индивидуальным заданием обучающегося.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию
Ознакомиться с теоретическим материалом, представленным в шестом разделе данной дисциплины.

Основная литература
1. Численные методы: учеб. пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. - 4-е изд., стереотип. - Москва: Академия, 2008. - 384 с.
2. Измаилов, А.Ф. Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, В.М. Солодков. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2008. - 320 с. - ISBN 978-5-9221-0975-8 ; То же [Электронный ресурс]. URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69317 .
Дополнительная литература
1. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стереотип. - Москва: Высшая школа, 2008. - 480 с.
2. Турчак, Л. И. Основы численных методов: учебное пособие для вузов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Физматлит, 2003. - 300 с.

Контрольные вопросы для самопроверки
1. Дать краткое описание методов численного интегрирования.

10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) – преподаватель использует для:

- получения информации при подготовке к занятиям,
- создания презентационного сопровождения лекций;
- интерактивного общения;
- ОС Windows 7 Professional;
- Microsoft Office 2007 Russian Academic OPEN No Level ;
- Антивирусное программное обеспечение KasperskySecurity

11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Вид занятия	***Наименование аудитории***	***Перечень основного оборудования***	***№ Лк, ПЗ***
1	**2**	**3**	**4**
Лк	Лекционная аудитория	-	Лк 1-6
ПЗ	Дисплейные классы	Персональные компьютеры	ПЗ 1-5
кр	Лаборатория моделирования и оптимизации управления	Персональные компьютеры	-
СР	ЧЗЗ	-	-

Приложение 1

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
ПК-17	способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики	**1.** Основы теории погрешностей.	**1.1** Классификация погрешностей. **1.2** Действия с приближенными числами.	Экзаменац. билет
		2. Численные методы решения систем линейных уравнений.	**2.1** Методы решения систем линейных уравнений. **2.2** Конечные методы решения систем линейных уравнений. **2.3** Итерационные методы решения систем линейных уравнений.	Экзаменац. билет
		3. Численные методы решения нелинейных уравнений.	**3.1** Решение нелинейных уравнений. **3.2** Отделение и уточнение корней нелинейного уравнения. **3.3** Конечные методы уточнения корней. **3.4** Итерационные методы уточнения корней.	Экзаменац. билет
		4. Интерполирование функций.	**4.1** Интерполяционный полином Лагранжа. **4.2** Интерполяционный полином Ньютона.	Экзаменац. билет
		5. Численное дифференцирование.	**5.1** Использование интерполяционных многочленов Лагранжа для формул численного дифференцирования. **5.2** Метод неопределенных коэффициентов.	Экзаменац. билет
		6. Численное интегрирование.	**6.1** Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами. **6.2** Квадратурные формулы типа Гаусса. **6.3** Приближенное	Экзаменац. билет

			вычисление несобственных интегралов.	

2. Экзаменационные вопросы.

№ п/п	Компетенции		ЭКЗАМЕННАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ	№ и наименование раздела
	Код	Определение		
1	2	3	4	5
1.	ПК-17	способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики	**1.1** Классификация погрешностей.	**1.** Основы теории погрешностей.
			1.2 Действия с приближенными числами.	
			2.1 Методы решения систем линейных уравнений.	**2.** Численные методы решения систем линейных уравнений.
			2.2 Конечные методы решения систем линейных уравнений.	
			2.3 Итерационные методы решения систем линейных уравнений.	
			3.1 Решение нелинейных уравнений.	**3.** Численные методы решения нелинейных уравнений.
			3.2 Отделение и уточнение корней нелинейного уравнения.	
			3.3 Конечные методы уточнения корней.	
			3.4 Итерационные методы уточнения корней.	
			4.1 Интерполяционный полином Лагранжа.	**4.** Интерполирование функций.
			4.2 Интерполяционный полином Ньютона.	
			5.1 Использование интерполяционных многочленов Лагранжа для формул численного дифференцирования.	**5.** Численное дифференцирование.
			5.2 Метод неопределенных коэффициентов.	
			6.1 Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами.	**6.** Численное интегрирование.
			6.2 Квадратурные формулы типа Гаусса.	
			6.3 Приближенное вычисление несобственных интегралов.	

3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

Показатели	Оценка	Критерии

Знать (ПК-17): - современные теоретические и экспериментальные методы исследования. **Уметь** (ПК-17): - применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования на практике. **Владеть** (ПК-17): - основными методами работы на компьютере с использованием универсальных прикладных программ.	**отлично**	Во время ответа обучающийся демонстрирует глубокое и прочное усвоение программного материала: знает современные теоретические и экспериментальные методы исследования, умеет применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования на практике, владеет основными методами работы на компьютере с использованием универсальных прикладных программ.
	хорошо	Ответ содержит неточности. Дополнительные вопросы требуется, но обучающийся с ними справляется отлично.
	удовлетворительно	Ответил только на один вопрос, либо слабо ответил на оба вопроса. На дополнительные вопросы отвечает неуверенно.
	неудовлетворительно	На оба вопроса обучающийся отвечает неубедительно. На дополнительные вопросы преподавателя также не может ответить.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности

Дисциплина «Численные методы» направлена на изучение основ, анализа теоретических и экспериментальных исследований в сфере профессиональной деятельности.

Изучение дисциплины «Численные методы» предусматривает:

- лекции;
- практические занятия;
- контрольную работу;
- самостоятельную работу обучающихся;
- экзамен.

В ходе освоения раздела 1 «Основы теории погрешностей» обучающиеся должны изучить классификацию погрешностей. Уметь применять действия с приближенными числами.

В ходе освоения раздела 2 «Численные методы решения систем линейных уравнений» обучающиеся должны знать конечные и итерационные методы решения систем линейных уравнений.

В ходе освоения раздела 3 «Численные методы решения систем нелинейных уравнений» обучающиеся должны знать отделение и уточнение корней нелинейного уравнения конечными и итерационными методами.

В ходе освоения 4 раздела «Интерполирование функций» обучающиеся должны изучить интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона.

В ходе освоения 5 раздела «Численное дифференцирование» обучающиеся должны уметь использовать интерполяционные многочлены Лагранжа для формул численного дифференцирования , а также знать метод неопределенных коэффициентов.

В ходе освоения 6 раздела «Численное интегрирование» обучающиеся должны изучить квадратурные формулы с равноотстоящими узлами и типа Гаусса, а также уметь использовать приближенные вычисления несобственных интегралов.

В процессе выполнения практических работ происходит закрепление знаний, формирование умений и навыков дисциплины.

Работа с литературой является важнейшим элементом в получении знаний по дисциплине. Прежде всего, необходимо воспользоваться списком рекомендуемой по данной дисциплине литературой. Дополнительные сведения по изучаемым темам можно найти в периодической печати и Интернете.

К экзамену допускаются студенты, которые выполнили и оформили все практические работы, выполнили и защитили контрольную работу.

Оценка знаний, умений, навыков осуществляется в процессе промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине, которая осуществляется в виде экзамена. Для оценивания знаний, умений, навыков используются ФОС по дисциплине, содержащие, экзаменационные вопросы.

Предусмотрено проведение аудиторных занятий в интерактивной форме в сочетании с внеаудиторной работой.

АННОТАЦИЯ
рабочей программы дисциплины
Численные методы

1. Цель и задачи дисциплины

Целью изучения дисциплины является: формирование у обучающихся знаний по теории численных методов, навыков их применения для решения практических задач с использованием ЭВМ.

Задачей изучения дисциплины является: подготовить обучающихся к самостоятельной работе по освоению основных численных методов решения линейных и нелинейных уравнений и систем, теории интерполирования, численного дифференцирования и интегрирования.

2. Структура дисциплины

2.1 Распределение трудоемкости по отдельным видам учебных занятий, включая самостоятельную работу: ЛК – 18 часов, ПЗ – 36 часов, СР – 54 часа.
Общая трудоемкость дисциплины составляет 144 часа, 4 зачетных единицы.
2.2 Основные разделы дисциплины:

1. Основы теории погрешностей.
2. Численные методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.
3. Численные методы решения систем линейных уравнений.
4. Интерполирование функций.
5. Численное дифференцирование.
6. Численное интегрирование.

3. Планируемые результаты обучения (перечень компетенций)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ПК-17 - способность применять современные теоретические и экспериментальные методы исследования с целью создания новых перспективных средств электросвязи и информатики.

4. Вид промежуточной аттестации: экзамен.

Приложение 3

Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе
на 20___-20___ учебный год

1. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие дополнения:
____
____

2. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие изменения:
____
____
____

Протокол заседания кафедры №____ от «___» __________ 20 ____ г.,
(разработчик)

Заведующий кафедрой ______________________ ______________________
(подпись) *(Ф.И.О.)*

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи от «6» марта 2015 г. №174

для набора 2015 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «13» июля 2015г. № 475

для набора 2016 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «06» июня 2016г. № 429

для набора 2017 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «6» марта 2017г. № 125

для набора 2018года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «12» марта 2018г. № 130

Программу составил (и):

Ульянов А.Д. старший преподаватель кафедры УТС ______________________
Ф.И.О., должность, ученое звание, (степень) *(подпись)*

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры УТС
(сокращенное наименование)

от «28» __декабря___ 2018 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой УТС __________ Игнатьев И.В.
(разработчик) *(подпись)* *(Ф.И.О.)*

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий выпускающей кафедрой _________________ Игнатьев И.В.
(подпись) *(Ф.И.О.)*

Директор библиотеки __________________ Сотник Т.Ф.
(подпись)

Рабочая программа одобрена методической комиссией ЭиА факультета
(сокращенное наименование)

от «28» __декабря_____ 2018 г., протокол № 6

Председатель методической комиссии факультета __________________ Ульянов А.Д.
(подпись) *(Ф.И.О.)*

СОГЛАСОВАНО:

Начальник
учебно-методического управления _______________________ Г.П. Нежевец

Регистрационный №________