

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Кафедра электроэнергетики и электротехники**

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_ Е.И. Луковникова

« \_\_\_\_\_ » декабря 201\_\_ г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**СПЕЦ МАТЕМАТИКА**

Б1.В.ДВ.06.01

**НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ**

**13.03.02 Энергоэнергетика и электротехника**

**ПРОФИЛЬ ПОДГОТОВКИ**

**Электроснабжение**

Программа академического бакалавриата

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

<b>1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ .....</b>	<b>3</b>
<b>2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ .....</b>	<b>3</b>
<b>3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>4</b>
3.1 Распределение объёма дисциплины по формам обучения.....	4
3.2 Распределение объёма дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости .....	4
<b>4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>5</b>
4.1 Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий .....	5
4.2 Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам .....	7
4.3 Лабораторные работы.....	56
4.4 Семинары / практические занятия.....	56
4.5 Контрольные мероприятия: курсовой проект (курсовая работа), контрольная работа, РГР, реферат.....	56
<b>5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>57</b>
<b>6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ</b>	<b>57</b>
<b>7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....</b>	<b>58</b>
<b>8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО – ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>58</b>
<b>9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....</b>	<b>59</b>
9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению лабораторных работ/ семинаров / практических работ .....	59
9.2. Методические указания по выполнению курсового проекта (курсовой работы), контрольной работы, РГР, реферата .....	
<b>10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....</b>	<b>62</b>
<b>11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....</b>	<b>62</b>
<b>Приложение 1. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.....</b>	<b>63</b>
<b>Приложение 2. Аннотация рабочей программы дисциплины .....</b>	<b>70</b>
<b>Приложение 3. Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе .....</b>	<b>71</b>
<b>Приложение 4. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости по дисциплине.....</b>	<b>72</b>

# 1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

## Вид деятельности выпускника

Дисциплина охватывает круг вопросов, относящихся к научно-исследовательскому виду профессиональной деятельности выпускника в соответствии с компетенциями и видами деятельности, указанными в учебном плане.

## Цель дисциплины

Формирование у обучающихся теоретической и практической базы по методам и алгоритмам численного решения основных задач математики.

## Задачи дисциплины

Формирование у обучающихся навыков составления алгоритмов, которые играют определяющую роль в вопросах программирования и численного решения инженерно-технических задач.

Код компетенции	Содержание компетенций	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3
ОПК-2	способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении экспериментальных задач	<b>знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>– основные понятия и методы линейной алгебры, теории графов, теории функции комплексной переменной, используемых при изучении общетеоретических и специальных дисциплин и в инженерной практике;</li></ul> <b>уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>– использовать и применять основные понятия и методы линейной алгебры, теории графов, теории функций комплексной переменной при решении математических задач;</li></ul> <b>владеть:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>– инструментарием для решения математических и инженерных задач.</li></ul>
ПК-2	способность обрабатывать результаты экспериментов	<b>знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>– методы расчета режимов работы электрической сети;</li></ul> <b>уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>– планировать, готовить и выполнять типовые экспериментальные исследования по заданной методике;</li></ul> <b>владеть:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>– навыками планирования, подготовки и выполнения типовых экспериментальных исследований по заданной методике.</li></ul>

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.В.ДВ.06.01 Спец математика относится к вариативной части части.

Дисциплина Спец математика базируется на знаниях, полученных при изучении таких учебных дисциплин, как: Физика, Высшая математика, Теоретические основы электротехники, Информатика.

Основываясь на изучении перечисленных дисциплин, Спец математика представляет основу для изучения дисциплин: Электроэнергетические системы и сети, Передача энергии на расстояние.

Такое системное междисциплинарное изучение направлено на достижение требуемого ФГОС уровня подготовки по квалификации бакалавр.

### 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1. Распределение объема дисциплины по формам обучения

Форма обучения	Курс	Семестр	Трудоемкость дисциплины в часах						Курсовая работа (проект), контрольная работа, реферат, РГР	Вид промежуточной аттестации
			Всего часов	Аудиторных часов	Лекции	Лабораторные работы	Практические занятия	Самостоятельная работа		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<b>Очная</b>	2	4	108	54	18	-	36	54	-	зачет
<b>Заочная</b>	4	-	108	14	4	-	10	90	-	зачет
<b>Заочная (ускоренное обучение)</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>Очно-заочная</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

#### 3.2. Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости

Вид учебных занятий	Трудоемкость (час.)	в т.ч. в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)	Распределение по семестрам, час
			4
1	2	3	4
<b>I. Контактная работа обучающихся с преподавателем (всего)</b>	54	15	54
Лекции (Лк)	18	10	18
Практические занятия (ПЗ)	36	5	36
<b>II. Самостоятельная работа обучающихся (СР)</b>	54	-	54
Подготовка к практическим занятиям	24	-	24
Подготовка к зачету	30	-	30
<b>III. Промежуточная аттестация зачет</b>	+	-	+
Общая трудоемкость дисциплины, час.	108	-	108
зач. ед.	3	-	3

## 4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1. Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий

- для очной формы обучения:

№ раздела и темы	Наименование раздела и тема дисциплины	Трудоемкость, (час.)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)		
			учебные занятия		самостоятельная работа обучающихся*
			лекции	практические занятия	
1	2	3	4	5	6
<b>1.</b>	<b>Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике</b>	<b>13</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>7</b>
1.1.	Система энергетики как объект математического моделирования	2,5	0,5	-	2
1.2.	Применение комплексных чисел при анализе электрических режимов	6,5	0,5	4	2
1.3.	Векторные диаграммы режимных параметров электрической сети	2,5	0,5	-	2
1.4.	Использование матричной алгебры при расчетах режимов электрической сети	1,5	0,5	-	1
<b>2.</b>	<b>Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети</b>	<b>13</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>7</b>
2.1.	Общие сведения о схемах замещения	3,7	0,7	-	3
2.2.	Модель узла электрической сети	4,7	0,7	2	2
2.3.	Модель ветви электрической сети	4,6	0,6	2	2
<b>3.</b>	<b>Графы электрической сети</b>	<b>14</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>8</b>
3.1.	Схема замещения электрической сети	7	1	2	4
3.2.	Матрицы инцидентий	7	1	2	4
<b>4.</b>	<b>Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети</b>	<b>16</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
4.1.	Формирование матричных уравнений состояния электрической сети	2,25	0,25	1	1
4.2.	Расчет режима электрической сети, содержащей только источники тока	3,5	0,5	1	2
4.3.	Расчет режима электрической сети, содержащей только источники напряжения	2,25	0,25	1	1
4.4.	Расчет режима электрической сети, содержащей источники тока и напряжения	3,5	0,5	1	2
4.5.	Независимые параметры режима	2,25	0,25	1	1
4.6.	Обобщенные параметры режима	2,25	0,25	1	1
<b>5.</b>	<b>Уравнение установившегося режима электрической сети</b>	<b>16</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>8</b>
5.1.	Задачи расчета установившегося режима	3	1	-	2
5.2.	Вектор состояния и базис установившегося режима	3	1	-	2
5.3.	Формирование уравнения установившегося режима	10	2	4	4
<b>6.</b>	<b>Методы расчета установившегося режима</b>	<b>26</b>	<b>4</b>	<b>14</b>	<b>8</b>
6.1.	Методы расчета систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима	14	2	8	4
6.2.	Методы расчета систем нелинейных	12	2	6	4

	алгебраических уравнений установившегося режима				
<b>7.</b>	<b>Определение потерь мощности в электрических сетях</b>	<b>10</b>	<b>2</b>	<b>-</b>	<b>8</b>
7.1.	Выражение для комплекса мощности участка электрической сети	5	1	-	4
7.2.	Матричная форма записи условия баланса тока в узлах электрической сети	2,5	0,5	-	2
7.3.	Матричное выражение для потерь мощности участка электрической сети	2,5	0,5	-	2
	<b>ИТОГО</b>	<b>108</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>54</b>

- для заочной формы обучения:

№ раздела и темы	Наименование раздела и тема дисциплины	Трудоемкость, (час.)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)		
			учебные занятия		самостоятельная работа обучающихся*
			лекции	практические занятия	
1	2	3	4	5	6
<b>1.</b>	<b>Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике</b>	<b>16,5</b>	<b>0,5</b>	<b>2</b>	<b>14</b>
1.1.	Система энергетики как объект математического моделирования	3,1	0,1	-	3
1.2.	Применение комплексных чисел при анализе электрических режимов	5,1	0,1	2	3
1.3.	Векторные диаграммы режимных параметров электрической сети	4,1	0,1	-	4
1.4.	Использование матричной алгебры при расчетах режимов электрической сети	4,2	0,2	-	4
<b>2.</b>	<b>Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети</b>	<b>16,5</b>	<b>0,5</b>	<b>2</b>	<b>14</b>
2.1.	Общие сведения о схемах замещения	4,1	0,1	-	4
2.2.	Модель узла электрической сети	7,2	0,2	1	6
2.3.	Модель ветви электрической сети	5,2	0,2	1	4
<b>3.</b>	<b>Графы электрической сети</b>	<b>16,5</b>	<b>0,5</b>	<b>2</b>	<b>14</b>
3.1.	Схема замещения электрической сети	8,25	0,25	1	7
3.2.	Матрицы инциденций	8,25	0,25	1	7
<b>4.</b>	<b>Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети</b>	<b>14,5</b>	<b>0,5</b>	<b>2</b>	<b>12</b>
4.1.	Формирование матричных уравнений состояния электрической сети	2,3	0,1	0,5	2
4.2.	Расчет режима электрической сети, содержащей только источники тока	2,6	0,1	0,5	2
4.3.	Расчет режима электрической сети, содержащей только источники напряжения	2,6	0,1	0,5	2
4.4.	Расчет режима электрической сети, содержащей источники тока и напряжения	2,6	0,1	0,5	2
4.5.	Независимые параметры режима	2,05	0,05	-	2
4.6.	Обобщенные параметры режима	2,05	0,05	-	2
<b>5.</b>	<b>Уравнение установившегося режима электрической сети</b>	<b>14,5</b>	<b>0,5</b>	<b>2</b>	<b>12</b>
5.1.	Задачи расчета установившегося режима	4,1	0,1	-	4
5.2.	Вектор состояния и базис установившегося режима	4,2	0,2	-	4
5.3.	Формирование уравнения установившегося	6,2	0,2	2	4

	режима				
<b>6.</b>	<b>Методы расчета установившегося режима</b>	<b>13</b>	<b>1</b>	<b>-</b>	<b>12</b>
6.1.	Методы расчета систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима	6,5	0,5	-	6
6.2.	Методы расчета систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима	6,5	0,5	-	6
<b>7.</b>	<b>Определение потерь мощности в электрических сетях</b>	<b>12,5</b>	<b>0,5</b>	<b>-</b>	<b>12</b>
7.1.	Выражение для комплекса мощности участка электрической сети	4,1	0,1	-	4
7.2.	Матричная форма записи условия баланса тока в узлах электрической сети	4,2	0,2	-	4
7.3.	Матричное выражение для потерь мощности участка электрической сети	4,2	0,2	-	4
	<b>ИТОГО</b>	<b>104</b>	<b>4</b>	<b>10</b>	<b>90</b>

## 4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам

### Раздел 1. Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике

#### Тема 1.1. Система энергетики как объект математического моделирования

Лекция проводится в интерактивной форме: лекция-беседа, лекция с разбором конкретных ситуаций (2 часа).

Проектирование и текущая эксплуатация электрических систем требуют проведения многочисленных расчётов режимов работы. Кроме того, в период эксплуатации нередко требуется и проведение широкомасштабных экспериментальных исследований параметров режима электрической сети (токов, напряжений, мощностей). Иными словами, можно сказать, что **на стадии проектирования** расчёт режима работы системы необходим для выбора основных элементов электрической сети, а **на стадии эксплуатации** – для обеспечения экономичной и безаварийной работы энергосистемы.

Как известно из ТОО, режим линейной электрической цепи, представленной в виде схемы замещения, однозначно определяется однородной системой линейных алгебраических уравнений, число которых соответствует числу независимых узлов или независимых контуров, образованных анализируемой электрической сетью.

Можно выделить два основных способа моделирования режимов работы электрической сети:

- **физическое моделирование** с использованием схемы замещения электрической системы;
- **математическое моделирование** на базе систем линейных алгебраических (дифференциальных) уравнений

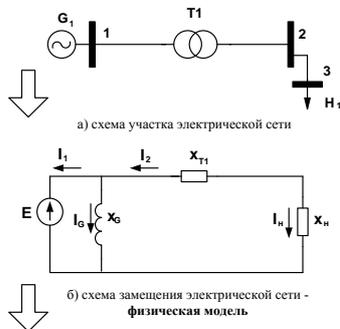
**Физическая модель** предусматривает получение искомой информации путём непосредственного изучения процесса, например с помощью прямых измерений, либо используя специализированные инструментальные средства – расчётные столы постоянного и переменного тока, физические комплексы и т.д.

**Математическая модель** предполагает описание изучаемого режима работы системой линейных алгебраических (дифференциальных) уравнений.

При наличии достаточного количества специализированных инструментальных средств применяют физическое моделирование. Использование коэффициентов масштабирования позволяет осуществлять моделирование изучаемого режима (параметра) в необходимых диапазонах изменения реальных параметров.

В свою очередь и математическое моделирование в ряде случаев обеспечивает высокую точность расчётов. Причём количество уравнений, описывающих режим работы электрической системы может достигать нескольких сотен. Так, например, для описания режима работы только одного синхронного генератора с точностью 2-3 % необходимо решить систему из 13 дифференциальных уравнений высокого порядка.

Проиллюстрируем вышеизложенное для схемы участка электрической сети (рис. 1.1).



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.1)$$

в) система линейных алгебраических уравнений –  
**математическая модель**

Рис. 1.1. Упрощенная блок-схема расчёта режима работы электрической системы

При математическом моделировании систему линейных алгебраических уравнений (ЛАУ) вида (1.1) часто представляют в матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (1.2)$$

Следует отметить, что универсального способа моделирования режима работы электрической сети не существует и в каждом конкретном случае необходимо индивидуально выбирать тот или иной вид моделирования.

## Тема 1.2. Применение комплексных чисел при анализе электрических режимов

Исторически понятие **комплексного числа** появилось как расширение понятия действительного числа при решении алгебраических уравнений. В общем случае среди множества действительных чисел некоторые алгебраические уравнения не имеют корней, в то время как в пространстве комплексных чисел любое алгебраическое уравнение имеет корни. Основные определения и различные формы записи комплексных чисел представлены в Приложении 1.

Комплексные числа нашли широкое применение в электроэнергетических расчётах, в частности, при анализе режимов работы электрических систем [7, 8]. Напомним, что под **электрической системой** понимается электрическая часть энергосистем, т.е. совокупность элементов вырабатывающих, преобразующих, распределяющих и потребляющих электроэнергию и средств контроля, управления и регулирования за процессом изменения электроэнергии. Известно, что синусоидальные величины, в том числе ток и напряжение, можно рассматривать как вращающиеся векторы. Всякий вектор может быть описан в ортогональной системе координат. Если принять, что вся система координат вращается со скоростью  $\omega$ , то упомянутые векторы можно рассматривать как стационарные, к которым можно применить все известные операции с векторами.

В качестве ортогональной системы координат принято брать комплексное пространство. Тогда векторы напряжения и тока можно представить в следующем виде:

$$\text{напряжение} \quad \dot{U} = \dot{U}' + j\dot{U}''; \quad (1.3)$$

$$\text{ток} \quad \dot{I} = \dot{I}' + \dot{I}'' . \quad (1.4)$$

Для того, чтобы использовать закон Ома в цепи переменного тока, необходимо и сопротивление представить в комплексной форме. Логично активное сопротивление направить по действительной оси, индуктивное – по мнимой оси в положительном направлении, а емкостное – по мнимой оси в отрицательном направлении. При этом комплексное (полное) сопротивление,  $\underline{Z}$  равно:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX = Ze^{j\varphi}, \quad (1.5)$$

$$\text{где } Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

По аналогии с цепями постоянного тока, где вводится проводимость (величина, обратная сопротивлению), в цепях переменного тока также вводится **комплексная проводимость**,  $\underline{Y}$ :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1(R - jX)}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}; \quad (1.6)$$

$$\underline{Y} = g - jb = Ye^{-j\varphi}, \quad (1.6a)$$

где  $g = \frac{R}{R^2 + X^2}; b = \frac{X}{R^2 + X^2}; Y = \frac{1}{Z}; \varphi = \arctg \frac{b}{g} = \arctg \frac{X}{R}$ .

Если принять, что напряжение направлено по оси вещественных чисел, то можно записать 
$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{Ue^{j0}}{Ze^{j\varphi}} = Ie^{-j\varphi}, \tag{1.7}$$

где  $I = \frac{U}{Z} = UY,$

При индуктивном характере сопротивления величина  $\varphi > 0$ . Отсюда следует, что ток отстает от напряжения на тот же угол, который имеет сопротивление.

Если принять  $\dot{U} = Ue^{j0}$ , то для чисто активного, индуктивного, емкостного сопротивлений соответственно можно записать

$$\dot{I}_R = Ie^{j0}; \dot{I}_L = Ie^{-j\pi/2}; \dot{I}_C = Ie^{j\pi/2}.$$

По аналогии с комплексным сопротивлением вводится понятие **полной мощности**,  $\underline{S}$ , которая также является комплексной величиной:

$$\underline{S} = P + jQ, \tag{1.8}$$

где P – активная мощность; Q – реактивная мощность.

В реальных энергосистемах преобладают индуктивные элементы (асинхронные двигатели, трансформаторы и др.), т.е. нагрузка имеет индуктивный характер (ток отстает от напряжения на угол  $\varphi$ ). Поэтому, если записать величину S в виде:

$$\underline{S} = \dot{U}\dot{I} = UIe^{-j\varphi} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ, \tag{1.9}$$

то реактивная мощность является отрицательной величиной, т.е. противоположна знаку активной мощности. Для согласования знаков активной и реактивной мощности нагрузки в формуле (1.9) принято использовать сопряженные значения тока,  $\dot{I}^*$ .

Электрическая мощность трехфазной сети переменного тока определяется токами всех трех фаз. Отсюда:

$$\underline{S} = 3\dot{U}_\phi \dot{I}^* = \sqrt{3}\dot{U}_l \dot{I}^* \tag{1.10}$$

Поскольку в трехфазной системе обычно имеют дело с линейным напряжением, то индекс «л», как правило, опускается. Тогда выражение для определения электрической мощности трёхфазной сети переменного тока имеет вид:

$$S = \sqrt{3}U I^* \tag{1.11}$$

### Тема 1.3. Векторные диаграммы режимных параметров электрической сети

Как показано в [8] направление тока  $I$  для генерирующего узла берется со знаком «плюс», для нагрузочного - со знаком «минус». Поскольку индуктивный ток отстает от напряжения (рис.1.2), то его реактивная составляющая имеет знак «минус». В свою очередь, емкостной ток опережает напряжение, поэтому его реактивная составляющая берется со знаком «плюс». Если одновременно учесть знаки генерации – нагрузки и индуктивности-емкости, то в результате для генерирующего узла абсолютное значение активной составляющей тока  $|I_a|$  берется со знаком «плюс»,  $|I_r|$  - «минус». Для нагрузочного узла  $|I_a|$  - со знаком «минус»,  $|I_r|$  - «плюс» для индуктивности, «минус» для емкости. Знаки различных составляющих тока приведены в таблице 1.1., а «треугольники» токов представлены на векторных диаграммах рисунка 1.2.

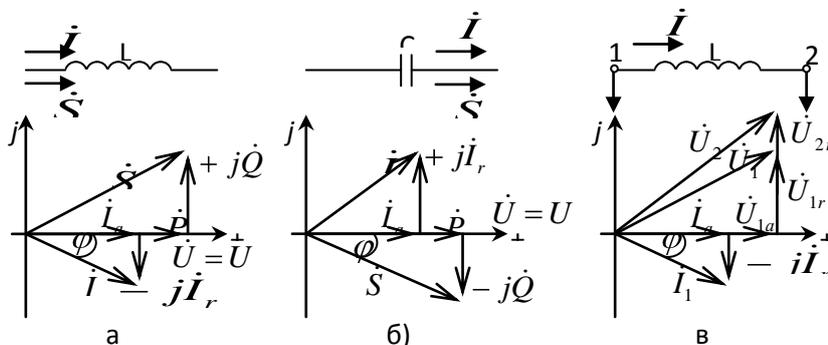


Рис. 1.2. Векторные диаграммы режимных параметров

a – индуктивная; б – ёмкостная; в – активно-индуктивная

Знаки составляющих тока и мощности

Параметр	Генерирующий узел		Нагрузочный узел		
	Активная составляющая	Реактивная составляющая	Активная составляющая	Реактивная составляющая	
				индуктивная	ёмкостная
Ток	$ I_a $	$-j I_r $	$- I_a $	$j I_r $	$-j I_r $
Мощность	$ P $	$ Q $	$ P $	$- Q $	$ Q $

Ток в узле определяется из (1.11)

$$\dot{i} = \frac{\dot{S}}{\sqrt{3}\dot{U}} = \frac{P - jQ}{\sqrt{3}(\dot{U}_a - j\dot{U}_r)}$$

Активную составляющую тока можно представить в виде:

$$I_a = \frac{PU_a + QU_r}{\sqrt{3}U^2} \quad (1.12)$$

Реактивная составляющая тока запишется как

$$I_r = \frac{PU_r - QU_a}{\sqrt{3}U^2} \quad (1.13)$$

Для генерирующего узла величина  $S$  берется со знаком «плюс», для нагрузочного – «минус». Реактивная индуктивная мощность – со знаком «плюс» (рис.1.2, а), ёмкостная – «минус» (рис. 1.2, б). Если учесть знаки генерации–нагрузки, индуктивности–ёмкости, то в результате для генерирующего узла значения мощностей  $|P|$  и  $|Q|$  берутся со знаком «плюс», для нагрузочного узла величина активной мощности  $|P|$  также принимается положительной, а реактивная индуктивная мощность – отрицательной.

В формулах (1.12) и (1.13) активная,  $P$  и реактивная мощности,  $Q$  для генерации и нагрузки берутся с соответствующими знаками, приведёнными в таблице 1.1.

#### Тема 1.4. Использование матричной алгебры при расчетах режимов электрической сети

Лекция проводится в интерактивной форме: лекция-беседа, лекция с разбором конкретных ситуаций (2 часа).

Одним из эффективных способов облегчения расчётов и сокращения требуемого для этого времени является применение в задачах электроэнергетики методов матричной алгебры [7]. Некоторые сведения из алгебры матриц приведены в Приложении 2.

Необходимо подчеркнуть, что матричные методы расчёта режимов электрических сетей не открывают принципиально новых возможностей для решения электротехнических задач. Они лишь обеспечивают удобную и легко приспособляемую к технике расчётов на СВТ форму записи. С их помощью можно решить такие задачи, которые из-за сложности решить иным способом было бы практически невозможно. Именно в этом и состоит главное преимущество матричных методов для инженера, выполняющего расчёты в электрических сетях.

Алгебра матриц оперирует не с отдельными величинами, входящими в исходную систему уравнений, а с группами величин, обладающих общими признаками. При этом группа из большого числа величин (параметров) может быть обозначена одним символом. Алгебраические действия с символами в значительной степени похожи на обычные действия, известные из элементарной алгебры. Учитывать приходится, как показано в Приложении 2, лишь некоторые ограничения и особенности. Алгебра матриц значительно упрощает запись весьма сложных по техническому исполнению операций и не отвлекает внимание инженера от решения основной задачи.

Из курса ТОЭ известно, что состояние **линейной электрической цепи**<sup>1</sup> описывается уравнениями законов Ома и Кирхгофа

- **Закон Ома в матричной форме**

Закон Ома определяет взаимосвязь параметров каждой из ветвей линейной электрической цепи

В общем случае каждая ветвь схемы электрической цепи может содержать сопротивление, источники напряжения - электродвижущая сила (ЭДС) и источники тока (рис. 1.3)

<sup>1</sup> В тех случаях, когда необходимо учитывать зависимость значений сопротивлений ветвей от токов или напряжений, схема замещения представляет собой нелинейную электрическую цепь. В практике расчётов установившихся режимов электрических систем такие случаи достаточно редки и поэтому в настоящем пособии не рассматриваются.

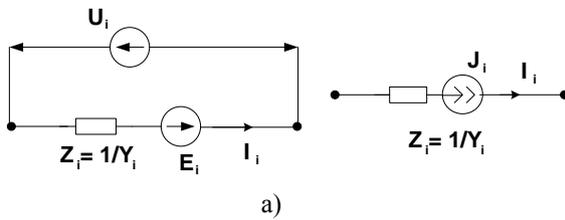


Рис. 1.3. Возможные варианты схемы отдельной ветви электрической сети

Для  $i$ -ой ветви, характеризующейся сопротивлением  $z_i$ , действующей в ней ЭДС,  $\dot{E}_i$  и протекающим по ней током  $\dot{I}_i$  (рис. 1.3 а), разность потенциалов между её концами (падение напряжения на ветви),  $U_{bi}$  определяется в соответствии с уравнением

$$U_{bi} = z_i \dot{I}_i - \dot{E}_i \quad (1.14)$$

Для  $i$ -ой ветви, характеризующейся сопротивлением  $z_i$ , действующей в ней источником тока,  $J_i$  протекающий по ней ток  $\dot{I}_i$  (рис. 1.3, б), определяется следующим образом:

$$\dot{I}_i = Y_i \dot{U}_i - J_i \quad (1.15)$$

Между отдельными ветвями  $i$  и  $j$  схемы электрической цепи (рис. 1.4) могут существовать взаимные сопротивления  $z_{ij}$ , обусловленные, к примеру, взаимной индуктивностью. Следует отметить, что в электрической схеме, обладающей свойством взаимности, взаимные сопротивления не зависят от очередности записи индексов, т.е.  $z_{ij} = z_{ji}$

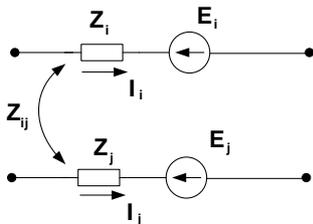


Рис. 1.4. Тестовая схема участка электрической сети

В электрических цепях взаимное сопротивление  $z_{ij}$  определяет ЭДС,  $\Delta \dot{E}_j$  наведённую в ветви  $j$  током  $\dot{I}_i$ , протекающим в ветви  $i$  либо ЭДС  $\Delta \dot{E}_i$ , наведённую в ветви  $i$  током  $\dot{I}_j$  протекающим в ветви  $j$

$$z_{ij} = \frac{\Delta \dot{E}_j}{\dot{I}_i} = \frac{\Delta \dot{E}_i}{\dot{I}_j}$$

Для ветвей  $i$  и  $j$ , имеющих взаимное сопротивление,  $z_{ij}$  связи между всеми указанными величинами при выбранных положительных направлениях, как показано на рис. 1.4, описываются следующими уравнениями

$$\begin{cases} \dot{U}_{bi} = z_{ii} \dot{I}_i - \dot{E}_i + z_{ij} \dot{I}_j \\ \dot{U}_{bj} = z_{jj} \dot{I}_j - \dot{E}_j + z_{ji} \dot{I}_i \end{cases}$$

Величины  $\dot{E}_i$  и  $\dot{I}_i$  являются исходными (независимыми) режимными параметрами, а величины  $z_{ij}$  и  $z_{ji}$  – исходными схемными параметрами. Знание этих величин необходимо для определения остальных – зависимых режимных параметров, в первую очередь, токов и падений напряжений в ветвях.

$$\underline{\underline{U}}_b^- = \underline{\underline{K}}_b^- \cdot \underline{\underline{I}}_b^- - \underline{\underline{E}}_b^- \quad (1.16)$$

а совокупность уравнений вила (1.16) можно записать в виде:

$$\underline{\underline{U}}_b^- = \underline{\underline{K}}_b^- \cdot \underline{\underline{I}}_b^- - \underline{\underline{E}}_b^- \quad (1.17)$$

где  $\underline{\underline{U}}_b^-$  – матрица-столбец напряжений ветвей электрической цепи;  $\underline{\underline{I}}_b^-$  – матрица-столбец токов ветвей;  $\underline{\underline{E}}_b^-$  – матрица-столбец источников ЭДС в ветвях;  $\underline{\underline{K}}_b^-$  – матрица-столбец источников тока в ветвях;  $\underline{\underline{K}}_b^-$  – квадратная матрица сопротивлений ветвей;  $\underline{\underline{K}}_b^-$  – квадратная матрица проводимостей ветвей.

Формулы (1.16) и (1.17) являются аналитическим выражением закона Ома в матричной форме. Их называют компонентными уравнениями электрической цепи в матричной форме. С их помощью

описываются параметры компонентов (сопротивлений, источников), из которых состоит электрическая схема. При этом структура самой схемы не играет роли

### Законы Кирхгофа в матричной форме

**Первый закон Кирхгофа** определяет баланс токов в каждом узле электрической цепи и формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма токов в узле равна нулю*. Для произвольного узла, содержащего источник тока  $\underline{J}$  и связывающего  $k$  ветвей (рис. 1.5, а), уравнение первого закона Кирхгофа имеет вид:

$$\sum_{k=1}^k \underline{I}_k - \underline{J} = 0 \quad (1.18)$$

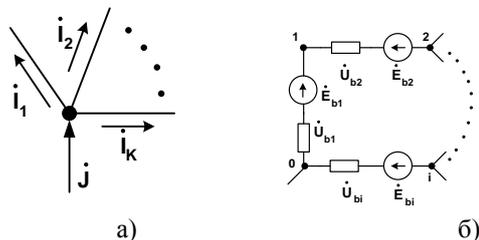


рис. 1.5. Упрощенное представление элементов схемы электрической сети: а - узел; б - контур

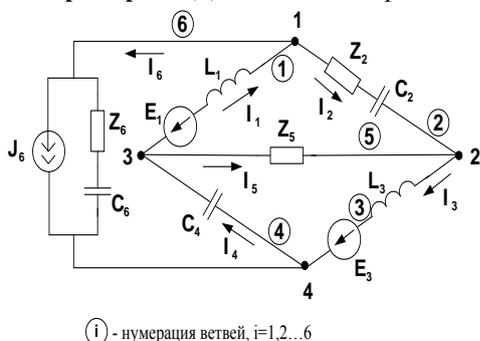
**Второй закон Кирхгофа** определяет баланс напряжений в контурах электрической цепи и формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма падений напряжения на ветвях контура равна нулю*. Для произвольного контура, содержащего  $l$  ветвей (рис. 1.5,б), уравнение второго закона Кирхгофа записывается в виде

$$\sum_{l=1}^l \underline{U}_l - \underline{E}_l = 0 \quad (1.19)$$

Состояние любой электрической цепи полностью описывается уравнениями законов Ома и Кирхгофа (1.16)-(1.19). Такие уравнения (системы уравнений), определяющие режим работы электрической схемы называют **уравнениями состояния**.

Как известно, для электрической цепи, содержащей  $n$  узлов, можно, в рамках выражения (1.19) составить  $(n-1)$  взаимно независимых уравнений, т.е. один из узлов исключить из рассмотрения. Этот узел принято считать **узлом баланса или балансирующим узлом**.

**Пример 1.1.** Для схемы электрической сети, приведённой на рис. 1.6. записать систему уравнений



(i) - нумерация ветвей,  $i=1,2,\dots,6$

рис. 1.6. Схема электрической сети

*Решение.*

$$\dot{U}_{b1} = \dot{U}_{31} = z_1 \dot{I}_1 - \dot{E}_1$$

$$\dot{U}_{b2} = \dot{U}_{12} = z_2 \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_{b3} = \dot{U}_{24} = z_3 \dot{I}_3 - \dot{E}_3$$

$$\dot{U}_{b4} = \dot{U}_{43} = z_4 \dot{I}_4$$

$$\dot{U}_{b5} = \dot{U}_{23} = z_5 \dot{I}_5$$

$$\dot{U}_{b6} = \dot{U}_{14} = z_6 \dot{I}_6 - \dot{J}_6$$

где  $z_1 = j\omega L_1$ ;  $z_2 = z_2 - j \frac{1}{\omega C_2}$ ;  $z_3 = j\omega L_3$ ;  $z_4 = -j \frac{1}{\omega C_{44}}$ ;  $z_5 = z_5$ ;  $z_6 = z_6 - j \frac{1}{\omega C_6}$

## Раздел 2. Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети

## Тема 2.1. Общие сведения о схемах замещения

Лекция проводится в интерактивной форме: лекция-беседа, лекция с разбором конкретных ситуаций (2 часа).

Анализ условий работы электрических систем **требует расчёта** их установившихся режимов, целью которого является определение таких режимных параметров, как напряжений в узлах электрической сети, токов и мощностей, протекающим по отдельным элементам этой сети и т.д. Такие расчёты выполняются с помощью **схемы замещения**, представляющей собой графическое изображение участков электрической сети, показывающее последовательность соединения отдельных элементов и отображающее свойства рассматриваемой электрической схемы [8, 9].

По аналогии с электрической цепью к схеме замещения электрической сети применимы такие понятия, как ветвь, узел и контур. **Ветвью** называется участок цепи, состоящий из последовательно соединённых ЭДС и сопротивлений (либо только сопротивлений) и вдоль которого в любой момент времени ток имеет одно и то же значение. **Узел** определяется как точка соединения двух и более ветвей, а **контур** – как участок цепи, образованный таким последовательным соединением нескольких ветвей, при котором в одном узле начало первой ветви контура соединено с концом последней.

Элементы схем замещения делятся на **активные** и **пассивные**.

К **активным элементам** схем замещения относят **источники ЭДС и тока**. Для них наиболее характерно то, что они определяют напряжения или токи в точках присоединения этих элементов в соответствующей цепи, независимо от её остальных параметров.

**Пассивные элементы** схем замещения (в первую очередь, сопротивления и проводимости) создают пути для протекания электрических токов. Пассивные элементы обычно разделяют на **поперечные** и **продольные**.

**Поперечные пассивные элементы** – это ветви, включенные между узлами схемы и нейтралью – узлом, имеющим напряжение, равное нулю. К **продольным пассивным элементам** относят ветви, соединяющие все узлы, кроме узла с напряжением, равным нулю. Другими словами, продольные ветви не соединяются с нейтралью.

Поперечные пассивные элементы соответствуют проводимостям на землю ЛЭП, заземлённым реакторам и конденсаторам. В некоторых случаях поперечными проводимостями представляются и потери в стали трансформаторов. В свою очередь, продольные пассивные элементы соответствуют активным и индуктивным сопротивлениям ЛЭП и обмоток трансформаторов, ёмкостям устройств продольной компенсации

Отдельные элементы электрической системы в расчётах установившихся режимов представляются схемами замещения, состоящими из элементов электрической цепи – источников напряжения или тока и сопротивлений. При рассмотрении симметричных установившихся режимов системы трёхфазного переменного тока все величины, характеризующие схемы замещения её элементов, определяются на одну фазу с нейтралью.

**Источники электроэнергии** могут быть представлены в виде источника напряжения с ЭДС,  $\dot{E}$  и внутреннего сопротивления,  $Z$  (рис 2.1, а), либо в виде источника задающего тока, имеющего значение тока  $J$  и значение внутреннего сопротивления равное бесконечности (рис. 2.1, б, в)

**Потребители электроэнергии** (нагрузка) имеют схему замещения в виде сопротивлений  $Z$  (рис 2.1, г), либо, аналогично источнику питания, в виде источника тока, равному взятому с обратным знаком току нагрузки (рис. 2.1, д), либо в виде задающего тока  $J$  (рис. 2.1, е).

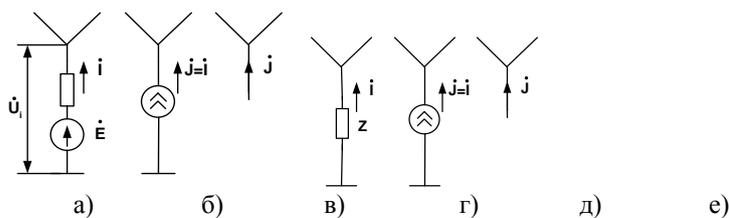


рис. 2.1. Схемы замещения отдельных элементов

На рис. 2.2 представлен фрагмент упрощённой электрической схемы энергосистемы, содержащей две электростанции (ЭС1 и ЭС 2) и три понижительных подстанции (А, В, С), связанных между собой шестью ЛЭП одного класса напряжения (Л1–Л6). Суммарная нагрузка потребителей, питающихся от шин низшего напряжения каждой из подстанций, условно обозначена стрелками.

Один из возможных вариантов схемы замещения электрической системы (рис. 2.2.), в котором электростанции представлены источниками напряжения, а подстанции (трансформаторы и нагрузки) – сопротивлениями, показан на рисунке 2.3, а. Другой вариант схемы замещения рассматриваемой системы, где как электростанции, так и подстанции представлены задающими токами, показан на рисунке 2.3, б.

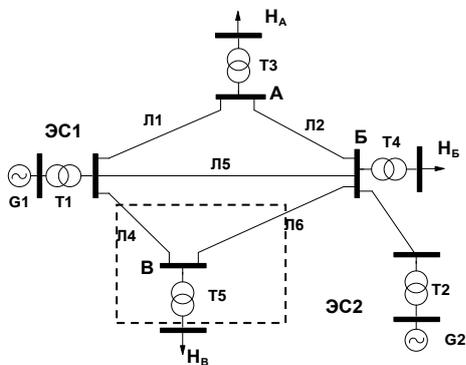
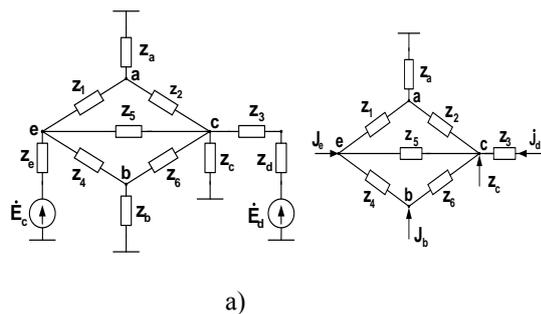


Рис. 2.2. Упрощенная электрическая схема энергосистемы



а)

б)

рис. 2.3. Возможные схемы замещения электрической системы

Первая схема замещения (рис. 2.3, а) содержит одиннадцать ветвей и шесть узлов,  $a \div e$  и узел нейтрали (земли), имеющий нулевой потенциал. Ветви, связанные с узлом нейтрали (ветви источников питания и нагрузок), являются *поперечными*; остальные ветви – *продольными*. В свою очередь, схема замещения, показанная на рис. 2.3, б, в которой источники питания и нагрузки представлены задающими токами, содержит только шесть продольных ветвей и пять узлов, что определяется отсутствием узла нейтрали. Обе рассматриваемые схемы содержат ЗАМКНУТЫЕ контуры, образуемые, например, линиями 1, 2, 5 или 4, 5, 6 и поэтому называются **замкнутыми**. При отсутствии таких контуров схема замещения называется **разомкнутой**.

Выбор того или иного варианта схемы замещения определяется целями расчёта и исходными данными. В практике расчётов электрических сетей в большинстве случаев используют **источники тока**, которыми являются генераторы электрических станций и нагрузки потребителей.

Схема замещения электрической системы, используемая для расчётов установившихся режимов, является электрической цепью. Это означает, что к схеме замещения электрической системы применимы такие понятия, характеризующие электрические цепи, как ветвь, узел и контур. При расчётах режимов электрических систем основными элементами схем замещения являются **узлы** и **ветви** [10-12]. При этом схема замещения системы представляет собой линейную электрическую цепь, подробно рассмотренную в первом разделе.

В схеме замещения электрической системы трансформаторы (автотрансформаторы) подстанций и электростанций, ЛЭП, реакторы и другие элементы электрических сетей представляются в схеме замещения электрической системы в виде **сопротивлений**. Сопротивления, входящие в схему замещения электрической системы, при расчётах её установившихся режимов обычно принимаются постоянными, т.е. не зависящими от значений токов и напряжений.

Для двухобмоточных силовых трансформаторов и автотрансформаторов обычно применяется Г-образная схема замещения, параметры которой определяются по каталожным данным. Поперечная ветвь в Г-образной схеме замещения трансформатора соответствует потерям мощности в стали. При расчётах режимов электрических систем потери в стали трансформатора учитываются или в виде отбора мощности, или постоянной проводимостью (рис. 2.4, а). Во всех современных программах расчётов установившегося режима схема замещения электрической системы не приводится к одной ступени напряжения, а используются комплексные коэффициенты трансформации. Последнее соответствует предположению, что схема замещения трансформатора (рис. 2.4, б) состоит из Г-образной схемы и идеального трансформатора, Т, не имеющего сопротивлений и магнитных потоков рассеивания. Поэтому отношение напряжений на его зажимах,  $k_T$  постоянно и равно:

$$k_T = U_{2в} / U_{2н}$$

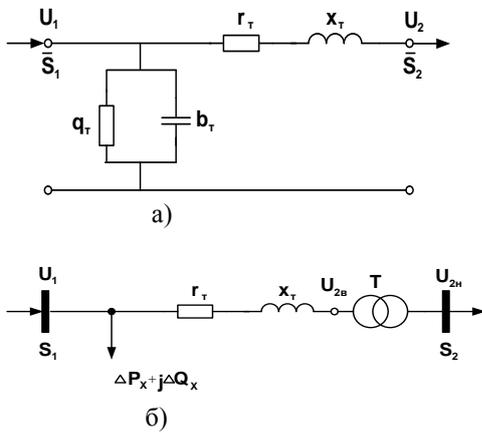


рис. 2.4. Схемы замещения силовых трансформаторов

На рис. 2.5 представлена схема замещения шунтирующего реактора

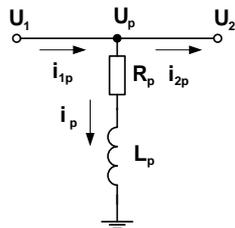


Рис. 2.5. Схема замещения шунтирующего реактора

## Тема 2.2. Модель узла электрической сети

Из закона Ома следует, что для расчёта всех параметров узла, при известных схемных параметрах (сопротивления, проводимости, коэффициенты трансформации), необходимо знать хотя бы два режимных параметра. Среди множества таких возможных комбинаций, к примеру,  $\{U; P; Q\}$  и т.д., наиболее быстрый расчёт режима-потокораспределения в исследуемой схеме электрической сети обеспечивается при известных значениях напряжения в узле,  $U_i$  и угле сдвига,  $\delta_i$  между векторами ЭДС генератора и напряжения узла.

В общем случае отдельный узел электрической сети представляется схемой замещения, приведенной на рис. 2.6.

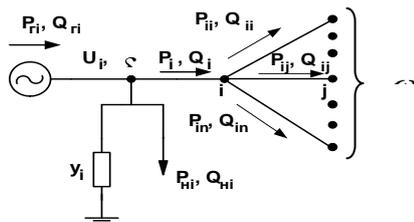


Рис. 2.6. Схема замещения узла электрической сети

Здесь  $P_{ri}, Q_{ri}$  - регулируемые активная и реактивная мощности узла  $i$ ;  $P_{ni}, Q_{ni}$  - активная и реактивная нагрузки узла;  $y_i$  - проводимость шунта, включенного в узел  $i$ ;  $P_i, Q_i$  - активная и реактивная мощности, выдаваемые из узла  $i$  в сеть, их называют **инъекциями**;  $P_{ij}, Q_{ij}$  - активные и реактивные мощности, вытекающие из узла  $i$  в узел  $j$ ;  $\omega_i$  - множество узлов смежных  $i$ -му узлу;  $U_i, \delta_i$  - соответственно, модуль напряжения и угол сдвига в узле  $i$ ;

Величина  $y_i$  определяется по следующему выражению:

$$y_i = y_{ai} + y_{ri} \quad (2.1)$$

где  $y_{ai}$  - активная проводимость шунта;  $y_{ri}$  - реактивная проводимость шунта

При расчетах можно также использовать продольную и поперечную составляющие комплекса напряжения  $U_{ai}$  и  $U_{ri}$ .

Как известно,

$$U_{ai} = U_i \cdot \cos \delta_i \quad (2.2)$$

$$U_{ri} = U_i \cdot \cos \delta_i \quad (2.3)$$

и обратно

$$U_i = \sqrt{U_{ia}^2 + U_{ir}^2} \quad (2.4)$$

$$\delta_i = \arctg U_{ir} / U_{ia} \quad (2.5)$$

Комплексы токов могут быть найдены через заданные активные и реактивные мощности  $P_{Гi}$  и  $Q_{Гi}$  соответственно и модули напряжений,  $U_i$  например,  
- для генераторов

$$I_{rai} = P_{ri} / \sqrt{3} U_i - \text{активный ток} \quad (2.6)$$

$$I_{rii} = Q_{ri} / \sqrt{3} U_i - \text{реактивный ток} \quad (2.7)$$

или

$$I_{ri} = \sqrt{\frac{P_{ri}^2 + Q_{ri}^2}{3U_i^2}} - \text{модуль тока} \quad (2.8)$$

$$\varphi_{ri} = \arctg (Q_{ri} / I_{rai}) - \text{фаза тока относительно напряжения, } U_i \quad (2.9)$$

Аналогично записываются выражения для токов всех других элементов.

$$\text{Обратное преобразование от токов к мощностям} \quad \left. \begin{aligned} P_{zi} &= \sqrt{3} U_i I_{ri} \\ Q_{zi} &= \sqrt{3} U_i I_{mi} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} P_{zi} &= U_i I_{ri} \cos \varphi_{ri} \\ Q_{zi} &= U_i I_{ri} \sin \varphi_{ri} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

В электрических сетях нагрузки узла  $P_{ni}$  и  $Q_{ni}$  могут зависеть от модуля напряжения и частоты в узле  $i$ :

$$P_{ni} = P_{ni}(U_i, f_i) \quad (2.12)$$

$$Q_{ni} = Q_{ni}(U_i, f_i) \quad (2.13)$$

Эти зависимости, называемые **статическими характеристиками нагрузок**, обычно представляются в виде полиномов от одного аргумента (хотя возможны и другие их аппроксимации):

$$P_{ni} = P_{ni0} \left( a_{1i} (U_i - U_{0i}) + a_{2i} (U_i - U_{0i})^2 \right) \quad (2.14)$$

$$Q_{ni} = Q_{ni0} \left( b_{1i} (U_i - U_{0i}) + b_{2i} (U_i - U_{0i})^2 \right) \quad (2.15)$$

где  $P_{ni0}$  и  $Q_{ni0}$  – нагрузки при номинальном напряжении  $U_{0i}$ ;  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}$ ,  $b_{1i}$  и  $b_{2i}$  – коэффициенты, определяемые экспериментальным путём. Для характерных групп потребителей типовые значения этих коэффициентов можно найти по справочникам.

Зависимости нагрузок от частоты обычно полагаются линейными и представляются в виде:

$$P_{ni} = P_{ni0} \left( c_i (f_i - f_0) \right) \quad (2.16)$$

$$Q_{ni} = Q_{ni0} \left( d_i (f_i - f_0) \right) \quad (2.17)$$

где  $f_0$  - номинальная частота

Генерируемая мощность в узле  $i$  также может зависеть как от модуля напряжения в узле, так и от частоты, причём эти зависимости, называемые **статическими характеристиками генераторов**, определяются типом регуляторов возбуждения и скорости и могут быть заданы в виде:

$$P_{gi} = P_{gi0} \left( k_i (f_i - f_0) + g_i (U_i - U_{0i}) \right) \quad (2.18)$$

$$Q_{gi} = Q_{gi0} \left( b_{1i} (U_i - U_{0i}) + b_{2i} (U_i - U_{0i})^2 \right) \quad (2.19)$$

где коэффициенты наклона характеристик  $g_i$ ,  $k_i$ ,  $l_i$  и  $m_i$ , а также опорная частота  $f_{0i}$  и напряжение  $U_{i0}$  устанавливаются при настройке регулятора.

Параметры режима в узле связаны между собой первым законом Кирхгофа

$$\sum_{j \in \omega_i} P_{ij} - P_{ci} + P_{ni} + U^2 g_i = 0 \quad (2.20)$$

$$\sum_{j \in \omega_i} Q_{ij} - Q_{ci} + U^2 b_i = 0 \quad (2.21)$$

$$\sum_{j \in \omega_i} I_{aij} - I_{cai} + I_{nai} + U_i g_i = 0 \quad (2.22)$$

$$\sum_{j \in \omega_i} I_{rij} - I_{cni} + I_{nri} + U_i b_i = 0 \quad (2.23)$$

В уравнения (2.20)-(2.23) мощности и токи генераторов и нагрузок могут входить их статическими характеристиками.

### Тема 2.3. Модель ветви электрической сети

Рассмотрим модель ветви, которая в общем случае может быть представлена следующей схемой замещения (рис. 2.7)

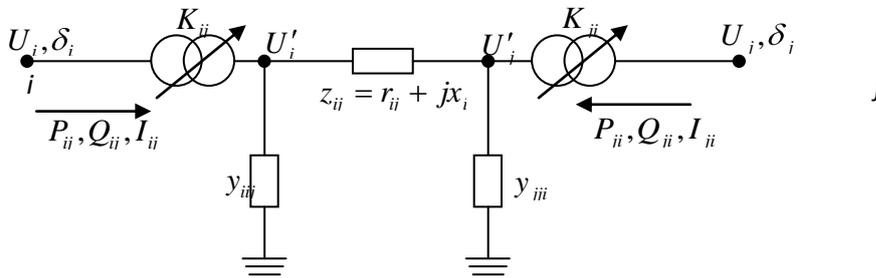


Рис. 2.7. Схема замещения ветви.

В этой схеме замещения появляются новые параметры, характеризующие электрическую сеть:

- сопротивление продольное,  $Z_{ij}$

$$Z_{ij} = r_{ij} + jx_{ij}$$

- проводимость ветви,  $Y_{ij}$

$$Y_{ij} = y_{aij} + jy_{rij}$$

- проводимость на землю, в узле i связи (i - j),  $Y_{iij}$

$$Y_{iij} = g_{iij} + jb_{iij}$$

- проводимость на землю, в узле j связи (j - i),  $Y_{jji}$

$$Y_{jji} = g_{jji} + jb_{jji}$$

Необходимо подчеркнуть, что в общем случае  $Y_{iij} \neq Y_{jji}$

Комплексные коэффициенты трансформации в узле i

$$K_{ij} = K_{aij} + jK_{rij} = U_i^* / U_j^*$$

и в узле j

$$K_{ji} = K_{aji} + jK_{rji} = U_j^* / U_i^*$$

Соответственно, ток,  $I_{ij}$  вытекающий из узла i по связи (i - j) определяется с помощью закона Ома, как

$$I_{ij} = \frac{U_i k_{ij} - U_j k_{ji}}{Z_{ij}} + U_i k_{ij} \cdot Y_{iij} \quad (2.24)$$

Для упрощения расчетов электрической сети используют, собственную,  $Y_{ii}$  и взаимную,  $Y_{ij}$  проводимости, определяемые из следующих выражений.

$$\begin{cases} Y_{ii} = \sum_{\substack{j=R_i \\ j=1}}^n (y_{ij} + y_{ij}) \\ Y_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i=R_j \\ i \neq j}}^n \frac{1}{Z_{ij}} \end{cases} \quad (2.25)$$

Используя собственные и взаимные проводимости запишем **матрицу полных проводимостей**,  $[Y_n]$

$$[Y_n] = \begin{vmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & \dots & -Y_{1n} \\ -Y_{21} & Y_{22} & \dots & -Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

В матрице вида (2.26) значения собственных проводимостей расположены на главной диагонали со знаком "+", взаимные - все остальные элементы матрицы - со знаком "-".

По известному соотношению определим величину полной мощности,  $S_{ij}$ , протекающей по связи (i-j)

$$\hat{S}_{ij} = U_i \hat{I}_{ij} \quad (2.27)$$

где  $\hat{I}_{ij}$  - сопряженный комплекс тока

Перетоки, полученные из выражения (2.27) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} P_{ij} &= k_{ij}^2 U_i^2 \left[ \left( y_{aij} + y_{aij} \right) \left( U_{ai} U_{aj} + U_{ri} U_{rj} \right) y_{aij} - \right. \\ &\quad \left. - \left( U_{ai} U_{aj} - U_{ri} U_{rj} \right) y_{rij} + \left( k_{aij} k_{rij} - k_{rij} k_{aij} \right) \left( U_{ai} U_{rj} + U_{ri} U_{aj} \right) y_{aij} - \right. \\ &\quad \left. - \left( U_{ai} U_{aj} - U_{ri} U_{rj} \right) y_{rij} \right], \quad i=1, \dots, n; i \neq j \\ Q_{ij} &= k_{ij}^2 U_i^2 \left[ \left( y_{rij} + y_{rij} \right) \left( U_{ai} U_{rj} + U_{ri} U_{aj} \right) y_{aij} - \right. \\ &\quad \left. - \left( U_{ai} U_{aj} - U_{ri} U_{rj} \right) y_{rij} + \left( k_{aij} k_{rij} - k_{rij} k_{aij} \right) \left( U_{ai} U_{rj} + U_{ri} U_{aj} \right) y_{aij} - \right. \\ &\quad \left. - \left( U_{ai} U_{rj} - U_{ri} U_{aj} \right) y_{aij} \right], \quad i=1, \dots, n; i \neq j \text{ где } n - \text{число узлов} \end{aligned}$$

Совокупность уравнений (2.1)-(2.23) для всех узлов ( $i=1, \dots, n$ ) и уравнения (2.24), (2.28), (2.29) для всех ветвей образует систему уравнений установившегося режима, которую в векторной форме можно записать как

$$G Z = 0 \quad (2.30)$$

где  $Z$  - вектор параметров режима

Некоторые уравнения в (2.30) могут быть взаимозависимыми, т.е. одни могут быть получены из других. Например, из (2.24) можно получить (2.28) и (2.29). Баланс токов (2.22) и (2.23) в ( $n-1$ ) узлах обеспечивает баланс в  $n$ -м узле, т.е. уравнения баланса токов в этом узле зависимы. Поэтому уравнения баланса в этом узле исключаются из общей системы уравнений; токи и мощности в этом узле определяются по сумме перетоков из этого узла в сеть.

Как уже отмечалось в первой главе, произвольная система линейных алгебраических уравнений (ЛАУ) вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.31)$$

может быть записана в матричной форме. Если ввести матрицы  $[A]$ ,  $[X]$  и  $[B]$  вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

то выражение (2.31) можно записать как

$$A \cdot X = B \quad (2.32)$$

Подчеркнем, что матричная форма записи системы линейных алгебраических уравнений:

- сокращает время и место записи, повышает обратимость уравнений;
- существенно упрощает математические преобразования уравнений;
- дает возможность формально представить решения системы ЛАУ, которые можно получить, если воспользоваться понятием обратная матрица,  $\mathbf{H}^{-1}$ ,

Умножим обе части системы на  $A^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{K} &= \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{K} &= \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

С учётом того, что  $\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  - единичная матрица, окончательно можно записать

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.33)$$

- значительно упрощает алгоритмизацию и программирование прикладных задач, решаемых на ЭВМ.
- В связи с этим матричный аппарат в настоящее время является одним из наиболее эффективных средств современного прикладного математического анализа

### Раздел 3. Графы электрической сети

#### Тема 3.1. Схема замещения электрической сети

Лекция проводится в интерактивной форме: лекция-беседа, лекция с разбором конкретных ситуаций (2 часа).

Схемы замещения современных сложных электрических систем содержат сотни и более узлов и ветвей. Количество уравнений состояния для таких систем настолько велико, что для их решения необходимо использовать современные СВТ. Более того, составление уравнений состояния для сложных электрических схем является весьма трудоёмкой процедурой и решение данной задачи также целесообразно возложить на вычислительную технику. Для этого требуется иметь формализованный подход, который был бы удобен и эффективен для электрических схем любой сложности и конфигурации. В настоящее время такой подход, разработанный на основе аналитического представления конфигурации схемы замещения электрической сети с помощью процедур алгебры матриц и элементов теории графов, широко используется в практике расчётов схем электрической сети.

Основоположником применения теории графов к электрическим схемам является Кирхгоф, который спустя два года после опубликования знаменитых I и II законов для токов и напряжений сформулировал основные топологические правила решения контурных уравнений схемы. Он впервые показал функциональную связь электрической схемы с её геометрией.

Из представленных в приложении 3 кратких сведений по теории графов можно сделать вывод, что **схема замещения электрической сети** может рассматриваться как **граф**. Так как речь в настоящем учебном пособии идёт о процессах в электрических сетях, то в дальнейшем вместо терминов теории графов «вершина» и «ребро» будем применять используемые в электротехнике понятия «узел» и «ветвь».

Факт совпадения конечной точки ветви с отдельным узлом графа называют **инцидентией**.

Схема замещения электрической системы чаще всего является связанным графом и состоит из ветвей, связывающих различные узлы. Эти ветви организуют цепочки (пути графа), которые, замыкаясь, могут образовывать **замкнутые контура**. Все величины, характеризующие режимные параметры ветвей (токи, ЭДС, напряжения) имеют определённые направления. Таким образом, схема замещения электрической сети обычно является **связанным направленным (ориентированным) графом**.

Важными в теории графов являются понятия «дерево» и «хорда».

**Деревом графа** называют наименее связанный подграф, содержащий всю совокупность вершин исходного графа. Такой подграф, являясь основой («скелетом») исходного графа не содержит замкнутых контуров. Другими словами, дерево – это в лучшем случае разомкнутая часть исходной замкнутой схемы, которая соединяет все узлы исходного графа. Необходимо подчеркнуть, что число ветвей входящих в состав дерева графа  $m$ , на единицу меньше числа узлов всей схемы  $n$ , т.е.  $m=n-1$ . Понятно, что меньшим числом ветвей те же самые узлы графа соединить нельзя.

Разомкнутая схема графа получается путём исключения некоторых ветвей входящих в замкнутые независимые контуры исходной схемы. Каждый такой контур схемы размыкается, если исключается одна из входящих в него ветвей.

Ветви, не вошедшие в дерево графа, называются **хордами графа**. Число хорд  $m_x$  равно числу независимых контуров схемы  $k$ ,  $m_x = n - m_g = n - m + 1 = k$ .

Один и тот же граф может содержать несколько деревьев с различным набором хорд.

**Пример 3.1.** Привести возможные варианты разделения пятиузловой графа электрической сети с двумя независимыми контурами (рис.3.1) на деревья с соответствующими наборами хорд.

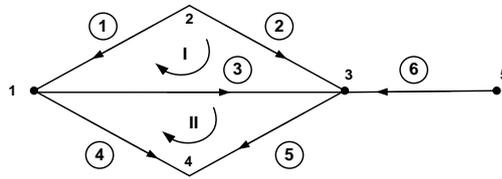


Рис. 3.1. Граф электрической сети

Решение. Сведём в табл. 3.1 все возможные варианты разделения приведённого графа на деревья и наборы хорд.

Таблица 3.1.

Представление графа в виде деревьев и соответствующими наборами хорд

№	Деревья	Наборы хорд
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Как следует из табл. 3.1. можно построить восемь деревьев с соответствующими наборами хорд. При представлении схем в виде графов нет надобности в специальных обозначениях, ЭДС. и напряжений. Ветви графически изображаются прямой (или кривой) с указанием их направлений. Таким образом, направление ветви от начальной вершины к конечной одновременно является положительным направлением и для всех анализируемых параметров: ЭДС.  $E$ , тока  $I$  и напряжения  $U$ . В качестве примера для участка электрической сети и его схемы замещения (рис. 3.2) приведён граф этой сети (рис. 3.3).

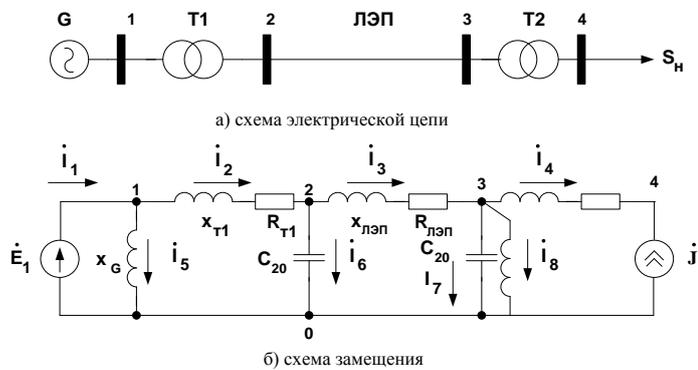


Рис. 3.2. Участок электрической сети

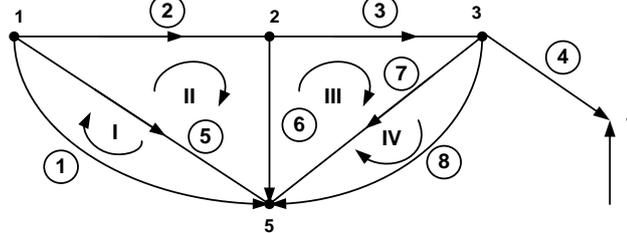


Рис. 3.3. Граф электрической сети

Взаимные сопротивления  $Z_{ij} = Z_{ji}$  между ветвями  $i$  и  $j$  определяют ЭДС, наведённую в ветви  $j$  током  $I_i$ , протекающим в  $i$ -ой ветви и наоборот. Математически это можно записать следующим образом:

$$E_j = z_{ij} I_i$$

$$E_i = z_{ji} I_j$$

Взаимные сопротивления и проводимости графически не изображаются и не являются ветвями графа. Наличие положительных направлений ветвей освобождает от применения специальных обозначений для определения взаимного расположения ветвей, связанных взаимным сопротивлением. Если положительный ток  $I_j$  ветви  $j$  вызывает появление положительной ЭДС  $E_i$  в ветви  $i$ , то взаимное сопротивление  $Z_{ij}$  между этими ветвями является положительным. Если положительный ток  $I_j$  ветви  $j$  вызывает появление отрицательной ЭДС  $E_i$  в ветви  $i$ , то взаимное сопротивление  $Z_{ij}$  между этими ветвями является отрицательным. При этом положительный ток  $I_i$  в ветви  $i$  вызывает появление отрицательной ЭДС  $E_j$  в ветви  $j$ . Таким образом, выбор направления для всех ветвей схемы определяет знаки для всех параметров схемы и параметров её режима.

Для характеристики связей, определяемых графом, пользуются матричными выражениями. В частности, зависимость (1.14), приведенная ранее в первой главе пособия, для отдельной ветви схемы замещения, может быть записана в виде матричного уравнения, справедливого в обобщённом виде для всей схемы:

$$\mathbf{U}_{bi} = \mathbf{Z}_{bi} \cdot \mathbf{I}_i - \mathbf{E}_i \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{U}_{bi}$  - столбцевая матрица напряжений на ветвях схемы;  $\mathbf{Z}_{bi}$  - квадратная матрица сопротивлений ветвей;  $\mathbf{I}_i$  - столбцевая матрица токов ветви;  $\mathbf{E}_i$  - столбцевая матрица ЭДС ветвей.

Уравнение (3.1) остаётся справедливым для любого направленного графа, которым представляется анализируемая схема замещения электрической сети.

## Тема 3.2. Матрицы инциденций

### 3.2.1. Матрица соединений

При расчётах установившихся режимов электрические схемы наиболее удобно представлять в виде матриц инциденций, а именно:

- матрицы соединений,  $\mathbf{I}_{\Sigma}$  - первой матрицы инциденций (I МИ)
- матрицы контуров,  $\mathbf{N}$  - второй матрицы инциденций (II МИ)

Матрица соединений,  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  впервые введена Пуанкаре. Она предназначена для аналитического описания ориентированного графа электрической сети и отображает связь отдельных узлов в этой схеме. Элемент этой матрицы,  $M_{ks}$ , находящийся на пересечении  $k$ -й строки, соответствующий  $k$ -му узлу и  $S$ -го столбца соответствующего ветви ( $i$ - $j$ ), определяется из следующих условий:

$$M_{ks} = \begin{cases} +1, & \text{если ветвь } S \text{ исходит из узла } K \\ -1, & \text{если ветвь } S \text{ направленна к узлу } K \\ 0, & \text{если ветвь } S \text{ не принадлежит (не инцидентна) узлу } K \end{cases} \quad (3.2)$$

Каждая строка  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  показывает, какими вершинами соответствующие ветви присоединяются к данному узлу схемы, а каждый столбец – какие узлы являются начальной и конечной вершинами данной ветви. Таким образом, в графе, содержащем изолированные узлы, соответствующие строки матрицы  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  будут содержать только нулевые элементы.

**Пример 3.2.** Для ориентированного графа электрической сети (рис. 3.4), записать матрицу  $\mathbf{M}_{\Sigma}$ .

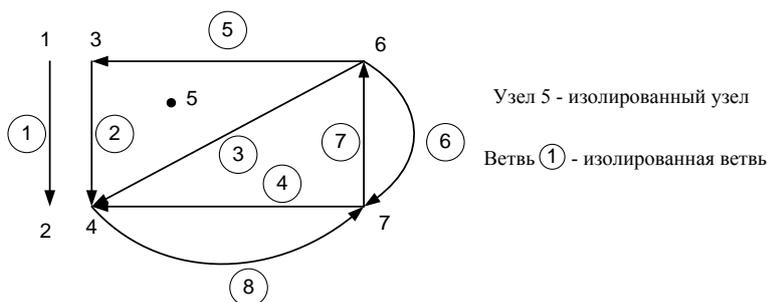


Рис. 3.4. Граф электрической сети

В соответствии с условиями (3.2) матрица  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  запишется следующим образом:

$$\mathbf{M}_{\Sigma} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{ветви} \\ \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} & \text{⑥} & \text{⑦} & \text{⑧} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{узлы} \\ \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \\ \text{⑤} \\ \text{⑥} \\ \text{⑦} \end{matrix} & \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & -1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Условием правильности составления матрицы  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  является наличие только одной положительной единицы и только одной отрицательной единицы в каждом столбце матрицы. Следовательно, сумма всех строк этой матрицы (по столбцам) должна давать нулевую строчную матрицу.

$$\mathbf{1}^T \mathbf{M}_{\Sigma} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{1}^T$  - единичная строчная матрица (см. приложение 2)

Если в матрице  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  выделить строку, соответствующую некоторому узлу, принятому за балансирующий и присвоить этой строке последний номер, то условие (3.3) запишется в следующем виде:

$$\mathbf{1}^T \begin{vmatrix} - & \mathbf{M}_{\Sigma} \\ \mathbf{M}_{\Sigma\delta} & - \end{vmatrix}$$

откуда

$$\mathbf{M}_{\Sigma\delta} = -\mathbf{n}^T \mathbf{M}_{\Sigma}$$

Здесь  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  - матрица соединений для схемы без балансирующего узла;  $\mathbf{M}_{\Sigma\delta}$  - матрица соединений для балансирующего узла.

Полученный результат означает, что одна из строк  $\mathbf{I}$  матрицы инцидентий  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  может быть получена суммированием остальных строк (по столбцам) и изменением знаков всех элементов суммарной матрицы на обратные (т.е. умножением её на отрицательную единицу).

К сожалению, ИМИ не даёт информации о наличии в анализируемом графе **линейных замкнутых независимых (л.з.н) контуров**<sup>2</sup>. Этот недостаток восполняет матрица контуров.

### 3.2.2 Матрица контуров

**Матрица контуров,  $\mathbf{N}^-$  (вторая матрица инцидентий – ПМИ)** служит для обобщённого аналитического описания соединений ветвей схемы в линейные замкнутые независимые контура.

Элемент матрицы,  $N_{ds}$ , находящийся на пересечении  $k$ -й строки, соответствующей  $d$ -му л.з.н. контуру, и  $s$ -го столбца, соответствующего ветви  $(i-j)$ , находится из следующих условий:

$$N_{ks} = \begin{cases} +1, & \text{если ветвь } (i-j) \text{ входит в } d\text{-ый л.з.н. контур} \\ & \text{и её направление совпадает с направлением} \\ & \text{обхода } d\text{-го л.з.н. контура} \\ -1, & \text{если ветвь } (i-j) \text{ входит в } d\text{-ый л.з.н. контур} \\ & \text{но её направление не совпадает с направлением} \\ & \text{обхода } d\text{-го л.з.н. контура} \\ 0, & \text{если ветвь } (i-j) \text{ не принадлежит (не инцидентна)} \\ & d\text{-му л.з.н. контуру} \end{cases} \quad (3.4)$$

**Пример 3.3.** Для ориентированного графа электрической сети (рис. 3.5а), записать матрицу контуров  $\mathbf{N}^-$ .

**Решение.** После перевода исходного трёхмерного графа электрической сети в линейное пространство для преобразованного графа электрической сети (рис. 3.5, б), содержащего 15 ветвей и 4 л.з.н. контура матрица  $\mathbf{N}^-$ , в соответствии с условиями (3.4) запишется в виде:

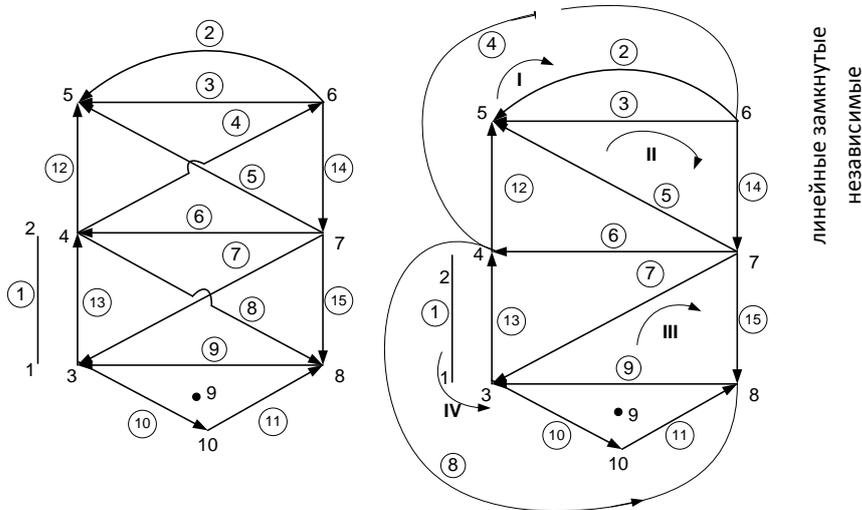


рис. 3.5. Графы электрической сети

а) исходный; б) преобразованный;  
Узел 9 – изолированный узел; Ветвь 1 – изолированная ветвь

$$\mathbf{N}^- = \begin{matrix} \left. \begin{array}{cccccccccccccccc|l} 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \text{I} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & \text{II} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & \text{III} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & \text{IV} \end{array} \right\} \text{ л.з.н.} \\ \underbrace{\begin{matrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} & \text{⑥} & \text{⑦} & \text{⑧} & \text{⑨} & \text{⑩} & \text{⑪} & \text{⑫} & \text{⑬} & \text{⑭} & \text{⑮} \end{matrix}}_{\text{ветви}} \end{matrix}$$

<sup>2</sup> подробная характеристика линейных замкнутых независимых контуров приведена в Приложении 3

Условием правильности составления матрицы контуров  $\mathbf{N}_-$  является наличие хотя бы одной положительной, либо отрицательной единицы в отдельном столбце этой матрицы. Исключение составляют столбцы, содержащие ветви, не входящие ни в один линейный замкнутый независимый контур графа. В этом случае такие столбцы матрицы  $\mathbf{N}_-$  будут содержать только нулевые элементы.

Используя блочную форму записи матриц и возможность отображения графа в виде дерева и набора хорд, матрицу контуров,  $\mathbf{N}_-$  можно представить состоящей из двух матриц:

- матрицы  $\mathbf{N}_{\alpha_-}$ , соответствующей ветвям дерева графа;
- матрицы  $\mathbf{N}_{\beta_-}$ , соответствующей хордам графа.

$$\mathbf{N}_- = \mathbf{N}_{\alpha_-} \mathbf{N}_{\beta_-} \quad (3.5)$$

При представлении матрицы контуров  $\mathbf{N}_-$  в виде (3.5) рекомендуется следующий порядок нумерации ветвей графа:

- нумеруются ветви дерева. Каждой ветви дерева присваивается номер её конечного узла
- хорды графа нумеруются в той же последовательности как пронумерованы соответствующие л.з.н. контуры графа

Кроме того, направления обхода л.з.н. контуров должны совпадать с направлениями соответствующих хорд анализируемого графа. При этом целесообразно так выбирать л.з.н. контуры, чтобы каждая из хорд графа входила бы только в один л.з.н. контур.

#### Раздел 4. Матричная форма записи уравнений состояния электрической сети

##### Тема 4.1. Формирование матричных уравнений состояния электрической сети

Совместное применение первой и второй матриц инцидентий позволяет однозначно описать схему электрической сети и в последующем провести расчет установившегося режима.

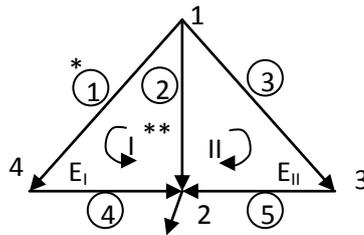


Рис.4.1 Ориентированный граф участка электрической сети

\* - нумерация ветвей;

\*\* - нумерация линейных замкнутых независимых контуров.

На рисунке 4.1 приведен граф участка электрической сети, на котором произвольно выбрано направление ветвей и направление обхода линейных замкнутых независимых контуров.

В соответствии с I законом Кирхгофа для графа электрической сети (рис. 4.1) и содержащего 4 узла ( $i=1, \dots, 4$ ), можно записать следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} i=1: & I_1 + I_2 + I_3 + 0 + 0 = 0 \\ i=2: & 0 + I_2 + 0 - I_4 - I_5 = J_2 \\ i=3: & 0 + 0 - I_3 + 0 + I_5 = 0 \\ i=4: & -I_1 + 0 + 0 + I_4 + 0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Перепишем систему уравнений (4.1) в матричном виде:

$$\mathbf{U}_{\Sigma} \times \mathbf{I}_- = \mathbf{J}_- \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) представляет матричную форму записи уравнения состояния для электрических схем, содержащих только источники тока.

Применив для графа (рис. 4.1), содержащего два линейных замкнутых независимых контура, II закон Кирхгофа, получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} U_1 - U_2 + 0 + U_4 + 0 = E_I & (\text{контур I}) \\ 0 - U_2 + U_3 + 0 + U_5 = E_{II} & (\text{контур II}) \end{cases} \quad (4.3)$$

Перепишем систему уравнений (4.3) в матричном виде.

$$\bar{V} \times \bar{V} = \bar{E} \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) представляет **матричную форму записи уравнения состояния для электрических схем**, содержащих только источники напряжения.

Используя закон Ома и блочную форму записи матриц уравнения (4.2) и (4.4) можно представить в следующем виде.

$$\begin{bmatrix} M_{\Sigma} \\ N \cdot Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Выражение (4.5) является **обобщенным уравнением состояния электрической сети** и позволяет **осуществить расчет электрических схем, содержащих как источники тока, так и источники напряжения**, т.е. любой электрической схемы

#### Тема 4.2. Расчет режима электрической сети, содержащей только источники тока

При расчётах режимов электрических сетей могут иметь место два случая:

**1. Схема замещения электрической сети не содержит замкнутых контуров.** Граф такой сети образует дерево. Матрица соединений для дерева  $\bar{M}_{\Sigma\alpha}$  является квадратной и имеет обратную. Поэтому в рассматриваемом случае узловое уравнение можно непосредственно использовать для определения матрицы токов ветвей. То есть, оно может быть использовано для вычисления токов:

$$\bar{I} = \bar{M}_{\Sigma\alpha}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} J \\ E_0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Здесь матрица  $\bar{I}_0 = \bar{M}_{\Sigma\alpha}^{-1}$  определяет распределение токов в разомкнутой схеме в виде дерева и называется **матрицей коэффициентов распределения токов для разомкнутой схемы**. Её строки соответствуют ветвям схемы, а столбцы - независимым узлам. Каждый столбец  $i$  матрицы определяет путь графа от узла  $I$  до узла баланса схемы. Коэффициенты распределения тока могут иметь одно из трёх значений  $+I, -I, 0$ . Положительная единица в столбце  $i$  означает, что соответствующая ветвь входит в состав данного пути с тем же направлением, а отрицательная единица – с противоположным. Нуль показывает, что данная ветвь не входит в состав данного графа. Каждый путь графа в этом случае соответствует пути прохождения рассматриваемого заданного тока от соответствующего узла к узлу баланса. Матрица  $\bar{I}_0$  может быть составлена непосредственно по схеме, и наоборот, по известной матрице  $\bar{I}_0$  разомкнутая схема может быть восстановлена.

Матрица напряжений на ветвях связана с матрицей токов в ветвях уравнением (1.14). Учитывая, что в рассматриваемом случае ЭДС в ветвях отсутствует, напряжения на ветвях определяются из уравнения следующим образом:

$$\bar{V}_e = \bar{V} = \bar{Z}_e \cdot \bar{I} \quad (4.7)$$

Во многих случаях расчёта узловые напряжения целесообразно определять относительно базисного узла. При этом узловые напряжения  $U_{\Delta}$  определяют суммарные падения напряжения от каждого из независимых узлов схемы до базисного узла. Эти значения отличаются от напряжений относительно нейтрали  $U_E$  на величину напряжения базисного узла:

$$U_E = U_{\Delta} + U_{\sigma}$$

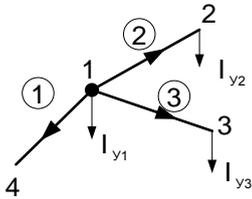
Матрица узловых напряжений в разомкнутой схеме  $\bar{V}_{\Delta\alpha}$  может быть определена по матрице коэффициентов распределения для токов  $\bar{I}_0$  и матрице напряжений на ветвях,  $U_e$ :

$$\bar{V}_{\Delta\alpha} = \bar{M}_{\alpha\alpha} \cdot \bar{V}_e = \bar{F}_{0\alpha} \cdot \bar{V}_e \quad (4.8)$$

Следовательно, матрица  $\bar{F}_{0\alpha}$  применима и для нахождения узловых напряжений. Это объясняется тем, что столбцы матрицы  $\bar{F}_{0\alpha}^T$  - определяют пути графа, по которым происходит суммирование напряжений на ветвях при получении узловых напряжений относительно базисного узла.

Таким образом, для рассмотренного случая режим может быть рассчитан по выражениям (4.6) – (4.8).

**Пример 4.1.** Найти токи в ветвях разомкнутой электрической сети (рис. 4.2), используя матричную форму записи I закона Кирхгофа при известной матрице токов нагрузок узлов,  $\bar{I}_y$



$$\mathbf{I}_y = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 + j5 \\ 5 + j5 \end{bmatrix};$$

Рис. 4.2. Схема электрической сети

Решение: Из выражения (4.6) определяем токи в ветвях схемы,  $I$

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{V}$$

Матрица задающих токов  $\mathbf{I}$  равна матрице токов нагрузок  $\mathbf{I}_y$ , взятой с противоположным знаком:

$$\mathbf{I} = -\mathbf{I}_y$$

Матрица коэффициентов распределения токов в разомкнутой схеме  $\mathbf{F}_0$  находится непосредственно по заданной схеме в соответствии с изложенным выше правилом:

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Правильность записи  $\mathbf{F}_0$  может быть проверена путём умножения её на матрицу  $\mathbf{A}_{\Sigma\alpha}$ . Их произведение, в соответствии с определением обратной матрицы, должно быть равно единичной матрице.

$$\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{A}_{\Sigma\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Следовательно,

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{I}_y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 10 + j5 \\ 5 + j5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 + j10 \\ 10 + j5 \\ 5 + j5 \end{bmatrix}$$

**2. Схема замещения электрической сети содержит замкнутые контуры.** Предположим, что известна матрица узловых напряжений  $\mathbf{V}_\alpha$ . Тогда матрица напряжений на ветвях, представляющая собой разности потенциалов между вершинами соответствующих ветвей, может быть определена путём умножения матрицы  $\mathbf{V}_\Delta$  на транспонированную матрицу соединений  $\mathbf{A}_{\Sigma}^T$ :

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{A}_{\Sigma}^T \cdot \mathbf{V}_\Delta \quad (4.9)$$

Применение матрицы  $\mathbf{A}_{\Sigma}^T$  в данном случае возможно, т.к. её строки определяют узлы, являющиеся начальными и конечными вершинами каждой ветви. Используя уравнения (1.14) и (4.4), можно получить уравнение, связывающее матрицу узловых напряжений  $\mathbf{V}_\Delta$  с матрицей токов в ветвях:

$$\mathbf{A}_{\Sigma}^T \cdot \mathbf{V}_\Delta = \mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{I}$$

Это уравнение можно решить относительно матрицы токов  $\mathbf{I}$ , т.к. матрица  $\mathbf{Z}_B$  является квадратной и неособенной.

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_\alpha = \mathbf{A}_{\Sigma}^T \cdot \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{E}$$

Здесь  $\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{Z}_B^{-1}$  - матрица проводимостей ветвей.

Поскольку в рассматриваемом случае ЭДС в ветвях отсутствует, это выражение можно упростить:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{\Sigma}^T \cdot \mathbf{V}_\alpha$$

С учётом последнего выражения узловое уравнение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{I}_y^- = \mathbf{M}_\Sigma^- \cdot \mathbf{I}_\Sigma^- \cdot \mathbf{K}_e^- \cdot \mathbf{M}_\Sigma^{-T} \cdot \mathbf{V}_\Delta^- \cdot \mathbf{K}_y^- \cdot \mathbf{V}_\Delta^- \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) является матричным узловым уравнением для сложной схемы электрической сети, не содержащей ЭДС в ветвях. Матрица

$$\mathbf{K}_y^- = \mathbf{M}_\Sigma^- \cdot \mathbf{K}_e^- \cdot \mathbf{M}_\Sigma^{-T}$$

называется **матрицей узловых проводимостей** схемы. Она представляет собой матрицу коэффициентов узловых уравнений и является квадратной, симметричной и неособенной. На её главной диагонали расположены суммарные значения проводимостей всех ветвей, соединённых с соответствующим узлом схемы, а на пересечении строки  $i$  и столбца  $j$  – проводимость ветви с вершинами  $i$  и  $j$  – взятая с обратным знаком. Без учёта взаимных сопротивлений матрица  $\mathbf{K}_y^-$  может быть составлена непосредственно по заданной схеме. И, наоборот, по известной матрице  $\mathbf{K}_y^-$  можно составить схему замещения.

Для схемы без взаимных сопротивлений узловое уравнение (4.10) позволяет определить матрицу  $\mathbf{V}_\Delta^-$  по матрице задающих токов,  $\mathbf{I}_y^-$

$$\mathbf{V}_e^- = \mathbf{K}_y^- \cdot \mathbf{I}_y^- \cdot \mathbf{K}_y^- \quad (4.11)$$

Матрица

$$\mathbf{K}_y^- = \mathbf{K}_y^-$$

называется **матрицей узловых сопротивлений**. По аналогии с матрицей  $\mathbf{K}_y^-$ , она также является квадратной, симметричной и неособенной. На её главной диагонали расположены собственные сопротивления  $z_{ii}$  схемы, т.е. эквивалентное сопротивление между базисным и каждым из независимых узлов. На пересечении строки  $i$  и столбца  $j$  находится взаимное для узлов  $i$  и  $j$  сопротивление  $z_{ij}$  относительно базисного узла.

Собственное сопротивление  $z_{ii}$  определяет напряжение  $U_i$  между  $i$ -м и базисным узлами схемы, обусловленное задающим током  $J_i$  узла  $i$ . Взаимное сопротивление  $z_{ij}$  определяет напряжение  $U_i$  между  $j$ -м и базисным узлами, обусловленное задающим током  $J_i$  узла  $i$  или напряжением  $U_i$  между  $i$ -м и базисным узлами, обусловленное задающим током  $J_j$  узла  $j$ .

**Пример 4.2.** Найти узловые напряжения в схеме, приведённый на рис. 4.3. Сопротивления ветвей схемы равны:

$$z_{e1} = 1 \text{ Ом}; z_{e2} = 2 \text{ Ом}; z_{e3} = 1 \text{ Ом}; z_{e4} = 4 \text{ Ом}; z_{e5} = 5 \text{ Ом}.$$

$$\text{Токи нагрузок равны: } I_{y1} = 2 \text{ А}; I_{y2} = 1 \text{ А}; I_{y3} = 3 \text{ А}.$$

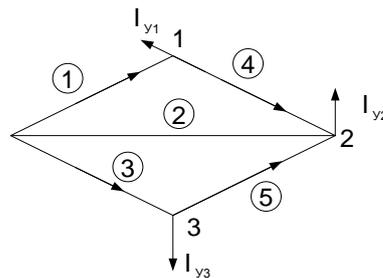


Рис. 4.3. Схема электрической сети

*Решение:* Поскольку ЭДС ветвей отсутствует, то для определения узловых напряжений может быть использовано матричное уравнение  $\mathbf{V}_e^- = \mathbf{K}_y^- \cdot \mathbf{I}_y^- \cdot \mathbf{K}_y^-$

Составим матрицу сопротивлений ветвей схемы

$$\mathbf{K}_e^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

Эта матрица имеет диагональную форму, поэтому

$$\mathbf{Y}_e = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{vmatrix}$$

Матрица узловых проводимостей  $\mathbf{Y}_y$  может быть определена непосредственно по схеме замещения:

$$\mathbf{Y}_e = \begin{vmatrix} (1+0,25) & -0,25 & 0 \\ -0,25 & (0,5+0,25+0,25) & -0,25 \\ 0 & -0,25 & (1+0,25) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,25 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & 1,0 & -0,25 \\ 0 & -0,25 & 1,25 \end{vmatrix}$$

в качестве базисного принят четвёртый узел.

Зная матрицу  $\mathbf{Y}_y$ , найдём обратную матрицу  $\mathbf{Z}_y$ , используя выражение для вычисления членов обратной матрицы:

$$a_{ij}^{-1} = \frac{1}{D} M_{ji} \cdot (-1)^{(i+j)}$$

Предварительно вычислим определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1,25 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & 1 & -0,25 \\ 0 & -0,25 & 1,25 \end{vmatrix} = 1,25 \cdot 1 \cdot 1,25 - (-0,25)(-0,25) \cdot 1,25 -$$

$$- (-0,25)(-0,25) \cdot 1,25 = 1,562 - 0,0782 - 0,0763 = 1,406$$

Для матрицы третьего порядка

$$\mathbf{Z}_y = \mathbf{Y}_y^{-1} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1,406} \begin{vmatrix} 1,1875 & 0,312 & 0,0625 \\ 0,312 & 1,562 & 0,312 \\ 0,0625 & 0,312 & 0,846 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,846 & 0,222 & 0,0445 \\ 0,222 & 1,112 & 0,222 \\ 0,0445 & 0,222 & 0,846 \end{vmatrix}$$

Определим матрицу  $\mathbf{V}_e$

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{Z}_y \cdot \mathbf{Y}_e = \begin{vmatrix} 0,846 & 0,222 & 0,445 \\ 0,222 & 1,112 & 0,222 \\ 0,0445 & 0,222 & 0,846 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,048 \\ -2,222 \\ 2,851 \end{vmatrix}$$

### Тема 4.3. Расчет режима электрической сети, содержащей только источники напряжения

Если применение узловых уравнений было удобно при отсутствии в схеме ЭДС., то применение контурных уравнений получается более простым при отсутствии в схеме задающих токов. При расчёте методом контурных токов считают, что в каждом независимом контуре схемы течёт свой контурный ток  $I_k$ . Уравнения составляются относительно контурных токов. Их число равно числу независимых контуров схемы.

Искомыми переменными в этом методе являются контурные токи. При этом токи ветвей схемы определяются как алгебраическая сумма токов контуров, к которым относятся каждая из рассматриваемых ветвей. Эта операция может быть выполнена путём умножения транспонированной второй матрицы инцидентий  $\mathbf{N}_-^T$  на матрицу контурных токов  $\mathbf{I}_k$ :

$$\mathbf{I}_- = \mathbf{N}_-^T \cdot \mathbf{I}_k \quad (4.12)$$

Действительно, каждая строка  $i$  матрицы  $\mathbf{N}_-^T$  содержит единицы в тех местах, которые имеют номера контуров, содержащих ветвь  $i$ . Знак при каждой единице показывает, совпадает ли направление в ветви с

направлением обхода соответствующего контура или противоположно ему. Поэтому матрица  $\mathbf{N}_{\beta}^T$  и обеспечивает суммирование контурных токов для каждой ветви схемы.

При разделении в равенстве (4.11) матриц  $\mathbf{I}_{\beta}$  и  $\mathbf{N}_{\beta}^T$  на блоки с учётом того, что  $\mathbf{N}_{\beta}^T = \mathbf{N}_{\beta}^T$ , получается:

$$\mathbf{I}_{\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha} \\ \mathbf{I}_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\alpha} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I}_{\beta}$$

или отдельно для дерева

$$\mathbf{I}_{\alpha} = \mathbf{N}_{\alpha} \cdot \mathbf{I}_{\beta}$$

и для хорд  $\mathbf{I}_{\beta} = \mathbf{I}_{\beta}$

Следовательно, для определения токов во всех ветвях схемы достаточно найти только контурные токи, которые (при принятых условиях) совпадают с токами в хордах схемы. Этим, в частности, и объясняется приведённая ранее рекомендация о выборе независимых контуров схемы и их нумерации.

Из контурных уравнений следует, что:

$$\mathbf{N}_{\beta} \cdot \mathbf{I}_{\beta} = \mathbf{N}_{\beta} \cdot \mathbf{N}_{\alpha} \cdot \mathbf{I}_{\beta} = \mathbf{N}_{\beta} \cdot \mathbf{E}_{\beta} = \mathbf{E}_{\beta}$$

Отсюда можно записать:

$$\mathbf{E}_{\beta} = \mathbf{Z}_{\beta} \cdot \mathbf{I}_{\beta} \quad (4.13)$$

Матрица

$$\mathbf{Z}_{\beta} = \mathbf{N}_{\beta} \cdot \mathbf{Z}_{\beta} \cdot \mathbf{N}_{\beta}^T$$

называется **матрицей контурных сопротивлений**. Она является квадратной, симметричной, неособенной, порядка  $k$ . По главной диагонали это и матрицы расположены собственные сопротивления  $z_{ii}$  независимых контуров  $i$ , а на пересечении строки  $i$  и столбца  $j$  находится взаимное сопротивление  $z_{ij}$  для контуров  $i$  и  $j$ .

Уравнение (4.13) позволяет по известной матрице контурных ЭДС определить матрицу контурных токов.

$$\mathbf{I}_{\beta} = \mathbf{Z}_{\beta}^{-1} \cdot \mathbf{E}_{\beta} \quad (4.14)$$

Матрица

$$\mathbf{Y}_{\beta} = \mathbf{Z}_{\beta}^{-1} = \mathbf{N}_{\beta} \cdot \mathbf{Y}_{\beta} \cdot \mathbf{N}_{\beta}^T$$

называется **матрицей контурных проводимостей**. По аналогии с матрицей  $\mathbf{Z}_{\beta}$  она также является квадратной, симметричной, неособенной. По главной диагонали этой матрицы размещены собственные проводимости  $y_{ii}$  контуров  $i$ , на пересечении строки  $i$  и столбца  $j$  – взаимные проводимости  $y_{ij}$  для контуров  $i$  и  $j$ . Собственная проводимость  $y_{ii}$  контура  $i$  определяет контурный ток  $I_{ki}$  контура  $i$ , обусловленный контурной ЭДС,  $E_{ki}$  того же контура. Взаимная проводимость  $y_{ij}$  определяет контурный ток  $I_{kj}$  контура  $j$ , обусловленный контурной ЭДС,  $E_{ki}$  контура  $i$ , или контурный ток  $I_{ki}$  контура  $i$ , обусловленный контурной ЭДС,  $E_{kj}$  контура  $j$ .

Таким образом, при расчёте режима электрической сети в рассматриваемом случае первоначально из уравнения (4.13) определяют контурные токи, а затем из уравнения (4.12) – токи в ветвях. Матрица напряжений на ветвях схемы  $\mathbf{V}_{\beta}$  может быть определена из уравнения (3.1). Матрица узловых напряжений  $\mathbf{U}_{\Delta}$  определяется в данном случае по выражению:

$$\mathbf{U}_{\Delta} = \mathbf{M}_{\alpha}^T \cdot \mathbf{V}_{\beta} = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{V}_{\beta} \quad (4.15)$$

Последнее уравнение получено из соотношения (4.9) при разделении его на блоки, соответствующие дереву и хордам схемы:

$$\mathbf{V}_{\beta} = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha} \\ U_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\alpha}^T \\ M_{\beta} \end{bmatrix} \mathbf{U}_{\Delta}$$

Отсюда получается:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\alpha\alpha} &= \mathbf{M}_{\alpha}^T \mathbf{U}_{\Delta} \\ \mathbf{U}_{\alpha\beta} &= \mathbf{M}_{\beta} \mathbf{U}_{\Delta} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Так как матрица  $\mathbf{M}_{\alpha}^{-T}$  является квадратной и неособенной, то уравнение (4.15) может быть разрешено относительно узловых напряжений, что и сделано в уравнении (4.14). Следовательно, достаточно знать напряжения в ветвях дерева схемы, чтобы определить напряжения всех узлов схемы относительно базисного узла.

#### Тема 4.4. Расчет режима электрической сети, содержащей источники тока и напряжения

Определение параметров режима сети в данном случае может быть произведено методом контурных токов. При этом в качестве искоемых неизвестных выбираются контурные токи. Их число равно числу независимых контуров схемы.

При решении задачи распределение задающих токов  $\mathbf{J}$  по ветвям схемы выбирается произвольным, но таким образом, чтобы оно удовлетворяла первому закону Кирхгофа. Второй закон Кирхгофа при таком распределении задающих токов, как правило, не выполняется, т.е. возникает небаланс напряжений по независимым контурам схемы. Небаланс напряжений устраняется с помощью контурных токов, величина которых определяется как небалансом напряжений, возникшим вследствие произвольного распределения задающих токов, так и контурных ЭДС.

Ток в каждой ветви и соответственно матрицу токов в ветвях схемы можно представить состоящими из двух слагаемых:

$$\mathbf{I}_{-} = \mathbf{I}'_{-} + \mathbf{I}''_{-} \quad (4.17)$$

Первое слагаемое связано с задающими токами  $\mathbf{J}_{-}$  и соответствует первому закону Кирхгофа:

$$\mathbf{M}_{-} \cdot \mathbf{I}'_{-} = \mathbf{J}_{-}$$

Второе слагаемое связано с контурными токами, и его величина может быть определена в соответствии с (4.12) из выражения:

$$\mathbf{I}''_{-} = \mathbf{N}_{-}^T \cdot \mathbf{I}_k \quad (4.18)$$

Так как контурные токи не связаны непосредственно с задающими токами схемы, то слагаемое  $\mathbf{I}''_{-}$  также удовлетворяет первому закону Кирхгофа:

$$\mathbf{M}_{-} \cdot \mathbf{I}''_{-} = \mathbf{M}_{-} \cdot \mathbf{N}_{-}^T \cdot \mathbf{I}_k = \mathbf{0}_{-}$$

Для упрощения решения предполагают, что хорды отсутствуют. При этом считается, что задающие токи распределяются только по ветвям дерева схемы. В этом случае матрица токов в ветвях дерева схемы, вызванных задающими токами, может быть определена из уравнения (4.6):

$$\mathbf{I}'_{\alpha} = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{J}_{-}$$

а матрица токов в хордах схемы, в соответствии с принятым выше предположением, равна нулевой.

$$\mathbf{I}_{\beta} = \mathbf{0}_{-}$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{I}_{-}$  может быть определена непосредственно из следующего уравнения:

$$\mathbf{I}_{-} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_{-} \quad (4.19)$$

Действительные токи в ветвях получаются только после суммирования токов  $\mathbf{I}'_{-}$  с контурными токами  $\mathbf{I}_k$ . Из (4.17), (4.18) и (4.19) следует, что матрица токов  $\mathbf{I}_{-}$  должна иметь следующий вид:

$$\mathbf{I}_{-} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I}_{-} + \mathbf{N}_{-}^T \cdot \mathbf{I}_k$$

или, после разделения на блоки получают обобщённые уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\alpha} &= \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{I}_{-} + \mathbf{N}_{\alpha}^T \cdot \mathbf{I}_k \\ \mathbf{I}_{\beta} &= \mathbf{N}_{\beta}^T \cdot \mathbf{I}_k \end{aligned} \quad (4.20)$$

Если принять (как это было рекомендовано выше), что каждая хорда входит только в один контур, то  $\mathbf{N}_{\beta} = \mathbf{N}_{\beta}^T = 1$  и, следовательно

$$\mathbf{I}'_{\beta} = \mathbf{I}'_k, \quad (4.21)$$

т.е. токи в хордах равны соответствующим контурным токам.

Для определения матрицы контурных токов необходимо применить второе уравнение состояния. В общем виде уравнение контурных токов имеет следующий вид:

$$\mathbf{I}'_k = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{I}' + \mathbf{I}'_h \cdot \mathbf{E}' \quad (4.22)$$

где  $\mathbf{F}_k$  - матрица коэффициентов распределения токов, определяемая следующим выражением

$$\mathbf{F}_k = -\mathbf{N}' \cdot \mathbf{E}'_b \cdot \mathbf{N}'^T \cdot \mathbf{N}' \cdot \mathbf{E}'_b \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

При выбранном распределении задающих токов по ветвям дерева коэффициенты этой матрицы определяют контурные токи, устраняющие небаланс напряжений в независимых контурах схемы.

Матрица проводимостей  $\mathbf{Y}'_k$ , связывающая ЭДС ветвей с контурными токами записывается как

$$\mathbf{Y}'_k = \mathbf{N}' \cdot \mathbf{E}'_b \cdot \mathbf{Y}' \cdot \mathbf{N}'^T \cdot \mathbf{N}' \cdot \mathbf{E}'_b \cdot \mathbf{Y}'_k \cdot \mathbf{N}'$$

На базе уравнения (4.21) формируется принцип наложения применительно к контурным токам. Таким образом, при принятых условиях матрица контурных токов представляется в виде двух слагаемых, определяемых матрицами параметров  $\mathbf{F}_k$  и  $\mathbf{Y}'_k$ .

Описанный выше путь расчёта токов в ветвях схемы является достаточно рациональным, т.к. требует определения обратной матрицы порядка  $k$ . Этот путь расчёта может быть применён также и в том случае, когда схема содержит активные параметры только в виде задающих токов.

Таким образом, в рассматриваемом случае при расчёте режима электрической сети первоначально из уравнения (4.22) вычисляются контурные токи, а затем из уравнений (4.20) и (4.21) – токи в ветвях схемы. Матрица напряжений на ветвях схемы  $\mathbf{V}'_a$  может быть определена из уравнения (4.6), а матрица узловых напряжений  $\mathbf{V}'_{\Delta}$  - из уравнения (4.15).

#### Тема 4.5. Независимые параметры режима

В ряде случаев можно существенно упростить решение уравнений состояния в общем виде, а также уменьшить объём вычислительной работы на СВТ путём выделения в этих уравнениях независимых величин. В частности, можно определить некоторые полезные для практического применения соотношения между параметрами режима работы схемы, если использовать разделение матриц  $\mathbf{M}'_{\Sigma}$  и  $\mathbf{N}'$  на блоки  $\mathbf{M}'_{\Sigma\alpha}$ ,  $\mathbf{N}'_{\alpha}$ , соответствующие дереву, и  $\mathbf{M}'_{\Sigma\beta}$ ,  $\mathbf{N}'_{\beta}$  - хордам схемы.

##### *Независимые токи ветвей*

Можно показать, что нет надобности в определении токов всех ветвей схемы путём совместного решения уравнений, т.к. все эти токи, при известных задающих токах в узлах схемы, являются взаимно независимыми.

Действительно, узловое уравнение (4.2) при разделении матриц  $\mathbf{M}'_{\Sigma}$  и  $\mathbf{N}'$  на блоки можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{M}'_{\Sigma\alpha} \cdot \mathbf{I}'_{\Sigma\alpha} + \mathbf{M}'_{\Sigma\beta} \cdot \begin{bmatrix} I'_{\alpha} \\ I'_{\beta} \end{bmatrix} = \mathbf{I}'$$

или после выполнения операции умножения

$$\mathbf{M}'_{\Sigma\alpha} \cdot \mathbf{I}'_{\alpha} + \mathbf{M}'_{\Sigma\beta} \cdot \mathbf{I}'_{\beta} = \mathbf{I}'$$

Поскольку матрица  $\mathbf{M}'_{\Sigma\alpha}$  является квадратной, неособенной, то можно произвести почленное умножение полученного уравнения на обратную матрицу  $[\mathbf{M}'_{\Sigma\alpha}]^{-1}$ :

$$\mathbf{I}'_{\alpha} = [\mathbf{M}'_{\Sigma\alpha}]^{-1} \cdot \mathbf{I}' + \mathbf{M}'_{\Sigma\beta} \cdot \mathbf{I}'_{\beta} \quad (4.23)$$

Это означает, что путём совместного решения уравнений достаточно определить только токи в хордах, чтобы затем, пользуясь формулой (4.22), можно было определить токи во всех остальных ветвях схемы.

Это положение имеет достаточно простое объяснение. При известных значениях токов хорд каждая хорда может быть заменена двумя задающими токами, равными по величине и противоположными по направлению. При этом в конечной вершине каждой их хорд задающий ток должен приниматься с тем же знаком, что и ток в ветви, а в начальной вершине – с противоположным. Тогда все хорды могут быть исключены из схемы.

Остаётся только дерево схемы, токи в ветвях которого определяются непосредственно, без совместного решения какой-либо системы уравнений.

Таким образом, полученный результат говорит о том, что токи в ветвях дерева являются зависимыми от токов в хордах схемы. Следовательно, независимыми для любой схемы являются только токи в хордах.

#### **Независимые падения напряжения в ветвях**

Аналогичный вывод о взаимной зависимости можно сделать и для значений падения напряжений на ветвях схемы. Если в уравнении (4.9) произвести разделение матриц  $\mathbf{M}_{\Sigma}^T$  и  $\mathbf{V}_{\sigma}$  на блоки

$$\begin{bmatrix} M_{\Sigma\alpha} \\ M_{\Sigma\beta} \end{bmatrix}^T \mathbf{V}_{\Delta} = \begin{bmatrix} U_{\sigma\alpha} \\ U_{\sigma\beta} \end{bmatrix}$$

и произвести умножение, то можно получить следующие два матричных уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\Sigma\alpha}^T \mathbf{V}_{\Delta} &= \mathbf{V}_{\sigma\alpha} \\ \mathbf{M}_{\Sigma\beta}^T \mathbf{V}_{\Delta} &= \mathbf{V}_{\sigma\beta} \end{aligned}$$

Поскольку  $\mathbf{M}_{\alpha}$  квадратная и неособенная матрица, то из первого уравнения путём умножения на обратную матрицу можно получить:

$$\mathbf{V}_{\Delta} = \mathbf{M}_{\alpha}^{-T} \mathbf{V}_{\sigma\alpha} = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{V}_{\sigma\alpha} \quad (4.24)$$

Подставив полученное выражение для  $\mathbf{V}_{\Delta}$  во второе уравнение, можно выразить  $\mathbf{V}_{\sigma\beta}$  через матрицу  $\mathbf{V}_{\sigma\alpha}$ :

$$\mathbf{V}_{\sigma\beta} = \mathbf{M}_{\beta}^T \mathbf{V}_{\Delta} = \mathbf{M}_{\beta}^T \cdot \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{V}_{\sigma\alpha} \quad (4.25)$$

Из (4.25) следует, что достаточно знать падения напряжения на ветвях дерева схемы, чтобы определить напряжения на всех остальных ветвях.

Последнее объясняется тем, что текущий режим схемы полностью определяется значениями падений напряжения, входящими в матрицу  $\mathbf{V}_{\Delta}$ . Для определения матрицы  $\mathbf{V}_{\Delta}$  можно воспользоваться выражением (4.23). Падение напряжения на любой ветви схемы может быть получено как разность потенциалов между её начальной и конечной вершинами. При этом равным нулю может быть принят потенциал любой точки схемы, в том числе и базисного узла. Следовательно, падение напряжения на хорде, включённой между узлами  $i$  и  $j$  схемы, может быть определено как разность падений напряжения между её соответствующими узлами и базисным узлом:

$$U_{ij} = U_{i0} - U_{j0}$$

т.е. через элементы матрицы  $\mathbf{V}_{\sigma}$ .

Таким образом, полученный результат говорит о том, что число взаимно независимых падений напряжений на ветвях любой схемы равно числу независимых узлов схемы.

#### **Тема 4.6. Обобщенные параметры режима**

Преобразование уравнений состояния сложных схем показывает, что наряду с «натуральными» параметрами схем, к примеру, сопротивлениями ветвей часто целесообразно применять так называемые **обобщённые параметры**.

Обобщёнными могут быть как активные, так и пассивные параметры схемы. К обобщённым активным параметрам схемы относится, в частности, матрица контурных ЭДС.  $\mathbf{E}_k$ :

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}$$

Контурные ЭДС не являются заданными. Они получаются после выбора независимых контуров.

Значительно больший интерес для выполнения практических расчётов имеют обобщённые пассивные параметры схем. Они входят, например, в матрицу узловых проводимостей  $\mathbf{Y}_y$ , матрицу узловых сопротивлений  $\mathbf{Z}_y$ , матрицу коэффициентов распределения токов  $\mathbf{F}$  и т.д. Эти параметры характеризуют свойства схемы в целом, не отражая отдельных параметров элементов схемы. По обобщённым параметрам нельзя полностью восстановить исходную схему. Одним и тем же обобщённым параметрам могут соответствовать разные схемы.

Применение обобщённых параметров в сложных схемах замещения даёт возможность упростить математическую запись уравнений состояния и тем самым облегчить исследование свойств электрических сетей. Они обеспечивают достаточно простую связь искомым параметров через натуральные пассивные параметры схемы. В табл. 4.1. приведены формулы для расчёта основных обобщённых параметров схем и выражения, в которых они применяются при расчётах. Очевидно, что помимо приведённых в таблице, могут применяться и другие обобщённые параметры.

Необходимо помнить, что применение обобщённых параметров позволяет при использовании различных СВТ существенно облегчить решение задач. Особенно большой эффект получается при их применении в тех случаях, когда требуется выполнить целый ряд расчётов по одной и той же схеме замещения. Тогда дополнительная работа по определению обобщённых параметров окупается тем упрощением, которое обеспечивается их многократным применением при выполнении расчётов.

Таблица 4.1.

Обобщённые параметры схем

Обобщённый параметр	Матрица	Определяемая зависимость	Расчётная формула
Коэффициенты распределения токов разомкнутой схемы в виде дерева	$\mathbf{F}_0^-$	$\mathbf{I}_\alpha^- = \mathbf{F}_0^- \cdot \mathbf{I}^-$	$\mathbf{F}_0^- = \mathbf{M}_{\Sigma\alpha}^{-1}$
Коэффициенты распределения токов (задающих)	$\mathbf{F}^-$	$\mathbf{I}^- = \mathbf{F}^- \cdot \mathbf{I}_\alpha^-$ , при $\mathbf{E}^- = \mathbf{E}^-$	$\mathbf{F}^- = \mathbf{M}_{\Sigma}^- \cdot \mathbf{K}_B^- \cdot \mathbf{K}_y^-$
Коэффициенты распределения для напряжения (ЭДС)	$\mathbf{P}^-$	$\mathbf{U}_\Delta^- = \mathbf{P}^- \cdot \mathbf{E}^-$ , при $\mathbf{I}^- = \mathbf{I}^-$	$\mathbf{P}^- = -\mathbf{E}^{-T*}$
Узловые проводимости	$\mathbf{K}_y^-$	$\mathbf{I}^- = \mathbf{K}_y^- \cdot \mathbf{U}_\Delta^-$ , при $\mathbf{E}^- = \mathbf{E}^-$	$\mathbf{K}_y^- = \mathbf{M}_{\Sigma}^- \cdot \mathbf{K}_B^- \cdot \mathbf{M}_{\Sigma}^{-T}$
Узловые сопротивления	$\mathbf{K}_y^-$	$\mathbf{U}_\Delta^- = \mathbf{K}_y^- \cdot \mathbf{I}^-$ , при $\mathbf{E}^- = \mathbf{E}^-$	$\mathbf{K}_y^- = \mathbf{K}_y^{-1}$
Контурные сопротивления	$\mathbf{K}_k^-$	$\mathbf{E}_k^- = \mathbf{K}_k^- \cdot \mathbf{I}_k^-$ , при $\mathbf{I}^- = \mathbf{I}^-$	$\mathbf{K}_k^- = \mathbf{N}^- \cdot \mathbf{K}_B^- \cdot \mathbf{N}^{-T}$
Контурные проводимости (собственные и взаимные)	$\mathbf{K}_k^-$ $\mathbf{K}_h^-$	$\mathbf{I}_k^- = \mathbf{K}_k^- \cdot \mathbf{E}_k^-$ , при $\mathbf{I}^- = \mathbf{I}^-$ $\mathbf{I}_h^- = \mathbf{K}_h^- \cdot \mathbf{E}^-$ , при $\mathbf{I}^- = \mathbf{I}^-$	$\mathbf{K}_k^- = \mathbf{K}_k^{-1}$ $\mathbf{K}_h^- = \mathbf{K}_k^- \cdot \mathbf{N}^-$
Собственный и взаимные проводимости ветвей	$\mathbf{K}^-$	$\mathbf{I}^- = \mathbf{K}^- \cdot \mathbf{E}^-$ , при $\mathbf{I}^- = \mathbf{I}^-$	$\mathbf{K}^- = \mathbf{N}^- \cdot \mathbf{K}_k^- \cdot \mathbf{N}^{-T}$

## Раздел 5. Уравнение установившегося режима электрической сети

### Тема 5.1. Задачи расчета установившегося режима

Расчёты установившихся режимов составляют существенную часть общего объёма исследований ЭЭС, выполняемых как на стадии проектирования, так и в процессе эксплуатации этих систем. Такие расчёты необходимы при выборе конфигурации схемы электрической системы и параметров ее элементов, анализе устойчивости и оценке токов к.з., определении наиболее экономичных режимов ее работы и т.д. Кроме того, расчеты установившихся режимов имеют и большое самостоятельное значение, так как позволяют ответить на ряд практически важных вопросов, а именно:

- **данный режим осуществим, т.е. возможна передача требуемой мощности от источников электроэнергии к потребителям (нагрузке);**
- **допустимость токов, протекающих по элементам электрической системы;**
- **узловые напряжения сети не выходят за заданные пределы.**

В классической постановке задачи расчёта установившегося режима заданными считаются инъекции в узлах (кроме одного, называемого **балансирующим**) и модуль и фаза напряжения одного узла, называемого **базисным** [10,11]. Необходимо найти модули и фазы напряжения во всех узлах, а затем уже, зная  $\delta_i$ ,  $U_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), (где  $n$  – число узлов), определить перетоки по всем связям и по сумме перетоков – мощности инъекции балансирующего узла.

При других вариантах расчёта установившегося режима заданными могут быть не все инъекции, а лишь те, где нет генерации активной или реактивной мощности. Меньшее, по сравнению с вектором состояния сети, число заданных переменных,  $q$  определяет число степеней свободы,  $p$  для изменения режима:

$$p = 2n \cdot q$$

В связи с вышеизложенным, одна из первоочередных задач при расчёте установившегося режима – выделение наиболее полной системы уравнений. Как правило, при традиционной постановке эта задача, как будет показано ниже, решается почти автоматически выбором базисного и балансирующих узлов.

### Тема 5.2. Вектор состояния и базис установившегося режима

Для однозначного определения параметров установившегося режима необходимо ввести дополнительные условия, например, условие оптимальности режима. Так скажем, среди всех возможных значений параметров режима выбрать такие, которые минимизируют издержки  $L$  на производство электроэнергии

$$\min L(\omega; y; s) \quad (5.1)$$

где  $d$  – заданные параметры режима;  $s$  – параметры режима, которые могут быть вычислены по заданным  $d$  и выбранным  $y$  из уравнений установившегося режима:

$$\omega(\omega; y; d) = 0,$$

Вектор  $y$  называют **вектором независимых переменных**, а  $s$  – **вектором зависимых переменных**.

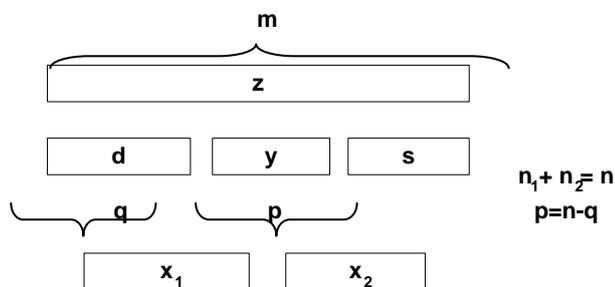


Рис. 5.1. Структура векторов параметров режима

Под **вектором состояния** (в.с.),  $x$  будем понимать такой набор параметров режима, знание которого позволяет рассчитать все остальные параметры режима.

Компоненты в.с. могут являться как компонентами вектора  $d$ , заданными в условиях задачи компонентами  $y$ , так и компонентами вектора  $s$ , полученными в результате расчёта по заданным  $y, d$ . Например, напряжения и фазы некоторых узлов, задаваемые в качестве исходных данных, или независимых параметров, могут входить в состав в.с.  $x$ . Рассмотрим общую структуру разделения переменных по векторам (диаграмма рис. 5.1).

Те компоненты вектора  $x$ , которые заданы (т.е. входят в  $d$  и  $y$ ), обозначим через  $x_1$ ; те же, что должны быть найдены (т.е. входят в  $s$ ), определим как  $x_2$ .

В состав вектора  $y$  можно ввести те параметры схемы сети (рис. 5.2), которые можно менять в процессе эксплуатации, увеличивая число степеней свободы при управлении, например, регулируемые коэффициенты трансформации трансформаторов, ёмкости конденсаторных батарей, сопротивления (за счёт отключения линий, параллельных цепей, шунтов и т.д.)

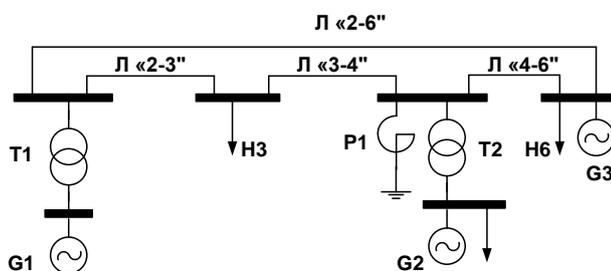


Рис. 5.2. Фрагмент схемы системы

1-й в.с.:  $\delta_1, U_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4, P_5, Q_5, P_6, Q_6$ ;

2-й в.с.:  $\delta_1, Q_1, P_2, U_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4, P_5, Q_5, P_6, Q_6$ ;

3-й в.с.:  $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \delta_3, U_3, P_{3-4}, Q_{3-4}, P_4, Q_4, P_5, Q_5, P_6, Q_6$ ;

4-й в.с.:  $\delta_1, U_1, \delta_2, U_2, \delta_3, U_3, \delta_4, U_4, \delta_5, U_5, \delta_6, U_6$ ;

Нетрудно видеть, что первый вариант в.с. соответствует традиционной постановке задачи потокораспределения: во всех узлах, кроме одного, балансирующего (в данном случае 1-го), заданы инъекции узлов, а также модуль напряжения и фаза в одном из узлов – базисном (здесь узел 1). Во втором варианте уже несколько узлов имеют заданное напряжение  $\langle U_2, U_5 \rangle$  и зафиксирована фаза  $\delta_1$ , не совпадающая со значениями фазы заданного напряжения, т.е. базисные узлы по фазе и по модулю напряжения различны. Третий вариант уже включает в состав заданных величин перетоки по связям  $\langle P_{3-4}, Q_{3-4} \rangle$ . Наконец, четвёртый вариант состоит из модулей и фаз напряжений отдельных узлов электрической сети.

Следует отметить, что из-за различной трудоёмкости вычисления остальных параметров режима, не вошедших в в.с., эти варианты далеко не равноценны. Так, при заданных модулях и фазах напряжений узлов легко – по явным выражениям (2.24), (2.28) и (2.29) – вычисляются токи, перетоки мощностей в связях, затем по известным токам и перетокам по связям из (2.22) и (2.23) определяются инъекции в узлах. Если потребовать знания не только инъекций, но и их разделение на генерацию и нагрузку, то одна из этих величин (генерация или нагрузка) должна войти в в.с. для определения другой. Часто это обеспечивается тем, что априори известно, что в узле нет генерации ( $P_{Gi} = 0, Q_{Gi} = 0$ ). Тождественно равные нулю параметры режима можно не вводить в в.с., считая их константами. Но задание в.с. набором модулей и фаз напряжений – не единственный способ обойтись без решения систем уравнений при расчёте режима. Так, пусть для схемы (рис. 5.2) в.с. задан в следующем составе:

$$x = \langle U_1, \delta_1, P_{G1}, Q_{G1}, P_{2-3}, Q_{2-3}, P_3, Q_3, P_{4-6}, Q_{4-6} \rangle,$$

Тогда, сначала, зная  $U_1, \delta_1, P_{ci}$  и  $Q_{ci}$  и учитывая, что  $P_{G2} = P_{G1}$  и  $Q_{G2} = Q_{G1}$ , можно рассчитать мощности  $P_{21}, Q_{21}$ , напряжение  $U_2$  и угол  $\delta_2$  в узле 2 по общим выражениям вида:

$$U_j = \sqrt{\left( U_i - \frac{Q'_{ij} x_{ij}}{U_i} \right)^2 + \left( \frac{P'_{ij} r_{ij}}{U_i} \right)^2} \quad (5.2)$$

$$\delta_j = \delta_i + \arctg \frac{P'_{ij} z_{ij}}{U_i^2 + Q'_{ij} x_{ij}} \quad (5.3)$$

где

$$P'_{ij} = P_{ij} - U_i^2 g_{ij} \quad (5.4)$$

$$Q'_{ij} = Q_{ij} - U_i^2 b_{ij} \quad (5.5)$$

Далее величины  $P'_{ji}$  и  $Q'_{ji}$  можно рассчитать по формулам (2.28) и (2.29) или воспользоваться соотношениями:

$$P'_{ji} = -P'_{ij} + \frac{\langle U_j^2 \rangle + \langle U_i^2 \rangle}{U_i^2} r_{ij};$$

$$P_{ji} = P'_{ji} - U_j^2 g_{ij} \quad (5.6)$$

$$Q'_{ji} = -Q'_{ij} + \frac{\langle U_j^2 \rangle + \langle U_i^2 \rangle}{U_i^2} x_{ij};$$

$$Q_{ji} = Q'_{ji} - U_j^2 b_{ij} \quad (5.7)$$

При этом считается, что мощность, вытекающая из узла – положительная, втекающая – отрицательная.

В рассматриваемом примере, найдя  $U_2$  и  $\delta_2$  и зная  $P_{23}$  и  $Q_{23}$ , можно по (5.2)-(5.7) найти  $U_3, \delta_3, P_{3-4}$  и  $Q_{3-4}$ ; затем зная  $P_3$  и  $Q_3$ , из баланса в узле 3 определить  $P_{3-4}, Q_{3-4}, P_{5-4}, Q_{5-4}$ , инъекции узла 5 и далее  $P_{6-4}, Q_{6-4}, \delta_5, U_5$ , зная  $U_2, \delta_2$  и  $U_6, \delta_6$ , определяют  $P_{2-6}, Q_{2-6}, P_{6-2}, Q_{6-2}, P_6, Q_6$ . Как видим, ни разу не потребовалось решать систему уравнений. В данном примере не все соотношения между параметрами режима использованы. Выбраны только те, что позволяют вычислить неизвестный параметр режима на основе уже известных. Как было показано в примере, такая возможность определяется в первую очередь имеющимся базисом и во вторую – выбором независимой системы уравнений из всех возможных соотношений системы

уравнений установившегося режима вида (2.31). Именно второй фактор даёт некоторую свободу выбора для уменьшения трудоёмкости при расчёте установившегося режима.

В рамках выражения (5.1) критерием  $L$  могут быть потери мощности в сетях. Кроме того, в качестве дополнительных условий, ограничивающих выбор режима, возможную область принятия решений, выступают так называемые ограничения в виде неравенств:

$$z_{\min} \leq z \leq z_{\max} \quad (5.8)$$

требующие, чтобы в процессе эксплуатации параметры режима находились в допустимых пределах по условиям надёжности и соблюдения качества электроснабжения. Заметим, что не при любых  $d$  может быть найден режим, обеспечивающий условия (5.8). В частности, ограничения (5.8) могут оказаться несогласованными или, как говорят математики, несовместимыми. Например, для схемы (рис. 5.3), где вектор  $d = \langle U_2, Q_2, P_3, Q_3 \rangle$ , а вектор  $x = \langle U_2, \delta_2, U_3, \delta_3 \rangle$ , вектор  $y = \langle U_1 \rangle$ , имеются такие  $Q_2$  и  $Q_3$ , при которых может не существовать напряжение  $U_1$ , когда одновременно обеспечиваются условия:

$$U_{2\min} \leq U_2 \leq U_{2\max};$$

$$U_{3\min} \leq U_3 \leq U_{3\max};$$

Возможна ситуация, когда незаданность параметров режима определяется не наличием степеней свободы, а отсутствием информации, скажем, просто нет измерений нагрузок или других параметров режима. В этом случае часть параметров не может быть рассчитана по известным данным, и становится **ненаблюдаемой**. Так, если для схемы (рис. 5.3) заданы  $U_1, \delta_1, U_2, \delta_2$ , но неизвестна нагрузка  $P_3$  и  $Q_3$ , то  $P_3$  и  $Q_3$  невозможно определить. Выделение тех параметров, которые могут быть дорассчитаны по имеющейся информации, и тех, которые остаются неизвестными, называется **задачей определения наблюдаемости сети**.

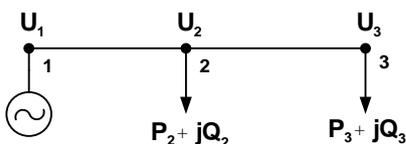


Рис. 5.3. Схема ЭЭС

Отсутствие возможности рассчитать параметры теряет смысл сохранения в расчётной схеме соответствующей части сети. Так, при заданной информации  $U_1, \delta_1, U_2, \delta_2$  расчётная схема сети будет состоять только из двух узлов, а в узле 2 будет инъекция, равная сумме нагрузки узла 2 и перетока 2-3. *Минимальное количество данных о параметрах режима, необходимое для однозначного определения всех остальных параметров режима, называется в теории наблюдаемости базисом*. Нетрудно видеть, что любой базис может быть вектором состояния, и наоборот, любой вектор состояния является базисом. Однако имеет смысл различать эти понятия, так как понятие в.с. связано, в основном, с координатами решения задачи. В.с. является, как правило, вектором неизвестных параметров, который определяется по исходным данным, в то время как **базис – это фиксированные параметры режима, задаваемые в качестве исходных данных**.

Поскольку все параметры режима, в том числе и базис - это функции в.с., то уравнения установившегося режима можно представить наряду с (5.2) в виде:

$$\bar{z}_\delta - z_\delta \langle \mathbf{U}_2 \rangle = 0 \quad (5.9)$$

где  $\bar{z}_\delta$  - заданное значение вектора базисных переменных,  $z_\delta \langle \mathbf{U}_2 \rangle$  - известные функции вектора базисных переменных от неизвестных компонент вектора состояния  $x_2$ . Например, если в качестве базиса («традиционная постановка») выбраны инъекции узлов, а в.с. – модули и фазы напряжений узлов, то приходим к уравнениям вида:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_i - P_i \langle \mathbf{U}, \delta \rangle &= 0 \\ \bar{Q}_i - Q_i \langle \mathbf{U}, \delta \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \\ i = 1, \dots, n$$

где функции  $P_i \langle \mathbf{U}, \delta \rangle, Q_i \langle \mathbf{U}, \delta \rangle$  определяются зависимостями из (2.20), (2.27) и (2.28).

$$P_i = \sum_{j \in \omega_i} P_i \langle U_i, \delta_i, U_j, \delta_j \rangle \\ Q_i = \sum_{j \in \omega_i} Q_i \langle U_i, \delta_i, U_j, \delta_j \rangle$$

Понятно, что в общем случае в базисе могут быть заданы перетоки, например, когда используется уравнение для активного перетока:

$$\bar{P}_{ij} - P_{ij} \langle U_i, \delta_i, U_j, \delta_j \rangle = 0$$

а также для напряжения

$$\bar{U}_i - U_i = 0$$

В качестве компонент вектора базиса могут выступать и функции от параметров режима, например, сумма перетоков по связям, соединяющим две подсистемы (рис. 5.4). Здесь в качестве элемента базиса может выступать суммарный переток  $P_{I-II}$ :

$$\bar{P}_{I-II} - P_{14} \langle U_1, U_4 \rangle - P_{25} \langle U_2, U_5 \rangle - P_{36} \langle U_3, U_6 \rangle = 0$$

Если в качестве исходных данных выступает набор параметров, число компонент которого больше базисного, то возникающая при этом система уравнений

$$z - z \langle \epsilon_2 \rangle = 0 \quad (5.10)$$

является переопределённой, т.е. число уравнений больше числа неизвестных.

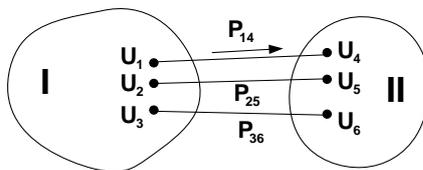


Рис. 5.4. Объединение двух подсистем

Если из всего вектора  $Z$  выделить базисный состав и разделить систему уравнений (5.10) на две подсистемы, то получим:

$$Z_6 - Z_6 \langle \epsilon_2 \rangle = 0 \quad (5.11a)$$

$$Z_n - Z_n \langle \epsilon_2 \rangle = 0 \quad (5.11b)$$

где  $\bar{Z}_n$  - не вошедшие в базис, но заданные переменные. Поскольку  $x_2$  уже может быть вычислен из (5.9), то в общем случае разность  $\bar{Z}_n - Z_n \langle \epsilon_2 \rangle = 0$  может быть не равна нулю. Поскольку в принципе  $Z_6$  и  $Z_n$  равноправны, то следует как-то минимизировать разность между вычисленными и заданными значениями вектора  $Z$ , соответственно невязки возникнут как в (5.11a), так и в (5.11b). Чем больше несогласованность в задании исходных данных, тем больше будут эти невязки. Поэтому избыточную систему (5.11b) можно назвать подсистемой контрольных уравнений:

$$\bar{Z}_n - Z_n \langle \epsilon_2 \rangle = 0$$

имея в виду, что по ней контролируется согласованность задания исходных данных. В общем случае контрольным будет любое уравнение, которое является линейно независимым и в которое входят только заданные переменные и переменные, вычисленные из других уравнений. Идеология контрольных уравнений имеет большое значение при проверке достоверности (достоверизации) исходных данных.

## Тема 5.2. Вектор состояния и базис установившегося режима

В общем случае уравнения установившегося режима (УУР) электрической системы трехфазного тока, связывающие мощности, задающие токи и напряжения узлов, при отсутствии ЭДС в ветвях схемы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{S}_y = 3 \cdot \dot{U}_{ij} \cdot \hat{I} \\ Y_y (\dot{U} - U_{баз}) = \hat{I} \end{cases} \quad (5.12)$$

где  $\dot{S}$  - вектор мощностей источников или потребителей, подсоединенных к узлам схемы замещения электрической системы;  $U_{ij} = \text{diag}(\dot{U}_j)$  - диагональная матрица напряжений в узлах схемы замещения;  $\dot{U}_{баз}$  - вектор - столбец, каждый элемент которого равен напряжению в базисном узле;  $\dot{U}$  - вектор - столбец напряжений в узлах схемы;  $\hat{I}$  - вектор - столбец комплексно - сопряженных величин задающих токов в узлах.

Из многих возможных способов описания установившегося режима наиболее простой и легко реализуемой на ПЭВМ – **система уравнений узловых напряжений (УУН)**.

Процесс формирования системы УУН рассмотрим на примере схемы (рис. 5.5).

Первоначально распишем, задающие токи, причем нагрузочные токи должны быть со знаком “+”, а генераторные со знаком “-”.

$$\begin{cases} -I_{31} - I_{12} = -I_1 \\ I_{12} + I_{32} - I_{24} = I_2 \\ I_{31} - I_{32} = -I_3 \\ I_{24} = I_4 \end{cases} \quad (5.13)$$

Если в системе (5.13) токи в ветвях по закону Ома выразить через проводимости ветвей и разность узловых напряжений

$$I_{ij} = Y_{ij}(\dot{U}_i - \dot{U}_j),$$

то можно записать

$$\begin{cases} -Y_{31}(\dot{U}_1 - \dot{U}_3) - Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = -I_1; \\ Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + Y_{32}(\dot{U}_3 - \dot{U}_2) - Y_{24}(\dot{U}_2 - \dot{U}_4) = I_2 \\ Y_{31}(\dot{U}_1 - \dot{U}_3) - Y_{32}(\dot{U}_3 - \dot{U}_2) = -I_3 \\ Y_{24}(\dot{U}_2 - \dot{U}_4) = I_4 \end{cases} \quad (5.14)$$

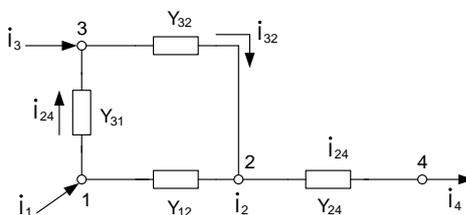


Рис.5.5 Фрагмент участка электрической сети.

$I_i, (i=1,2,3,4)$  – задающие токи в узлах, причем  $I_2, I_4$  – нагрузочные токи (вытекают из узла), а  $I_1, I_3$  – генераторные токи (втекают в узел);  $I_{ij}$  – токи в ветвях схемы, где  $i, j$  – номера узлов в начале и конце ветви;  $Y_{ij}$  – проводимость ветви ( $i-j$ ).

Перегруппировав члены в уравнениях (5.14), получим систему:

$$\begin{cases} \dot{U}_1(-Y_{31} - Y_{12}) + \dot{U}_2 Y_{12} + \dot{U}_3 Y_{31} = -I_1 \\ \dot{U}_1 Y_{12} + \dot{U}_2(-Y_{12} - Y_{32} - Y_{24}) + \dot{U}_3 Y_{32} + \dot{U}_4 Y_{24} = I_2 \\ \dot{U}_3(-Y_{31} - Y_{32}) + \dot{U}_1 Y_{31} + \dot{U}_2 Y_{32} = -I_3 \\ \dot{U}_2 Y_{24} + \dot{U}_4(-Y_{24}) = I_4 \end{cases} \quad (5.15)$$

Анализ уравнений (5.15) позволяет сформулировать свойства УУН:

1. В правую часть уравнений входит задающий ток с соответствующим знаком: со знаком “-” – генераторный, со знаком “+” – нагрузочный.

2. В качестве неизвестных в  $i$ -е уравнение (уравнение записанное для узла  $i$ ) входят напряжение узла  $i (U_i)$  и напряжения узлов, непосредственно связанных с узлом  $i (U_j)$ . Коэффициент при  $\dot{U}_i$  в  $i$ -м уравнении равен сумме собственных проводимостей ветвей, подходящих к этому узлу, взятой с обратным знаком.

3. Коэффициенты при напряжениях остальных узлов в уравнении ( $\dot{U}_j$ ) равны взаимным проводимостям ветвей, соединяющих, к примеру узел  $j$  с узлом  $i (Y_{ij})$ .

4. Как следует из первого закона Кирхгофа для схемы электрической сети сумма левых частей всех уравнений системы (5.15) равна нулю. Такая система уравнений имеет бесконечное множество решений, поскольку одно уравнение является линейной комбинацией других. Чтобы избавиться от линейной зависимости, в данной системе исключают одно уравнение. Как отмечалось выше, узел для которого исключено уравнение, является, **балансирующим**. В рассматриваемом примере исключим четвертое уравнение. Тогда в (5.15) останется три уравнения с четырьмя неизвестными. В этом случае также нет однозначного решения, поэтому в одном из узлов, принятого за базисный, задается значение напряжения.. Как правило

базисные и балансирующие узлы совпадают. Здесь и в дальнейшем этому узлу присваивается последний порядковый номер  $(n+1)$ , где  $n$  – число узлов без базисного (балансирующего).

Для схемы (рис.5.5),  $n=3$ , балансирующим является узел 4. С учетом вышесказанного для этой схемы система (5.15) примет вид.

$$\begin{cases} \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{U}_2 + \underline{Y}_{13} \dot{U}_3 = -\dot{I}_1 \\ \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{U}_2 + \underline{Y}_{23} \dot{U}_3 = \dot{I}_2 - \underline{Y}_{24} \dot{U}_4 \\ \underline{Y}_{31} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{32} \dot{U}_2 + \underline{Y}_{33} \dot{U}_3 = -\dot{I}_3 \end{cases}$$

Таким образом, можно сформулировать **правила формирования системы УУН**:

1. Исходная система содержит  $n$  уравнений, где  $n$  – число узлов в электрической сети без базисного.
2. Уравнение узла  $i$  системы УУН включает напряжение  $U_i$  и напряжения узлов  $j$ , непосредственно связанных с узлом  $i$ .
3. Коэффициент  $\underline{Y}_{ii}$  при напряжении  $\dot{U}_i$  равен сумме проводимостей всех ветвей, присоединенных к узлу, взятой с обратным знаком.
4. Коэффициент  $\underline{Y}_{ij}$  при напряжении  $\dot{U}_j$  равен проводимостям соответствующих ветвей.
5. Напряжение базисного узла  $U_\sigma$ , считается заданным и члены, зависящие от  $U_\sigma$ , переносятся в правую часть.

Приведем различные формы записи УУН

• **Линейные уравнения в форме баланса токов.**

То, как формируется такие уравнения, уже было показано. Рассмотрим особенности записи этих уравнений для электрической сети постоянного и переменного токов.

а) для сети постоянного тока

$$Y_{ii} U_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} U_j = \tilde{I}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.16)$$

где

$$Y_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \underline{Y}_{ij},$$

$$\tilde{I}_i = I_i + Y_{i\sigma} U_\sigma;$$

б) для сети переменного трехфазного тока (учитываются комплексные величины токов, напряжений, проводимостей):

$$Y_{ii} \dot{U}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} \dot{U}_j = \tilde{I}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.17)$$

где

$$Y_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \underline{Y}_{ij},$$

$$\tilde{I}_i = \dot{I}_i + Y_{i\sigma} \dot{U}_\sigma;$$

В этих выражениях  $\dot{U}_i$  - линейные напряжения,  $i_i = \sqrt{3} \dot{I}_{i\phi}$ , где  $\dot{I}_{i\phi}$  - фазный ток.

**Пример 5.1.** Записать в матричном виде линейную систему УУН для сети переменного тока (рис. 5.6).

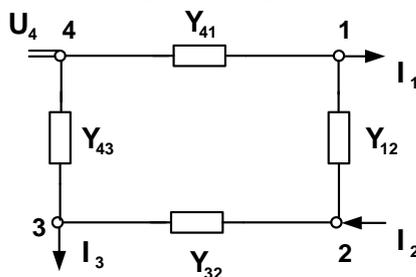


Рис. 5.6. Тестовая схема

*Решение.* Приведем матричную форму записи УУН

$$Y \dot{U} = \dot{I}$$

Представим матрицу узловых проводимостей:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ 0 & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} Y_{11} &= -Y_{12} + Y_{14} \\ Y_{22} &= -Y_{21} + Y_{23} \\ Y_{33} &= -Y_{32} + Y_{34} \end{aligned}$$

Вектора напряжений и токов

$$U = \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} \dot{I}_1 - Y_{14}U_4 \\ -\dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 - Y_{32}U_4 \end{pmatrix}$$

• **Нелинейные уравнения в форме баланса токов**

Нелинейные уравнения отличаются от (5.16) и (5.17) своими правыми частями. В новых уравнениях токи узлов расписываются через мощности – величины, поддающиеся измерению с помощью приборов, установленных в узлах ЭЭС, а именно:

а) для сети постоянного тока.

$$Y_{ii}U_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij}U_j = \frac{P_i}{U_i} - Y_{i\sigma}U_\sigma, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.18)$$

где  $P_i = U_i \cdot I_i$ , мощность узла  $i$ .

б) для сети переменного трехфазного тока.

$$Y_{ii}\dot{U}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij}\dot{U}_j = \frac{\dot{S}_i}{U_i} - Y_{i\sigma}\dot{U}_\sigma, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.19)$$

где  $\dot{S}_i$  - сопряженное выражение для трехфазной мощности.

$$\underline{\dot{S}}_i = \sqrt{3} \hat{I}_{i\phi} \dot{U}_i, \quad \text{отсюда} \quad \hat{I}_{i\phi} = \frac{\dot{S}_i}{\sqrt{3}\dot{U}_i} \quad (5.20)$$

УНН для сети переменного тока в линейной и нелинейной формах можно записать в прямоугольной системе координат. Для этого необходимо расписать комплексные величины  $\dot{U}, \dot{I}, \underline{\dot{Y}}, \underline{\dot{S}}$  в алгебраической форме (например,  $\dot{U}_i = U'_i + U''_i$ ) и подставить эти выражения в (5.17) и (5.19), а затем провести все преобразования по правилам действия с комплексными числами, подробно представленным в первой главе настоящего пособия.

• **Нелинейные уравнения в форме баланса мощности**

а) для сети постоянного тока

$$Y_{ii}U_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij}U_jU_i = P_i - Y_{i\sigma}U_\sigma U_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.21)$$

б) для сети переменного тока

$$Y_{ii}\dot{U}_i\hat{U}_i + \hat{U}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij}\dot{U}_j = \hat{S}_i - Y_{i\sigma}\dot{U}_\sigma\hat{U}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.22)$$

Систему (5.22) можно записать в прямоугольной и полярной системах координат, используя правила действий с комплексными числами.

Перечислим особенности использования системы УНН в качестве математической модели установившегося режима.

1. Система УНН, может быть записана в линейной и нелинейной форме как баланс токов и как баланс мощностей, соответственно.
2. Количество уравнений узловых напряжений равно  $n$ , где  $n$  - число узлов без балансирующего.
3. Количество уравнений для сети переменного тока в прямоугольной системе координат равно  $2n$ .
4. Анализ установившегося режима электрической системы заключается в решении УНН при различных заданных параметрах режима.
5. Из-за большого объема решаемой задачи (в реальной электрической сети число узлов достигает  $1000 \div 3000$ ) для анализа необходимо использовать матричные формы записи УНН.

**Раздел 6. Методы расчета установившегося режима**

1. Как отмечалось выше, для расчёта установившегося режима, электрическая сеть представляется в виде линейной схемы замещения, конфигурацию которой можно отобразить матрицами инцидентий.

2. Исходными данными о нагрузках электрических систем обычно служат значения активных и реактивных мощностей ( $P_{Hi} + jQ_{Hi} = S_{Hi}$ ) потребителей, которые могут приниматься постоянными ( $S_{Hi} = \text{const}$ ), либо зависящими от напряжения в точке подключения потребителя к сети, т.е.  $S_{Hi} = f U_{Hi}$ . Исходными данными об источниках питания, как правило, служат выдаваемые генераторами в электрическую сеть активные мощности ( $P_{Gi} = \text{const}$ ) и абсолютные значения напряжения в точках подключения ( $|U_{Gi}| = \text{const}$ ). Хотя в ряде случаев источники питания, аналогично потребителям, могут быть заданы постоянными значениями активных и реактивных мощностей ( $P_{Gi} = \text{const}, Q_{Gi} = \text{const}$ ). Кроме того, один из источников как правило, наиболее мощная электрическая станция, играющий роль *балансирующего (базисного, опорного)* узла задаётся комплексным значением напряжения ( $U_{баз} = \text{const}$ ).

При таких исходных данных целью расчёта установившегося режима в общем случае является определение мощностей и токов в ветвях схемы замещения и комплексных значений напряжений в её узловых точках. С математической точки зрения, вследствие нелинейной зависимости от тока и напряжения, задача сводится к решению *системы нелинейных алгебраических уравнений (НАУ)*.

В общем случае УУР электрической системы трёхфазного тока, связывающие мощности, задающие токи и напряжения узлов, при отсутствии ЭДС в ветвях схемы имеют вид:

$$\dot{S}_y = 3\dot{U}_{ij}\hat{I} \quad Y_y \dot{U} - \dot{U}_{баз} = \dot{I}$$

где  $\dot{S}_y$  - вектор-столбец мощностей источников или потребителей подсоединённых к узлам схемы замещения электрической системы;  $\dot{U}_{ij} = \text{diag } U_j$  - диагональная матрица напряжений в узлах схемы замещения;  $U$  - вектор-столбец напряжений в узлах схемы;  $U_{баз}$  - вектор-столбец, каждый элемент которого равен напряжению в базисном узле;  $I$  - вектор-столбец комплексно-сопряжённых величин задающих токов в узлах;  $Y_y$  - матрица полных проводимостей узла

При заданных мощностях узлов решение систем как **линейных УУР**, так и систем **нелинейных УУР** может быть осуществлён различными методами [7, 8].

При расчётах установившегося режима часто используют систему ЛАУ, описывающую анализируемый режим работы электрической сети. Когда же при расчётах установившегося режима необходимо использовать нелинейную модель, то для решения такой системы на каждом шаге итерационного процесса чаще всего также применяется система ЛАУ. Другими словами, исходная система нелинейных алгебраических уравнений линеаризуется.

## Тема 6.1. Методы расчёта систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима

### 6.1.1 Прямые методы расчета установившегося режима

Лекция проводится в интерактивной форме: лекция-беседа, лекция с разбором конкретных ситуаций (2 часа).

Методы решения систем ЛАУ установившегося режима можно разделить на две большие группы: **прямые** и **итерационные** [8].

К **прямым** относят методы, позволяющие получить решение с помощью конечного числа арифметических операций, зависящего только от вычислительной схемы, порядка и структуры матрицы коэффициентов системы уравнений. Методы этой группы часто называют **точными**, поскольку если исходные данные заданы точно и вычисления проводятся корректно, то и решение получается точным. К ним, в частности, относят **метод Гаусса** и **метод матрицы Z**.

#### Метод Гаусса

Метод Гаусса использует матричную форму записи УНН в форме баланса токов.

$$[Y_y] \cdot U = \sqrt{3} \cdot [I \ U] - Y_{баз} \cdot U_{баз}$$

где  $k$ -тый элемент вектор - столбца левой части определяется как:

$$\sqrt{3}I_k U^i - Y_{кбаз} \cdot U_{кбаз}$$

и решение системы ЛАУ осуществляется в виде:

$$Y_y U^{(i+1)} = \sqrt{3}I(U^{(i+1)}) - Y_{баз} \cdot U_{баз} \quad (6.1)$$

На каждом шаге итерационного процесса по Гауссу обычно решается не комплексная система вида (6.1), а система действительных уравнений:

$$\begin{vmatrix} G_y & B_y \\ -B_y & G_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_a^{(i+1)} \\ U_r^{(i+1)} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \begin{vmatrix} I_a(U^{(i)}) \\ I_r(U^{(i)}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -g_{\bar{a}a3} & U_{\bar{a}a3} \\ b_{\bar{a}a3} & U_{\bar{a}a3} \end{vmatrix} \quad (6.2)$$

Систему (6.2) можно решить, выделив в ней действительные и мнимые части, т.е.

$$Y_y = G_y - jB_y$$

$$\dot{U}^{(i+1)} = \dot{U}_a^{(i+1)} + j\dot{U}_r^{(i+1)}$$

$$\dot{i}(U^{(i)}) = \dot{i}_a(U^{(i)}) + j\dot{i}_r(U^{(i)})$$

**Пример 6.1.** Определить по методу Гаусса напряжения в узлах электрической сети (рис 6.1) для следующей системы ЛАУ.

$$\left. \begin{aligned} 0.0945U_{r2} - 0.0345U_{r3} + 0.0338U_{a2} - 0.0138U_{a3} &= 2.5624 \\ -0.0345U_{r2} + 0.0912U_{r3} - 0.0138U_{a2} + 0.0271U_{a3} &= 1.1096 \\ 0.0338U_{r2} - 0.0138U_{r3} - 0.1145U_{a2} + 0.0345U_{a3} &= -4.7575 \\ -0.0138U_{r2} + 0.0271U_{r3} + 0.0345U_{a2} - 0.1112U_{a3} &= -2.8606 \end{aligned} \right\}$$

Расчёт выполнить с двойной машинной точностью ( $\epsilon=0,0001$ ).

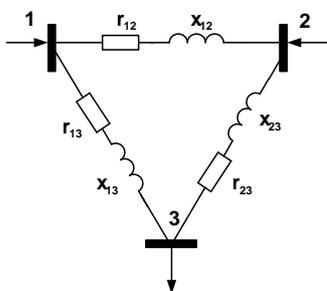


Рис. 6.1. Схема замещения трёхузловой сети с активно-индуктивными связями

*Решение.*

После исключения  $U_{r2}$  получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} U_{r2} - 0.3651U_{r3} + 0.3577U_{a2} - 0.1460U_{a3} &= 27.1153 \\ 0.0786U_{r3} - 0.0015U_{a2} + 0.0220U_{a3} &= 2.0451 \\ 0.0026U_{r3} - 0.0127U_{a2} + 0.0394U_{a3} &= -5.6740 \\ 0.0221U_{r3} + 0.0394U_{a2} - 0.1132U_{a3} &= -2.4864 \end{aligned} \right\}$$

Далее последовательно исключив неизвестное  $U_{r3}$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} U_{r2} - 0.3651U_{r3} + 0.3576U_{a2} - 0.1460U_{a3} &= 27.1153 \\ U_{r3} + 0.0186U_{a2} + 0.2807U_{a3} &= 26.0172 \\ -0.1261U_{a2} + 0.0321U_{a3} &= -6.3541 \\ 0,0399U_{a2} - 0,1139U_{a3} &= -2.3462 \end{aligned} \right\}$$

Затем, исключая  $U_{a2}$ , приведём систему уравнений к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\left. \begin{aligned} U_{r2} - 0.4631U_{r3} + 0.4537U_{a2} - 0.1852U_{a3} &= 34.3946 \\ U_{r3} + 0.0186U_{a2} + 0.2807U_{a3} &= 26.0172 \\ U_{a2} - 0.2545U_{a3} &= 50.3877 \\ -0.1038U_{a3} &= -4.3540 \end{aligned} \right\}$$

Решая полученную систему, найдём значения неизвестных (табл. 6.1):

Таблица 6.1.

Параметры исходной системы

Параметр	Расчёт, кВ
$U_{a2}$	41.9534

$U_{a3}$	61,0669
$U_{r2}$	17,0137
$U_{r3}$	15,3767

### Метод матрицы Z

Итерационный процесс с помощью матрицы Z определяется комплексным выражением:

$$\dot{U}^{(i+1)} = \dot{U}_{\text{баз}} + \sqrt{3}Z_y \cdot \dot{I}(\dot{U}^{(i)})$$

либо заменив эквивалентным ему действительным выражением:

$$\begin{pmatrix} U_a^{(i+1)} \\ U_r^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{a\text{б}} \\ U_{r\text{б}} \end{pmatrix} + \sqrt{3} \begin{pmatrix} G_y & B_y \\ -B_y & G_y \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_a(U^{(i)}) \\ I_r(U^{(i)}) \end{pmatrix}$$

**Пример 6.2.** Определить напряжения узлов для схемы рис. 6.1 по следующим исходным данным методом матрицы Z. Схема состоит из трёх ЛЭП, генераторных узлов 1, 2 и нагрузочного узла 3. Сопротивления линий следующие:  $Z_{12} = 10 + j20$  Ом;  $Z_{13} = 15 + j30$  Ом;  $Z_{23} = 10 + j25$  Ом. Узел 1 принят в качестве балансирующего и базового, его напряжение  $U_1 = U_6 = 115$  кВ. Заданные токи в узлах 2 и 3 соответственно равны:

$$J_3 = J_{a3} + jJ_{r3} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-0.4199 + j0.2099) \text{ кА};$$

$$J_2 = J_{a2} + jJ_{r2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (0.2624 + j0.1575) \text{ кА}$$

*Решение.* Для решения задачи используем следующее выражение для нахождения активных и реактивных составляющих узловых напряжений

$$\begin{pmatrix} U_a \\ U_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{a\text{б}} \\ U_{r\text{б}} \end{pmatrix} + \sqrt{3} \begin{pmatrix} G_y & B_y \\ -B_y & G_y \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} J_a \\ J_b \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где  $U_{a\text{б}}$  и  $U_{r\text{б}}$  - векторы, каждый элемент которых равен  $U_{a\text{б}}$  или  $U_{r\text{б}}$ , т.е. активной и реактивной составляющей  $U_6$

Перепишем выражение (6.3) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} B_y & G_y \\ G_y & -B_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_r \\ U_a \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} J_a \\ J_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -g_{k6} U_6 \\ b_{k6} U_6 \end{pmatrix}$$

Используя метод Гаусса получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 0.0945U_{r2} - 0.0345U_{r3} + 0.0338U_{a2} - 0.0138U_{a3} &= 2.5624 \\ -0.0345U_{r2} + 0.0912U_{r3} - 0.0138U_{a2} + 0.0271U_{a3} &= 1.1096 \\ 0.0338U_{r2} - 0.0138U_{r3} - 0.1145U_{a2} + 0.0345U_{a3} &= -4.7575 \\ -0.0138U_{r2} + 0.0271U_{r3} + 0.0345U_{a2} - 0.1112U_{a3} &= -2.8606 \end{aligned} \right\}$$

Исходя из этого, запишем матрицу проводимостей:

$$\begin{pmatrix} G_y & B_y \\ -B_y & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0945 & -0.0345 & 0.0338 & -0.0138 \\ -0.0345 & 0.0912 & -0.0138 & 0.0271 \\ 0.0338 & -0.0138 & -0.1145 & 0.0345 \\ -0.0138 & 0.0271 & 0.0345 & -0.1112 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица,  $Y^{-1}$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} B_y & G_y \\ G_y & -B_y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 14,6714 & 7,9953 & 7,1491 & 4,4623 \\ 7,9953 & 18,0109 & 4,2623 & 8,5753 \\ 7,1491 & 4,2623 & -14,6714 & -7,9953 \\ 4,2623 & 8,5753 & -7,9953 & -18,0109 \end{pmatrix}$$

Составляющие напряжений по выражению, аналогичному (6.3), равны:

$$\begin{pmatrix} U_{r2} \\ U_{r3} \\ U_{a2} \\ U_{a3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 115 \\ 115 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14,6714 & 7,9953 & 7,1491 & 4,4623 \\ 7,9953 & 18,0109 & 4,2623 & 8,5753 \\ 7,1491 & 4,2623 & -14,6714 & -7,9953 \\ 4,2623 & 8,5753 & -7,9953 & -18,0109 \end{pmatrix} x$$

$$x \begin{pmatrix} 0,2624 \\ -0,4199 \\ -0,1575 \\ 0,2099 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,0138 \\ 15,3766 \\ 41,9534 \\ 61,0669 \end{pmatrix}$$

Окончательно, получим  $U_{a2}=41,9534$  кВ;  $U_{r2}=17,0138$  кВ;  $U_{a3}=61,0699$  кВ;  $U_{r3}=-15,3766$  кВ

### 6.1.2. Итерационные методы расчёта установившегося режима

Под **итерационными** понимаются расчётные методы последовательного приближения к истинному решению. **Итерационные методы** решения систем ЛАУ позволяют получить значения искоемых неизвестных в результате многократного выполнения единообразных шагов вычислений, называемых последовательными **приближениями** или **итерациями**.

Необходимо подчеркнуть, что итерационный метод применим только для **сходящихся вычислительных процессов**. На рис. 6.2 представлены сходящиеся вычислительные процессы, а на рис. 6.3 расходящиеся вычислительные процессы.

Достаточные условия сходимости записываются в виде:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (6.4)$$

т.е. для каждой строки исходной матрицы коэффициентов модуль диагонального элемента должен быть не меньше суммы модулей внедиагональных элементов.

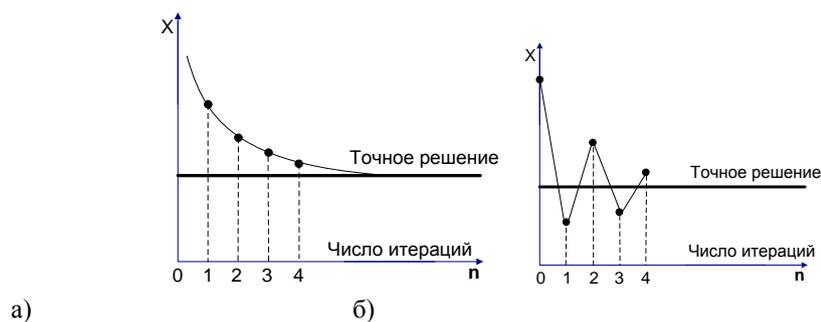


Рис.6.2 Сходящийся вычислительный процесс:  
а) – монотонный; б) – колебательный.

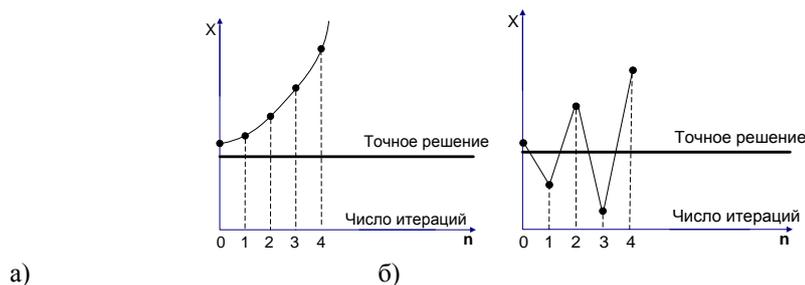


Рис. 6.3 Расходящийся вычислительный процесс:  
а) – монотонный; б) – колебательный.

Соблюдение достаточных условий сходимости позволяет использовать для решения систем ЛАУ итерационные методы. Основными методами этой группы являются: **метод простой итерации** (МПИ) и **метод Гаусса - Зейделя** (МГЗ).

#### Метод простой итерации

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1(n+1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2(n+1)} \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n(n+1)} \end{cases} \quad (6.5)$$

В соответствии с выражением (6.4) проверим исходную систему по достаточным условиям сходимости вычислительного процесса. Если эти условия соблюдаются для всех строк матрицы коэффициентов, то приведем анализируемую систему ЛАУ к виду, удобному для итерации. С этой целью каждое уравнение системы (6.5) разделим на соответствующий диагональный элемент матрицы коэффициентов.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = a'_{1(n+1)} \\ a'_{21}x_1 + x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = a'_{2(n+1)} \\ \dots \\ a'_{n1}x_1 + a'_{n2}x_2 + \dots + x_n = a'_{n(n+1)} \end{cases}$$

где  $a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$

Оставляя в левой части только неизвестные при диагональных элементах, получим:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1(n+1)} - a'_{12}x_2 - \dots - a'_{1n}x_n \\ x_2 = a'_{2(n+1)} - a'_{21}x_1 - \dots - a'_{2n}x_n \\ \dots \\ x_n = a'_{n(n+1)} - a'_{n1}x_1 - \dots - a'_{n(n-1)}x_{n-1} \end{cases} \quad (6.6)$$

Задаёмся начальными приближениями неизвестных  $x_i^{(0)}$ ,  $i=1, \dots, n$ . В общем случае они могут быть заданы произвольно, в том числе нулевыми значениями. Примем за начальные приближения каждого из неизвестных свободные члены соответствующих уравнений системы ЛАУ (6.6), а именно:

$$x_i^{(0)} = a'_{i(n+1)}$$

Выбранные приближения  $x_i^{(0)}$  подставляем в правые части уравнений системы (6.6) и тем самым определяем следующие приближения неизвестных  $x_i^{(1)}$ ,  $i=1, \dots, n$ . Другими словами, при расчёте значений неизвестных для текущей итерации в уравнения системы (6.6) подставляем значения неизвестных, полученных на предыдущей итерации

Подстановкой полученных значений  $x_i^{(1)}$  определяются следующие приближения для неизвестных.

Таким образом, на  $k$ -ом шаге итерационного процесса система (6.6) запишется в виде:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a'_{1(n+1)} - a'_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a'_{1n}x_n^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = a'_{2(n+1)} - a'_{21}x_1^{(k-1)} - \dots - a'_{2n}x_n^{(k-1)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} = a'_{n(n+1)} - a'_{n1}x_1^{(k-1)} - \dots - a'_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k-1)} \end{cases}$$

Процедуру уточнения переменных можно проиллюстрировать таблицей 6.2.

Таблица 6.2.

Уточнение переменных при использовании МПИ

№ итерации	Переменные					
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_{n-1}$	$x_n$
0	•	•	•	...	•	•
1	p	p	p	...	p	p
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k-1	p	p	p	...	p	p
k	p	p	p	...	p	p

- - свободные члены уравнений преобразованной системы ЛАУ вида (6.6)
- P – расчётные значения переменных

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения для всех  $x_i$ , полученные на двух соседних итерациях, не будут отличаться на величину, меньшую заданной погрешности решения,  $\varepsilon$ , т.е. до выполнения условия

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad i=1, \dots, n.$$

В этом случае процесс расчёта заканчивается и за окончательное решение для исходной системы ЛАУ вида (6.5) принимаются значения неизвестных  $x_i^{(k+1)}$ . В противном случае производится дальнейшее уточнение неизвестных. Другими словами при заданной точности расчёта,  $\varepsilon$  все неизвестные вектора  $X$  должны определяться с этой требуемой точностью.

В матричном виде, вышеизложенное можно представить в следующем виде:

$$A \cdot X + B' = 0 \quad (6.7)$$

В дальнейшем исходная система уравнений вида (6.7) заменяется системой вида :

$$A' \cdot K + B' = F \quad (6.8)$$

и приводится к виду:

$$A' \cdot K + E \cdot K - E \cdot K + B' = F$$

где  $[E]$  – единичная матрица.

Тогда матрицу неизвестных  $[X]$  можно записать в виде :

$$K = -(A' - E)^{-1} \cdot B' + F \quad (6.9)$$

Если при новом значении  $X$  в левой части уравнения его элементы отличаются от предыдущего значения  $X$  на величину, которая меньше заданной точности расчётов,  $\varepsilon$ , то процесс расчёта заканчивается. Необходимо отметить, что алгоритм МПИ очень легко программируется и не требует для своей реализации значительного объёма машинной памяти. Но метод имеет существенный недостаток – медленная сходимость вычислительного процесса. Число приближений (итераций), необходимых для получения практически точного решения часто бывает очень велико.

**Пример 6.3.** Для заданной системы линейных алгебраических уравнений с помощью итерационного метода определить неизвестные напряжения узлов. Вычисления неизвестных осуществить с двойной машинной точностью ( $\varepsilon=0,0001$ ).

$$\begin{cases} 0.7U_1 + 0.35U_2 - 0.17U_3 = 0 \\ 0.45U_1 + 1.43U_2 + 1.29U_3 = 10.05 \\ 0.93U_1 + 2.13U_2 + 4.49U_3 - 2.07 = 0 \end{cases}$$

*Решение.* Проверяем достаточные условия сходимости:

1.  $|0.7| \geq |0.35| + |0.17|$ , условие выполняется;
2.  $|1.43| \geq |0.45| + |1.29|$ , условие не выполняется

В связи с невыполнением достаточного условия сходимости итерационные методы для решения такой системы не применяются.

**Пример 6.4.** Для схемы (рис. 6.1) методом простой итерации определить напряжения в узлах электрической сети, описываемых следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} 0.0945U_{r2} - 0.0345U_{r3} + 0.0338U_{a2} - 0.0138U_{a3} = 2.5624 \\ -0.0345U_{r2} + 0.0912U_{r3} - 0.0138U_{a2} + 0.0271U_{a3} = 1.1096 \\ 0.0338U_{r2} - 0.0138U_{r3} - 0.1145U_{a2} + 0.0345U_{a3} = -4.7575 \\ -0.0138U_{r2} + 0.0271U_{r3} + 0.0345U_{a2} - 0.1112U_{a3} = -2.8606 \end{cases}$$

*Решение.*

1. Проверим достаточные условия сходимости

$$|0.0945| \geq |0.0345| + |0.0338| + |0.0138| - \text{условие выполняется}$$

$$|0.0912| \geq |0.0345| + |0.0138| + |0.0271| - \text{условие выполняется}$$

$$|0.1145| \geq |0.0338| + |0.0138| + |0.0345| - \text{условие выполняется}$$

$$|0.1112| \geq |0.0138| + |0.0271| + |0.0345| - \text{условие выполняется}$$

2. Приводим систему ЛАУ к виду удобному для итераций:

$$\begin{cases} U_{r_2} = 0.3651U_{r_3} - 0.3577U_{a_2} + 0.1460U_{a_3} + 27.1153 \\ U_{r_3} = 0.3783U_{r_2} + 0.1513U_{a_2} - 0.29721U_{a_3} - 12.1667 \\ U_{a_2} = 0.2952U_{r_2} + 0.1205U_{r_3} + 0.3013U_{a_3} - 41.5502 \\ U_{a_3} = -0.1241U_{r_2} + 0.24371U_{r_3} + 0.3103U_{a_2} + 25.7248 \end{cases}$$

3. Задаёмся начальными приближениями. За нулевую итерацию принимаем значения переменных, равных свободным членам соответствующих уравнений системы:

$$\begin{pmatrix} U_{r_2}^{(0)} \\ U_{r_3}^{(0)} \\ U_{a_2}^{(0)} \\ U_{a_3}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.1153 \\ -12.1667 \\ -41.5502 \\ 25.7248 \end{pmatrix}$$

Определим первое приближение:

$$\begin{pmatrix} U_{r_2}^{(1)} \\ U_{r_3}^{(1)} \\ U_{a_2}^{(1)} \\ U_{a_3}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.36508 & -0.3577 & 0.1460 \\ 0.3783 & 0 & 0.1513 & -0.2971 \\ 0.2952 & 0.1205 & 0 & 0.3013 \\ -0.1241 & 0.2437 & 0.3103 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27.1153 \\ -12.1667 \\ -41.5502 \\ 25.7248 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27.1153 \\ -12.1667 \\ -41.5502 \\ 25.7248 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.45244 \\ 21.06721 \\ 58.77210 \\ 38.21589 \end{pmatrix}$$

Дальнейшие расчёты выполняются в соответствии с вышеизложенным алгоритмом. Результаты вычислений представлены в таблице 6.3.

Таблица 6.3.

Результаты расчёта

№ итерации	$U_{r_2}$ , кВ	$U_{r_3}$ , кВ	$U_{a_2}$ , кВ	$U_{a_3}$ , кВ
0	27,1153	-12,1667	-41,5502	25,7248
1	20,45244	21,06721	58,77210	38,21589
2	19,36615	17,44093	61,64164	46,55499
3	18,23369	14,98626	63,39658	46,69634
...	...	...	...	...
8	16,81621	14,12312	62,18568	46,38866
...	...	...	...	...
13	16,81132	14,15412	62,19436	46,38439
14	16,81088	14,15428	62,19464	46,38404
15	16,81088	14,15428	62,19464	46,38404

Окончательно имеем  $U_{a_2}=62,19464$  кВ;  $U_{a_3}=46,38404$  кВ;  $U_{r_2}=16,81088$  кВ;  $U_{r_3}=14,15428$  кВ;

#### Метод Гаусса – Зейделя

Модификацией метода простой итерации является метод Гаусса – Зейделя (МГЗ). Этот метод, также как и МПИ базируется на использовании уравнений, приведённых к виду (6.6). Основное его отличие от МПИ состоит в том, что для вычисления переменных на  $i$ -ой итерации используются значения переменных, вычисленных как на предыдущей ( $i-1$ )-й итерации, так и текущей  $i$ -й итерации. При этом на  $k$ -м шаге итерационного процесса преобразованная система ЛАУ (6.6) имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a'_{(n+1)} - a'_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a'_{1n}x_n^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = a'_{2(n+1)} - a'_{21}x_1^{(k)} - \dots - a'_{2n}x_n^{(k-1)} \\ \dots \\ x_{n-1}^{(k)} = a'_{(n-1)(n-1)} - a'_{(n-1)m}x_m^{(k)} - \dots - a'_{(n-1)n}x_n^{(k-1)} \\ x_n^{(k)} = a'_{n(n+1)} - a'_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a'_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)} \end{cases}$$

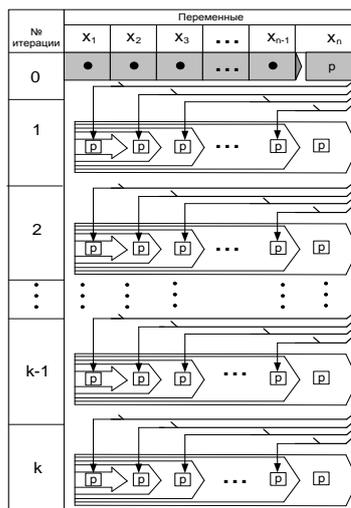
Процедуру уточнения переменных для этого метода можно проиллюстрировать таблицей 6.4

3. Уточнение переменных при использовании МГЗ

4.

5. Достаточные условия сходимости МПИ являются справедливыми и для метода Гаусса-Зейделя. При их выполнении вычислительный процесс по МГЗ сходится быстрее, чем вычислительный процесс расчёта по

МПИ. Другими словами, при одинаковой заданной точности расчётов и идентичных начальных приближениях, чем по МПИ окончательное решение по методу Гаусса-Зейделя достигается быстрее, т.е. за меньшее число итераций.



**Пример 6.5.** Для схемы (рис. 6.1) методом Гаусса-Зейделя определить напряжения в узлах электрической сети, описываемых следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} 0.0945U_{r2} - 0.0345U_{r3} + 0.0338U_{a2} - 0.0138U_{a3} = 2.5624 \\ -0.0345U_{r2} + 0.0912U_{r3} - 0.0138U_{a2} + 0.0271U_{a3} = 1.1096 \\ 0.0338U_{r2} - 0.0138U_{r3} - 0.1145U_{a2} + 0.0345U_{a3} = -4.7575 \\ -0.0138U_{r2} + 0.0271U_{r3} + 0.0345U_{a2} - 0.1112U_{a3} = -2.8606 \end{cases}$$

*Решение.*

1. Проверим достаточные условия сходимости

$$|0.0945| \geq |0.0345| + |0.0338| + |0.0138| - \text{условие выполняется}$$

$$|0.0912| \geq |0.0345| + |0.0138| + |0.0271| - \text{условие выполняется}$$

$$|0.1145| \geq |0.0338| + |0.0138| + |0.0345| - \text{условие выполняется}$$

$$|0.1112| \geq |0.0138| + |0.0271| + |0.0345| - \text{условие выполняется}$$

2. Приводим систему ЛАУ к виду удобному для итераций:

$$\begin{cases} U_{r2} = 0.3651U_{r3} - 0.3577U_{a2} + 0.1460U_{a3} + 27.1153 \\ U_{r3} = 0.3783U_{r2} + 0.1513U_{a2} - 0.29721U_{a3} - 12.1667 \\ U_{a2} = 0.2952U_{r2} + 0.1205U_{r3} + 0.3013U_{a3} - 41.5502 \\ U_{a3} = -0.1241U_{r2} + 0.24371U_{r3} + 0.3103U_{a2} + 25.7248 \end{cases}$$

3. Задаём начальные приближения. За нулевую итерацию принимаем значения переменных  $U_{r2}^{(0)}, U_{r3}^{(0)}, U_{a2}^{(0)}$  равные свободным членам соответствующих уравнений, а начальные приближения для переменной  $U_{a3}^{(0)}$  определяем из четвертого уравнения системы:

$$\begin{pmatrix} U_{r2}^{(0)} \\ U_{r3}^{(0)} \\ U_{a2}^{(0)} \\ U_{a3}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.1153 \\ -12.1667 \\ -41.5502 \\ 38.2159 \end{pmatrix}$$

Определим первое приближение:

$$\begin{pmatrix} U_{r2}^{(1)} \\ U_{r3}^{(1)} \\ U_{a2}^{(1)} \\ U_{a3}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.36508 & -0.3577 & 0.1460 \\ 0.3783 & 0 & 0.1513 & -0.2971 \\ 0.2952 & 0.1205 & 0 & 0.3013 \\ -0.1241 & 0.2437 & 0.3103 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27.1153 \\ -12.1667 \\ -41.5502 \\ 38.2159 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27.1153 \\ -12.1667 \\ -41.5502 \\ 38.2159 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.2765 \\ 17.3555 \\ 62.5357 \\ 46.5918 \end{pmatrix}$$

Дальнейшие расчёты выполняются в соответствии с вышеизложенным алгоритмом. Результаты вычислений представлены в таблице 6.5.

Таблица 6.5.

Результаты расчёта

№ итерации	$U_{r2}$ , кВ	$U_{r3}$ , кВ	$U_{a2}$ , кВ	$U_{a3}$ , кВ
0	27,1153	-12.1667	-41.5502	38.2159
1	22.2765	17.3555	62.5357	46.5918
2	17.8881	16.2160	62.2565	46.7338
3	16.8757	14.7697	62.8660	46.7342
4	16.8047	14.2616	62.3068	46.4458
5	16.8117	14.1665	62.2076	46.3911
6	16.8109	14.1559	62.1965	46.3840
7	16.8110	14.1544	62.1949	46.3841
8	16.8110	14.1542	62.1947	46.3840
9	16.8110	14.1542	62.1947	46.3840

6. Окончательно имеем  $U_{a2}=62,1947$  кВ;  $U_{a3}=46,3840$  кВ;  $U_{r2}=16,8110$  кВ;  $U_{r3}=14,1542$  кВ;
7. По этой причине, в практике расчётов установившихся режимов электрических систем предпочтение отдаётся методу Гаусса-Зейделя.
- 8.

#### Ускоряющие коэффициенты

В ряде расчетов с *помощью ускоряющих коэффициентов* можно уменьшить число итераций. Суть этого подхода заключается в следующем. При монотонной или колебательной сходимости вычисляемого процесса очередные приращения можно «искусственно» изменить с помощью коэффициента,  $K_{уск}$  таким образом, чтобы новое значение неизвестного было как можно ближе к истинному решению. Эти ускоряющие коэффициенты подбирают экспериментально. Причем при монотонной сходимости  $K_{уск} > 1$ , а при колебательной –  $K_{уск} < 1$ .

**Пример 6.6.** Рассмотрим сходимость вычислительного процесса уточнения переменной напряжения для отдельного узла электрической сети (рис. 6.4).

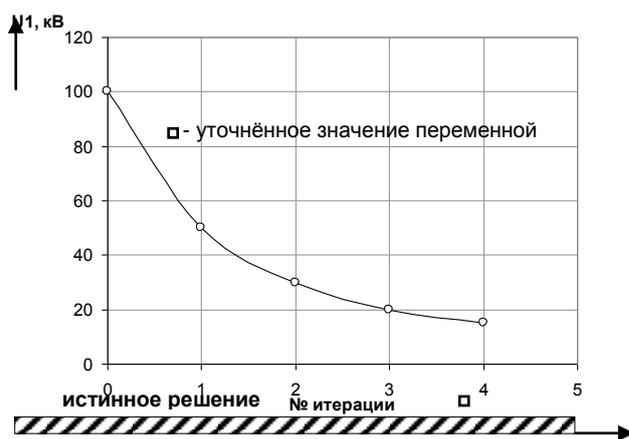


Рис. 6.4. Сходимость вычислительного процесса уточнения переменной напряжения

Пусть результаты расчётов 4-й итерации показали, что  $U_1^{(4)} = 15$  кВ: Принимаем  $K_{уск} = 1.5$ , и находим  $\Delta U = U_1^{(3)} - U_1^{(4)} = 20 - 15 = 5$  кВ. Вычисляем разность  $\Delta U' = \Delta U \cdot K_{уск} = 5 \cdot 1.5 = 7.5$  кВ и введем эту  $\Delta U'$  в расчет, определив новое значение  $U_1'^{(4)} = U_1^{(3)} - \Delta U' = 20 - 7.5 = 12.5$  кВ. В результате расчета в дальнейших вычислениях будем вместо значения  $U_1^{(4)} = 15$  кВ использовать, величину  $U_1'^{(4)} = 12.5$  кВ

## Тема 6.2. Методы расчета систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима

При решении нелинейных систем уравнений наиболее простым способом получения решения является линейризация исходных НАУ (функций). Идея линейризации положена в основу метода Ньютона-Рафсона. В этом случае на первом этапе исследуемая нелинейная функция  $f(x)$  записывается в виде ряда Тейлора (разложение по степеням полинома)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

В случае линейной постановки для метода Ньютона-Рафсона используется следующее выражение

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) \quad (6.10)$$

Поскольку решение находим при  $f(x) = 0$ , то приняв  $(x - x_0) = \Delta x$ , из (6.8) имеем

$$\Delta x = -\frac{f(x)}{f'(x_0)} \quad (6.11)$$

Величина  $\Delta x$  является критерием точности определения неизвестного и осуществляя итерационный вычислительный процесс в конечном итоге находится неизвестное с заданной степенью точности.

В результате новое значение переменной  $x$  для первой итерации определяется следующим образом:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \Delta x \quad (6.12)$$

Геометрическим аналогом процедуры метода Ньютона-Рафсона является **метод касательных** (рис. 6.5).

Необходимо подчеркнуть, что метод Ньютона-Рафсона применим лишь для тех нелинейных функций, которые являются монотонными, гладкими, существуют на всем интервале наблюдения, дифференцируемы, не имеют разрывов I и II рода и однозначно определены (не имеют деления на нуль).

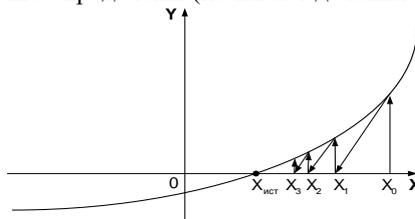


Рис. 6.5 Метод касательных

При медленной сходимости вычислительного процесса расчета для сокращения числа итераций модель вида (6.10) усложняется путем добавления более высоких степеней полинома.

**Пример 6.7.** Методом Ньютона-Рафсона найти решение нелинейной функции,  $f(U)$

$$f(U) = 3U^4 - 7U^3 + 10U^2 + 13U - 21$$

Расчёты выполнить с двойной машинной точностью ( $\epsilon=0,0001$ )

*Решение:*

1. Приравняем функцию  $f(U)=0$

$$3U^4 - 7U^3 + 10U^2 + 13U - 21 = 0$$

2. Определяем возможную область существования решения

а)  $U=0, f(U) = -21$

Далее выясняем значение переменной  $U$ , при котором функция будет положительная. Для этой цели произвольно задаёмся новыми значениями переменной до тех пор, пока функция  $f(U)$  не будет положительной

б)  $U=1; f(U) = -5$

$U=-1; f(U) = -14$

$U=10; f(U) = 24109 > 0$ , т.е. функция изменила знак

3. За начальное приближение переменной  $U$  выбираем середину области существования  $f(U)$ , т.е.  $U^{(0)} = 5$

4. Вычисляем первую производную  $f'(U)$ .

$$f'(U) = 12U^3 - 21U^2 + 20U + 13$$

Подставив значение  $U^{(0)} = 5$ , определяем  $f'(U)=1088$ . В соответствии с (6.10) определяем  $\Delta U = -1088/1294 = 0.8408$  кВ

5. С учётом  $\Delta U$  производим уточнение  $U$  для первой итерации  $U^{(1)} = 5 - 0,8408 = 3,8107$  кВ

Дальнейшие расчёты выполняются в соответствии с вышеизложенным алгоритмом. Результаты вычислений представлены в таблице 6.6.

Таблица 6.6.

Результаты расчёта

№ итерации	$U$ , кВ	$f U$ , кВ	$f' U$ , кВ	$\Delta U$ , кВ
0	5.0000	1294.0000	1088.0000	1.1893
1	3.8107	419.0118	448.3058	0.9347
1	2.8760	137.8294	182.2828	0.7561
2	2.1199	45.3984	75.3458	0.6025
3	1.5174	13.1990	36.9213	0,3575
4	1.1599	2.0389	26.6711	0.0764
5	1.0835	0.0559	25.2806	0.0022
6	1.0813	0.0000	25.2437	0.0000
7	1.0813	0.0000	25.2437	0.0000

6. Подставляем найденное решение в исходную систему уравнений и убеждаемся в правильности найденного значения неизвестной

**Пример 6.8.** Решить по методу Ньютона-Рафсона уравнения установившегося режима в форме баланса мощностей при переменных  $U$ ,  $\delta$  для сети (рис. 6.6) (сопротивления линии  $Z_{12} = 10 + j20$  Ом) используя следующие исходные данные

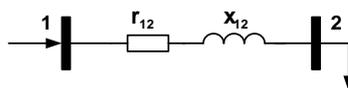


Рис. 6.6. Схема замещения сети с активно-индуктивной связью

$$\begin{cases} -46.1880 - 0.02U_1^2 + 0.02 \cdot 115U_1 \cos \delta_1 - 115 \cdot 0.04U_1 \sin \delta_1 = 0; \\ -23.0940 - 0.04U_1^2 + 0.04 \cdot 115U_1 \cos \delta_1 - 115 \cdot 0.02U_1 \sin \delta_1 = 0 \end{cases}$$

*Решение.* Начальные приближения:  $U_1^{(0)} = 110$  кВ;  $\delta_1^{(0)} = 0^\circ$ . При этих значениях определим начальное приближение вектора небалансов,  $W X^{(0)}$  МВА:

$$W X^{(0)} = \begin{bmatrix} -46.1880 - 0.02 \cdot 110^2 + 2.3 \cdot 110 \cos 0 - 4.6 \cdot 110 \sin 0 \\ -23.0940 - 0.04 \cdot 110^2 + 4.6 \cdot 110 \cos 0 - 2.3 \cdot 110 \sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35.1880 \\ -1.0940 \end{bmatrix}$$

В точке нулевой итерации вычисляем производные от  $W X^{(0)}$  :

$$\frac{\partial w_p}{\partial U_1} = -2 \cdot 0.02 \cdot 110 + 115 \cdot 0.02 \cdot \cos 0 - 115 \cdot 0.04 \sin 0 = -2.1$$

$$\frac{\partial w_p}{\partial \delta_1} = 110 \cdot 115 \cdot 0.02 \sin 0 + 110 \cdot 115 \cdot 0.04 \cos 0 = -506$$

$$\frac{\partial w_q}{\partial U_1} = -2 \cdot 0.04 \cdot 110 + 115 \cdot 0.04 \cdot \cos 0 - 115 \cdot 0.02 \sin 0 = -4.2$$

$$\frac{\partial w_q}{\partial \delta_1} = 110 \cdot 115 \cdot 0.02 \cos 0 + 110 \cdot 115 \cdot 0.04 \sin 0 = 253$$

Полученная производная в матричной форме имеет вид:

$$\frac{\partial W X^{(0)}}{\partial x} = \begin{bmatrix} -2.1 & -506 \\ -4.2 & 253 \end{bmatrix}$$

Систему линеаризованных уравнений на первом шаге можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -35.1880 \\ -1.0940 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.1 & -506 \\ -4.2 & 253 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U^{(1)} \\ \Delta \delta^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

или в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} -2.1\Delta U_1^{(1)} - 506\Delta\delta_1^{(1)} &= 35.1880 \\ -4.2\Delta U_1^{(1)} - 253\Delta\delta_1^{(1)} &= 1.0940 \end{aligned} \right\}$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_1^{(1)} + 240.9524\Delta\delta_1^{(1)} &= -16.7562 \\ \Delta\delta_1^{(1)} &= 1.0940 \end{aligned} \right\}$$

Из полученной системы определяем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\delta_1^{(1)} &= -3,1398^\circ \\ \Delta U_1^{(1)} &= -3,5596 \text{ кВ} \end{aligned} \right\}$$

С учётом поправок находим первое приближение переменных:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^{(1)} = \delta_1^{(0)} - \Delta\delta_1^{(1)} &= 0 - 3,1398^\circ = -3,1398^\circ \\ U_1^{(1)} = U_1^{(0)} - \Delta U_1^{(1)} &= 110 - 3,5596 = 106,4404 \text{ кВ} \end{aligned} \right\}$$

Результаты расчёта на каждом шаге приведены в табл. 6.7.

Таблица 6.7.

Результаты расчёта

№ итерации	$U_1$ , кВ	$\delta_1$ , град.
0	110,000	0
1	106,4404	-3,1398
2	106,1638	-3,2478
3	106,1087	-3,2478

## Раздел 7. Определение потерь мощности в электрических сетях

Нагрузочные потери активной мощности в элементе сети с сопротивлением  $R$  при напряжении  $U$  определяют по формуле:

$$\Delta P = \frac{P^2 + Q^2}{U^2} R, \quad (7.1)$$

где  $P$  и  $Q$  – активная и реактивная мощности, передаваемые по элементам электрической сети.

В большинстве случаев значения  $P$  и  $Q$  на элементах электрической сети априори неизвестны. Как правило, известны нагрузки в узлах сети (в детерминированной или вероятностной форме). **Целью электрического расчёта (расчёта установившегося режима) в любой электрической сети является определение значений  $P$  и  $Q$  в каждой ветви сети по данным их значений в узлах.** После этого, при детерминированной постановке задачи, определение суммарных потерь мощности в сети представляет собой довольно простую задачу суммирования значений, определённых по формуле (7.1).

Объём и характер исходных данных о схемах и нагрузках существенно различается для сетей различных классов напряжения.

Для **сетей 35 кВ и выше** обычно известны значения  $P$  и  $Q$  в узлах нагрузки. В результате расчёта установившегося режима вычисляются потоки  $P$  и  $Q$  в каждом элементе сети.

Для **сетей 6-20 кВ** известен, как правило, лишь отпуск электроэнергии через головной участок фидера<sup>3</sup>, т.е. фактическая суммарная нагрузка трансформаторными подстанциями (ТП) 6-20/0.4 кВ, включая потери в фидере. По известному отпуску электроэнергии могут быть определены средние значения  $P$  и  $Q$  на головном участке фидера. Для расчёта значений  $P$  и  $Q$  в каждом элементе необходимо принять какое-либо допущение о распределении суммарной нагрузки между отдельными ТП. Обычно принимают единственно возможное в этом случае допущение о распределении нагрузок пропорционально установленным мощностям ТП. Затем с помощью итерационного расчёта «снизу вверх» и «сверху вниз» корректируют эти нагрузки так, чтобы добиться равенства суммы узловых нагрузок и потерь в заданной нагрузке головного участка. Таким образом, искусственно восстанавливаются отсутствующие данные об узловых нагрузках, и задача сводится к первому случаю.

В описанных задачах схема и параметры элементов сети известны. Отличием расчётов является то, что в первой задаче узловые напряжения считаются исходными, а суммарная нагрузка получается в результате расчёта, в том числе и в вероятностной форме, во второй – известна только суммарная нагрузка, а узловые нагрузки получают в результате расчёта.

<sup>3</sup> фидер – отдельные присоединения распределительной электрической сети

При расчёте потерь в сетях 0,4 кВ при известных схемах этих сетей в большинстве случаев можно использовать тот же алгоритм, что и для сетей 6-20 кВ.

Для расчета режима участка электрической сети используется несколько составляющих тока. Исходя из принципа суперпозиции представим структурную схему электрической сети с отдельными составляющими тока (рис. 7.1.).



Рис. 7.1. Структурная схема электрической сети.

$I_G$  - ток генератора;  $I_{св}$  – ток связи;  $I_n$  – ток потерь;  $I_n$  - ток нагрузки.

При расчете потерь мощности обычно принимаются следующие допущения:

- 1) все нагрузки генератора подключены к узлам электрической сети;
- 2) токи в связях приводятся к своему классу напряжения;
- 3) все потери образуются только в связях и затем разносятся по отдельным узлам электрической сети, поскольку токи отнесены к соответствующим узлам;
- 4) переменные  $I_G$ ;  $I_{св}$ ;  $I_n$  являются сквозными и не связаны (не коррелированы<sup>4</sup>) с составляющей тока потерь.

Такие допущения позволяют перейти к более простой электрической схеме с сосредоточенными параметрами.

### Тема 7.1. Выражения для комплекса мощности участка электрической сети

Известно, что комплекс мощности в общем виде можно записать:

$$S^* = U \hat{I} \quad (7.2)$$

иначе

$$S^* = U^* e^{j\omega t} \cdot I e^{-j\omega t} \quad (7.3)$$

Учитывая, что  $\omega_U - \omega_I = \varphi$ , получим

$$S^* = U^* I \cos \varphi + j U^* I \sin \varphi \quad (7.4)$$

В соответствии с (7.3) и, используя активные и реактивные составляющие тока и напряжения, выражение (7.2) можно переписать в следующем виде:

$$S^* = (U_a + jU_r)(I_a - jI_r) = U_a^* I_a + U_r^* I_r + j(I_a U_r^* - I_r U_a^*)$$

или

$$\begin{cases} P^* = U_a^* I_a + U_r^* I_r \\ Q^* = I_a U_r^* - I_r U_a^* \end{cases}$$

### Тема 7.2. Матричная форма записи условия баланса тока в узлах электрической сети

По первому закону Кирхгофа имеем:

$$I_G^* - I_{св}^* - I_n^* - I_{II}^* = 0$$

Как отмечалось выше, в электрических расчетах принято ток, вытекающий из узла, взятый с обратным знаком, называть *током инъекции*. Используя выражение для тока связи (2.24) для схемы рис.7.2 можно записать:

$$I_{ij}^* = U_i^* \sum_{\substack{j \in R_i \\ i=1}}^n \left( \frac{1}{z_{ij}} + y_{ij} \right) = \sum_{\substack{j \in R_i \\ i=1}}^n U_j^* \frac{1}{z_{ij}} + I \quad (7.4)$$

Для упрощения расчетов электрической сети введем собственную,  $Y_{ii}$  и взаимную,  $Y_{ij}$  проводимости:

<sup>4</sup> correlation – связь, подобие

$$\begin{cases} Y_{ii} = \sum_{j \in R_i} (y_{ij} + y_{ij}) \\ Y_{ij} = \sum_{j \in R_i} \frac{1}{Z_{ij}} \end{cases} \quad (7.5)$$

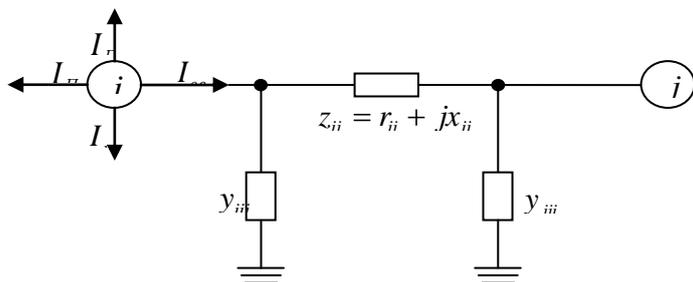


Рис. 7.2. Расчетная модель электрической сети.

Тогда с учетом (7.5) выражение (7.4) можно переписать в виде:

$$I_{ij}^* = U_i^* \sum_{j \in R_i} y_{ij} = \sum_{j \in R_i} U_j^* y_{ij} + I_i^*$$

или в матричном виде:

$$Y_{\Pi} \cdot U_{\Pi} + I_{\Pi} = 0 \quad (7.6)$$

Индекс “п” для матрицы означает полную матрицу, или вектор, включающий элементы, соответствующие опорному (базисному или балансирующему) узлу.

При выполнении расчетов целесообразно выражение (7.6) переписать в виде действительных и мнимых составляющих отдельных матриц, используя следующую систему.

$$\begin{cases} Y_{\Pi} = G_{\Pi} + B_{\Pi} \\ U_{\Pi} = U_{\Pi a} + U_{\Pi r} \\ I_{\Pi} = I_{\Pi a} + I_{\Pi r} \end{cases} \quad (7.7)$$

Это вызвано тем, что на практике в большинстве случаев необходимо знать только действительную часть. Тогда с учетом (7.7) уравнение (7.6) можно переписать в виде:

$$\mathbf{G}_{\Pi} \mathbf{U}_{\Pi a} - \mathbf{B}_{\Pi} \mathbf{U}_{\Pi r} + \mathbf{I}_{\Pi a} + j \mathbf{G}_{\Pi} \mathbf{U}_{\Pi r} + \mathbf{B}_{\Pi} \mathbf{U}_{\Pi a} + \mathbf{I}_{\Pi r} = 0 \quad (7.8)$$

Выражение (7.8) имеет смысл если его действительная и мнимая части равны 0.

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{\Pi} \mathbf{U}_{\Pi a} - \mathbf{B}_{\Pi} \mathbf{U}_{\Pi r} + \mathbf{I}_{\Pi a} = 0 \\ \mathbf{G}_{\Pi} \mathbf{U}_{\Pi r} + \mathbf{B}_{\Pi} \mathbf{U}_{\Pi a} + \mathbf{I}_{\Pi r} = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

Перепишем (7.9) в виде:

$$\begin{bmatrix} G_{\Pi} - B_{\Pi} \\ B_{\Pi} \quad G_{\Pi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{\Pi a} \\ U_{\Pi r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{\Pi a} \\ I_{\Pi r} \end{bmatrix} = 0 \quad (7.10)$$

Выражение (7.10) позволяет осуществить автономный расчет активной и реактивной составляющих мощности для нормального режима.

### Тема 7.3. Матричное выражение для потерь мощности участка электрической сети

Лекция проводится в интерактивной форме: лекция-беседа, лекция с разбором конкретных ситуаций (2 часа).

Распишем полную матрицу проводимостей используя собственные и взаимные проводимости:

$$[Y_n] = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ -y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

По аналогии распишем матрицы токов и напряжений:

$$U_{\Pi} = \begin{pmatrix} U_{\Pi 1} \\ U_{\Pi 2} \\ \dots \\ U_{\Pi n} \end{pmatrix} \quad I_{\Pi} = \begin{pmatrix} I_{\Pi 1} \\ I_{\Pi 2} \\ \dots \\ I_{\Pi n} \end{pmatrix}$$

При электрических расчетах можно достичь значительного упрощения, используя операции транспонирования матриц:  $A \rightarrow A^T$ . В этом случае строка исходной матрицы становится столбцом транспонированной, а столбец исходной – строкой транспонированной.

Для того чтобы, от уравнений баланса токов перейти к уравнению баланса мощности нужно с исходным уравнением баланса токов произвести следующие операции:

- 1) переписать выражение (7.6) в виде удобном для транспонирования;
- 2) домножить исходную матрицу справа на столбцовую матрицу напряжения.

Тогда получим следующее выражение:

$$U_{\Pi}^T Y_{\Pi}^T U_{\Pi} + I_{\Pi}^T U_{\Pi} = 0 \quad (7.11)$$

Второе слагаемое (7.11) можно переписать в следующем виде:

$$I_{\Pi}^T U_{\Pi} = \dot{I}_1 \dot{U}_1 + \dot{I}_2 \dot{U}_2 + \dots + \dot{I}_n \dot{U}_n$$

Переходя к параметру мощности имеем

$$P + jQ = \underbrace{U_{a\Pi}^T G_{\Pi}^T U_{a\Pi} + U_{r\Pi}^T G_{\Pi}^T U_{r\Pi}}_P + j \underbrace{-U_{a\Pi}^T B_{\Pi}^T U_{a\Pi} - U_{r\Pi}^T B_{\Pi}^T U_{r\Pi}}_Q$$

Вычислив прямые и обратные (реверсивные) потоки мощности, можно определить потери мощности на участке электрической сети.

$$\Delta P_{ij} = P_{ij} + P_{ji} \quad (7.12)$$

$$\Delta Q_{ij} = Q_{ij} + Q_{ji} \quad (7.13)$$

$$\Delta S_{ij} = \sqrt{\Delta P_{ij}^2 + \Delta Q_{ij}^2} \quad (7.14)$$

Окончательно, суммарные потери полной мощности на участке электрической сети составят:

$$\Delta S_{\Sigma} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^n \Delta S_{ij} \quad (7.15)$$

**4.3. Лабораторные работы**  
Учебным планом не предусмотрено.

**4.4. Практические занятия**

<i>№ п/п</i>	<i>Номер раздела дисциплины</i>	<i>Тема практического занятия</i>	<i>Объем (час.)</i>	<i>Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)</i>
1	1.	Применение комплексных чисел при анализе электрических режимов	4	(2 часа) Дискуссия
2	2.	Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети	4	(1 час) Дискуссия
3	3.	Графы электрической сети	4	-
4	4.	Матричные уравнения состояния электрической сети	6	-
5	5.	Формирование уравнений установившегося режима	4	(2 часа) Дискуссия
6	6.	Прямые методы расчета систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима	8	-
7	6.	Расчёт систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима	6	-
<b>ИТОГО</b>			<b>36</b>	<b>5</b>

**4.5. Контрольные мероприятия: курсовой проект (курсовая работа), контрольная работа, РГР, реферат**  
Учебным планом не предусмотрено.

**5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К  
ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ  
ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

<i>Компетенции</i>  <i>№, наименование разделов дисциплины</i>	<i>Кол-во часов</i>	<i>Компетенция</i>		<i>Σ комп.</i>	<i>t<sub>ср</sub> час</i>	<i>Вид учебных занятий</i>	<i>Оценка результатов</i>
		<i>ОПК-2</i>	<i>ПК-2</i>				
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>1.</b> Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике	13	+	+	2	6,5	Лк, ПЗ, СР	зачет
<b>2.</b> Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети	13	+	+	2	6,5	Лк, ПЗ, СР	зачет
<b>3.</b> Графы электрической сети	14	+	+	2	7	Лк, ПЗ, СР	зачет
<b>4.</b> Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети	16	+	+	2	8	Лк, ПЗ, СР	зачет
<b>5.</b> Уравнение установившегося режима электрической сети	16	+	+	2	8	Лк, ПЗ, СР	зачет
<b>6.</b> Методы расчета установившегося режима	26	+	+	2	13	Лк, ПЗ, СР	зачет
<b>7.</b> Определение потерь мощности в электрических сетях	10	+	+	2	5	Лк, СР	зачет
<b>всего часов</b>	<b>108</b>	<b>27</b>	<b>27</b>	<b>2</b>	<b>54</b>		

**6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ  
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

1. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики : учебник / В. А. Веников, Э. Н. Зуев, И. В. Литкенс и др. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Высшая школа, 1981. - 288 с. - Б. ц.
2. Электрические системы. Режимы работы электрических систем и сетей : учебное пособие / Под ред. В. А. Веникова . - Москва : Высшая школа, 1975. - 344 с. - Б. ц.

**7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ,  
НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

<i>№</i>	<i>Наименование издания</i>	<i>Вид заня- тия</i>	<i>Количество о экземпляро в в библиотек е, шт.</i>	<i>Обеспечен- ность, (экз./ чел.)</i>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Основная литература</b>				
1.	Балабко, Л.В. Численные методы : учебное пособие / Л.В. Балабко, А.В. Томилова ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Северный	Лк, СР	ЭР	1

	(Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова. - Архангельск : САФУ, 2014. - 163 с. : схем., табл., ил. - ISBN 978-5-261-00962-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=436331">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=436331</a>			
<b>Дополнительная литература</b>				
2.	Курбацкий, В. Г. Математические задачи электроэнергетики. В 2 ч. Ч. 1. Основы применения элементов линейной алгебры и теории графов в электроэнергетике: учеб. пособие / В. Г. Курбацкий, Н. В. Томин– Братск: ГОУ ВПО «БрГУ», 2007. – 142 с.	Лк, ПЗ, СР	39	1
3.	Курбацкий В.Г. Математические задачи электроэнергетики: методические указания по выполнению контрольных работ / В. Г. Курбацкий, Н. В. Томин. - Братск : БрГУ, 2007. - 41 с.	ПЗ	33	1
4.	Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики : учебник / В. А. Веников, Э. Н. Зуев, И. В. Литкенс и др. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Высшая школа, 1981. - 288 с.	Лк, ПЗ	64	1
5.	Электрические системы. Режимы работы электрических систем и сетей : учебное пособие / Под ред. В. А. Веникова . - Москва : Высшая школа, 1975. - 344 с.	Лк, ПЗ	16	0,5

## 8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Электронный каталог библиотеки БрГУ  
[http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r\\_15/cgiirbis\\_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=](http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r_15/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=).
2. Электронная библиотека БрГУ  
<http://ecat.brstu.ru/catalog> .
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»  
<http://biblioclub.ru> .
4. Электронно-библиотечная система «Издательство «Лань»  
<http://e.lanbook.com> .
5. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"  
<http://window.edu.ru> .
6. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru> .
7. Университетская информационная система РОССИЯ (УИС РОССИЯ)  
<https://uisrussia.msu.ru/> .
8. Национальная электронная библиотека НЭБ  
<http://xn--90ax2c.xn--p1ai/how-to-search/> .

## 9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

### 9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению практических работ

#### **Практическое занятие № 1 Применение комплексных чисел при анализе электрических режимов**

Занятие проводится в интерактивной форме: дискуссия (2 часа).

Цель работы: Закрепить правила действий с комплексными числами при расчётах в электрических сетях

Задание:

1. Рассмотреть правила математических действий с комплексными числами.
2. Ознакомиться с алгебраической формой записи комплексного числа.
3. Ознакомиться с тригонометрической и показательной формами записи комплексного числа.

Порядок выполнения:

Изучить теоретический материал.

Решить задачи.

Форма отчетности:

В отчет по практическому занятию вносится:

1. Теоретические сведения о комплексных числах;
2. Решение задач.

Задания для самостоятельной работы:

Изучить теоретический материал по теме 1.1, 1.2 раздела 1.

Основная литература

[1]

Дополнительная литература

[2,3,4,5]

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Формы записи комплексного числа.
2. Правила математических действий с комплексными числами.

#### **Практическое занятие № 2 Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети**

Занятие проводится в интерактивной форме: дискуссия (1 час).

Цель работы: Изучить порядок составления и расчета параметров схем замещения в относительных и именованных единицах при расчете токов короткого замыкания анализируемой электрической сети.

Задание:

1. Изучить систему базисных величин.
2. Ознакомиться с параметрами элементов схем замещения

Порядок выполнения:

1. Изучить теоретический материал.
2. Решить задачи.

Форма отчетности:

В отчет по практическому занятию вносится:

1. Теоретические сведения о порядке составления схем замещения.
2. Решение задач.

Задания для самостоятельной работы:

Изучить теоретический материал по теме 2.1,2.2 раздела 2.

Основная литература

[1]

Дополнительная литература

[2,3,4,5]

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Правила эквивалентирования.
2. Система базисных величин.
3. Параметры схемы замещения в относительных единицах.

#### **Практическое занятие № 3 Графы электрической сети**

Цель работы: Освоить основы теории графов в электроэнергетических расчётах.

Задание:

1. Изучить основные определения теории графов.
2. Изучить правила составления матриц инцидентий.

Порядок выполнения:

1. Изучить теоретический материал.
2. Решить задачи.

Форма отчетности:

В отчет по практическому занятию вносится:

1. Теоретические сведения о теории графов.
2. Решение задач.

Задания для самостоятельной работы:

Изучить теоретический материал по теме 3.1,3.2 раздела 3.

Основная литература

[1]

Дополнительная литература

[2,3,4,5]

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Основные определения теории графов.
2. Правила составления матриц инцидентий.

**Практическое занятие № 4 Матричные уравнения состояния электрической сети**

Цель работы: Освоить расчёт электрических схема на базе матричных уравнений состояния электрической сети

Задание:

9. Изучить матричные формы записи уравнений состояния электрической сети.
10. Решить задачи.

Порядок выполнения:

1. Изучить теоретический материал.
2. Решить задачи.

Форма отчетности:

В отчет по практическому занятию вносится:

1. Теоретические сведения о матричных уравнениях состояния электрической сети.
2. Решение задач.

Задания для самостоятельной работы:

Изучить теоретический материал по теме 4.1,4.2 раздела 4.

Основная литература

[1]

Дополнительная литература

[2,3,4,5]

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Матричная форма записи уравнения состояния для электрических схем, содержащих только источники тока.
2. Матричная форма записи уравнения состояния для электрических схем, содержащих только источники напряжения.

**Практическое занятие № 5 Формирование уравнений установившегося режима**

Занятие проводится в интерактивной форме: дискуссия (2 часа).

Цель работы: Закрепить правила формирования уравнений установившегося режима

Задание:

1. Записать уравнение установившегося режима для предложенной электрической схемы.

Порядок выполнения:

1. Изучить теоретический материал.
2. Решить задачи.

Форма отчетности:

В отчет по практическому занятию вносится:

1. Теоретические сведения об уравнениях установившегося режима
2. Решение задач.

Задания для самостоятельной работы:

Изучить теоретический материал по теме 5.1,5.2 раздела 5.

Основная литература

[1]

Дополнительная литература

[2,3,4,5]

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Линейные уравнения УУН в форме баланса токов
2. Нелинейные уравнения в форме баланса токов
3. Нелинейные уравнения УУН в форме баланса мощности

## **Практическое занятие № 6 Прямые методы расчета систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима**

**Цель работы:** Овладеть прямыми методами расчёта линейных алгебраических уравнений установившегося режима

**Задание:**

1. Изучить метод Гаусса
2. Изучить метод матрицы  $z$
3. Решить задачи.

**Порядок выполнения:**

1. Изучить теоретический материал.
2. Решить задачи.

**Форма отчетности:**

В отчет по практическому занятию вносится:

1. Теоретические сведения о методах расчета системы ЛАУ
2. Решение задач.

**Задания для самостоятельной работы:**

Изучить теоретический материал по теме 6.1,6.2 раздела 6.

Основная литература

[1]

Дополнительная литература

[2,3,4,5]

**Контрольные вопросы для самопроверки**

1. Суть метода Гаусса
2. Суть метода матрицы  $z$

## **Практическое занятие № 7 Расчёт систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима**

**Цель работы:** Освоить метод Ньютона-Рафсона для расчёта нелинейных алгебраических уравнений (НАУ) установившегося режима

**Задание:** Изучить метод Ньютона-Рафсона

**Порядок выполнения:**

1. Изучить теоретический материал.
2. Решить задачи.

**Форма отчетности:**

В отчет по практическому занятию вносится:

1. Теоретические сведения о методах расчета системы НЛАУ.
2. Решение задач.

**Задания для самостоятельной работы:**

Изучить теоретический материал по теме 6.1,6.2 раздела 6.

Основная литература

[1]

Дополнительная литература

[2,3,4,5]

**Контрольные вопросы для самопроверки**

1. Суть метода Ньютона-Рафсона.

## 10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Microsoft Imagine Premium (\*)
2. Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Расширенный Russian Edition. 1000-1499 Node 1 year Educational Renewal License
3. Kaspersky Security для почтовых серверов Russian Edition. 100-149 MailAdress 1 year Educational Renewal License
4. Kaspersky Anti-Spam для Linux Russian Edition. 100-149 MailBox 1 year Educational Renewal License
5. OpenOffice
6. LibreOffice
7. Adobe Reader
8. doPDF
9. 7-Zip
10. Ай-Логос
11. Система дистанционного обучения
12. ПО "Антиплагиат"
13. Программное обеспечение "Визуальная студия тестирования"
14. Консультант Плюс
15. Программное обеспечение для мультимедиа-лингфонного комплекта RINEL-LINGO, позволяющего реализовать функциональные возможности мультимедийного компьютерного класса
16. ИСС "Кодекс". Информационно-справочная система
17. Подготовка исходных данных для расчета статической устойчивости энергосистем (PID v. 1.00)
18. Исследование режимов работы электрической сети (Vector 6.9 v.1.00)
19. Лаборатория исследования устойчивости электрических систем (Elmech v.1.00)
20. Многокритериальная оценка эффективности использования ветроэнергетических установок (Wind-MCA v.1.00)
21. Navodka 2002 v.1.00
22. Дистанционная защита (Distance v.1.00)
23. Исследование переходных процессов при трехфазном коротком замыкании (Graphk3 v.1.00)
24. MATLAB Academic new Product Concurrent Licenses
25. Simulink Academic new Product Concurrent Licenses
26. Simscape Power Systems Academic new Product Concurrent Licenses
27. RastrWin (студенческая версия)
28. Программные средства Autodesk
29. Autocad - Профессиональное ПО для 2D и 3D проектирования
30. National Instruments:
31. LabVIEW Professional Development System,
32. Circuit Design Suite, в который входят Multisim и Ultiboard.

## 11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

<i>Вид занятия</i>	<i>Наименование аудитории</i>	<i>Перечень основного оборудования</i>	<i>№ ЛР</i>
1	2	3	4
Лк	Лекционная аудитория	-	-
ПЗ	Лекционная аудитория	-	-
СР	Лекционная аудитория	-	-

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ  
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)**

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
1	2	3	4	5
ОПК-2	способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении экспериментальных задач	1. Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике	1.1. Система энергетики как объект математического моделирования	Вопрос к зачету (1.1)
			1.2. Применение комплексных чисел при анализе электрических режимов	Вопрос к зачету (1.2)
			1.3. Векторные диаграммы режимных параметров электрической сети	Вопрос к зачету (1.3)
			1.4. Использование матричной алгебры при расчетах режимов электрической сети	Вопрос к зачету (1.4)
		2. Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети	2.1. Общие сведения о схемах замещения	Вопрос к зачету (2.1)
			2.2. Модель узла электрической сети	Вопрос к зачету (2.2)
			2.3. Модель ветви электрической сети	Вопрос к зачету (2.3)
		3. Графы электрической сети	3.1. Схема замещения электрической сети	Вопрос к зачету (3.1)
			3.2. Матрицы инциденций	Вопрос к зачету (3.2)
		4. Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети	4.1. Формирование матричных уравнений состояния электрической сети	Вопрос к зачету (4.1)
			4.2. Расчет режима электрической сети, содержащей только источники тока	Вопрос к зачету (4.2)
			4.3. Расчет режима электрической сети, содержащей только источники напряжения	Вопрос к зачету (4.3)
			4.4. Расчет режима электрической сети, содержащей источники тока и напряжения	Вопрос к зачету (4.4)
			4.5. Независимые параметры режима	Вопрос к зачету (4.5)
			4.6. Обобщенные параметры режима	Вопрос к зачету (4.6)
		5. Уравнение установившегося режима электрической сети	5.1. Задачи расчета установившегося режима	Вопрос к зачету (5.1)
			5.2. Вектор состояния и базис установившегося режима	Вопрос к зачету (5.2)

			5.3. Формирование уравнения установившегося режима	Вопрос к зачету (5.3)
		6. Методы расчета установившегося режима	6.1. Методы расчета систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима	Вопрос к зачету (6.1)
			6.2. Методы расчета систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима	Вопрос к зачету (6.2)
		7. Определение потерь мощности в электрических сетях	7.1. Выражение для комплекса мощности участка электрической сети	Вопрос к зачету (7.1)
			7.2. Матричная форма записи условия баланса тока в узлах электрической сети	Вопрос к зачету (7.2)
			7.3. Матричное выражение для потерь мощности участка электрической сети	Вопрос к зачету (7.3)
ПК-2	способность обрабатывать результаты экспериментов	1. Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике	1.1. Система энергетики как объект математического моделирования	Вопрос к зачету (1.1)
			1.2. Применение комплексных чисел при анализе электрических режимов	Вопрос к зачету (1.2)
			1.3. Векторные диаграммы режимных параметров электрической сети	Вопрос к зачету (1.3)
			1.4. Использование матричной алгебры при расчетах режимов электрической сети	Вопрос к зачету (1.4)
		2. Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети	2.1. Общие сведения о схемах замещения	Вопрос к зачету (2.1)
			2.2. Модель узла электрической сети	Вопрос к зачету (2.2)
			2.3. Модель ветви электрической сети	Вопрос к зачету (2.3)
		3. Графы электрической сети	3.1. Схема замещения электрической сети	Вопрос к зачету (3.1)
			3.2. Матрицы инциденций	Вопрос к зачету (3.2)
		4. Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети	4.1. Формирование матричных уравнений состояния электрической сети	Вопрос к зачету (4.1)
			4.2. Расчет режима электрической сети, содержащей только источники тока	Вопрос к зачету (4.2)
			4.3. Расчет режима электрической сети, содержащей только источники напряжения	Вопрос к зачету (4.3)
			4.4. Расчет режима электрической сети, содержащей источники тока и напряжения	Вопрос к зачету (4.4)
			4.5. Независимые параметры режима	Вопрос к зачету (4.5)
			4.6. Обобщенные параметры	Вопрос к зачету

			режима	(4.6)
	5.	Уравнение установившегося режима электрической сети	5.1. Задачи расчета установившегося режима	Вопрос к зачету (5.1)
			5.2. Вектор состояния и базис установившегося режима	Вопрос к зачету (5.2)
			5.3. Формирование уравнения установившегося режима	Вопрос к зачету (5.3)
	6.	Методы расчета установившегося режима	6.1. Методы расчета систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима	Вопрос к зачету (6.1)
			6.2. Методы расчета систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима	Вопрос к зачету (6.2)
	7.	Определение потерь мощности в электрических сетях	7.1. Выражение для комплекса мощности участка электрической сети	Вопрос к зачету (7.1)
			7.2. Матричная форма записи условия баланса тока в узлах электрической сети.	Вопрос к зачету (7.2)
			7.3. Матричное выражение для потерь мощности участка электрической сети	Вопрос к зачету (7.3)

## 2. Вопросы к зачету

№ п/п	Компетенции		ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ	№ и наименование раздела
	Код	Определение		
1	2	3	4	5
1.	ОПК-2	способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении экспериментальных задач	1.1. Система энергетики как объект математического моделирования. 1.2. Применение комплексных чисел при анализе электрических режимов. 1.3. Векторные диаграммы режимных параметров электрической сети. 1.4. Использование матричной алгебры при расчетах режимов электрической сети.	1. Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике
			2.1. Общие сведения о схемах замещения. 2.2. Модель узла электрической сети. 2.3. Модель ветви электрической сети.	2. Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети
			3.1. Схема замещения электрической сети. 3.2. Матрицы инцидентий.	3. Графы электрической сети

			<p><b>4.1.</b> Формирование матричных уравнений состояния электрической сети.</p> <p><b>4.2.</b> Расчет режима электрической сети, содержащей только источники тока.</p> <p><b>4.3.</b> Расчет режима электрической сети, содержащей только источники напряжения.</p> <p><b>4.4.</b> Расчет режима электрической сети, содержащей источники тока и напряжения.</p> <p><b>4.5.</b> Независимые параметры режима.</p> <p><b>4.6.</b> Обобщенные параметры режима.</p>	<p><b>4.</b> Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети</p>
			<p><b>5.1.</b> Задачи расчета установившегося режима.</p> <p><b>5.2.</b> Вектор состояния и базис установившегося режима.</p> <p><b>5.3.</b> Формирование уравнения установившегося режима.</p>	<p><b>5.</b> Уравнение установившегося режима электрической сети</p>
			<p><b>6.1.</b> Методы расчета систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима.</p> <p><b>6.2.</b> Методы расчета систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима.</p>	<p><b>6.</b> Методы расчета установившегося режима</p>
			<p><b>7.1.</b> Выражение для комплекса мощности участка электрической сети.</p> <p><b>7.2.</b> Матричная форма записи условия баланса тока в узлах электрической сети.</p> <p><b>7.3.</b> Матричное выражение для потерь мощности участка электрической сети</p>	<p><b>7.</b> Определение потерь мощности в электрических сетях</p>
<b>2.</b>	<i>ПК-2</i>	способность обрабатывать результаты экспериментов	<p><b>1.1.</b> Система энергетики как объект математического моделирования.</p> <p><b>1.2.</b> Применение комплексных чисел при анализе электрических режимов.</p> <p><b>1.3.</b> Векторные диаграммы режимных параметров электрической сети.</p> <p><b>1.4.</b> Использование матричной алгебры при расчетах режимов электрической сети.</p>	<p><b>1.</b> Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике</p>
			<p><b>2.1.</b> Общие сведения о схемах замещения.</p> <p><b>2.2.</b> Модель узла электрической сети.</p> <p><b>2.3.</b> Модель ветви электрической сети.</p>	<p><b>2.</b> Схемы замещения электрической системы и отдельных элементов электрической сети</p>
			<p><b>3.1.</b> Схема замещения электрической сети.</p> <p><b>3.2.</b> Матрицы инцидентий.</p>	<p><b>3.</b> Графы электрической сети</p>
			<p><b>4.1.</b> Формирование матричных уравнений состояния электрической сети.</p> <p><b>4.2.</b> Расчет режима электрической сети, содержащей только источники тока.</p> <p><b>4.3.</b> Расчет режима электрической сети, содержащей только источники напряжения.</p> <p><b>4.4.</b> Расчет режима электрической сети, содержащей источники тока и напряжения.</p> <p><b>4.5.</b> Независимые параметры режима.</p>	<p><b>4.</b> Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети</p>

			<b>4.6.</b> Обобщенные параметры режима.	
			<b>5.1.</b> Задачи расчета установившегося режима. <b>5.2.</b> Вектор состояния и базис установившегося режима. <b>5.3.</b> Формирование уравнения установившегося режима.	<b>5.</b> Уравнение установившегося режима электрической сети
			<b>6.1.</b> Методы расчета систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима. <b>6.2.</b> Методы расчета систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима.	<b>6.</b> Методы расчета установившегося режима
			<b>7.1.</b> Выражение для комплекса мощности участка электрической сети. <b>7.2.</b> Матричная форма записи условия баланса тока в узлах электрической сети. <b>7.3.</b> Матричное выражение для потерь мощности участка электрической сети	<b>7.</b> Определение потерь мощности в электрических сетях

### 3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

Показатели	Оценка	Критерии
<p><b>Знать</b> (ОПК-2): – основные понятия и методы линейной алгебры, теории графов, теории функции комплексной переменной, использующихся при изучении общетеоретических и специальных дисциплин и в инженерной практике;</p> <p>(ПК-2): – методы расчета режимов работы электрической сети.</p> <p><b>Уметь</b> (ОПК-2): – использовать и применять основные понятия и методы линейной алгебры, теории графов, теории функций комплексной переменной при решении математических задач;</p> <p>(ПК-2): – планировать, готовить и выполнять типовые экспериментальные исследования по заданной методике;</p> <p><b>Владеть</b> (ОПК-2): – инструментарием для решения математических и инженерных задач.</p> <p>(ПК-2): – навыками планирования, подготовки и выполнения типовых экспериментальных исследований по заданной методике.</p>	<p><b>зачтено</b></p>	<p>Обучающийся глубоко и прочно усвоил программный материал, <b>знает:</b> основные понятия и методы линейной алгебры, теории графов, теории функции комплексной переменной, использующихся при изучении общетеоретических и специальных дисциплин и в инженерной практике, методы расчета режимов работы электрической сети; <b>умеет</b> использовать и применять основные понятия и методы линейной алгебры, теории графов, теории функций комплексной переменной при решении математических задач, планировать, готовить и выполнять типовые экспериментальные исследования по заданной методике; <b>владеет</b> инструментарием для решения математических и инженерных задач, навыками планирования, подготовки и выполнения типовых экспериментальных исследований по заданной методике</p>
	<p><b>не зачтено</b></p>	<p>Обучающийся допустил существенные ошибки при ответе на вопросы, на дополнительные вопросы давал неправильные ответы; все вышеуказанные разделы не усвоены</p>

### 4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности

Дисциплина Спец математика направлена на изучение вопросов, связанных с расчетом режимов работы электрической сети.

Изучение дисциплины Спец математика предусматривает:

- лекции,
- практические занятия,
- самостоятельную работу,
- зачет.

В ходе освоения раздела 1 «Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике» студенты должны:

- уяснить, что систему энергетики можно представить в виде объекта математического моделирования;
- оценить возможность применения комплексных чисел при анализе электрических режимов;
- изучить векторные диаграммы режимных параметров электрической сети;
- оценить использование матричной алгебры при расчетах режимов электрической сети.

В ходе освоения раздела 2 «Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети» студенты должны:

- изучить общие сведения о схемах замещения;
- ознакомиться со схемами замещения узла и ветви электрической сети.

В ходе освоения раздела 3 «Графы электрической сети» студенты должны уяснить:

- принципы построения схем замещения электрической сети;
- правила построения матриц инцидентий.

В ходе освоения раздела 4 «Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети» студенты должны уяснить:

- правила формирования матричных уравнений состояния электрической сети.
- последовательность расчета режима электрической сети, содержащей только источники тока.
- выполнение расчета режима электрической сети, содержащей только источники напряжения.
- последовательность расчета режима электрической сети, содержащей источники тока и напряжения.
- изучить независимые параметры режима.
- ознакомиться с обобщенными параметрами режима.

В ходе освоения раздела 5 «Уравнение установившегося режима электрической сети» студенты должны:

- ознакомиться с задачами расчета установившегося режима;
- уяснить, что такое вектор состояния и базис установившегося режима;
- последовательность формирования уравнения установившегося режима.

В ходе освоения раздела 6 «Методы расчета установившегося режима» студенты должны уяснить:

- методы расчета систем линейных алгебраических уравнений установившегося режима;
- методы расчета систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима.

В ходе освоения раздела 7 «Определение потерь мощности в электрических сетях» студенты должны:

- познакомиться с выражением для комплекса мощности участка электрической сети;
- освоить матричную форму записи условия баланса тока в узлах электрической сети;
- ознакомиться с матричным выражением для потерь мощности участка электрической сети.

В процессе изучения дисциплины рекомендуется особо обратить внимание на методы

расчета установившегося режима.

При подготовке к зачету рекомендуется особое внимание уделить вопросам, связанным с составлением схемы замещения электрической сети и подходам к расчету режима электрической сети.

В процессе проведения практических занятий происходит закрепление теоретического материала, а также приобретение навыков владения инструментарием для решения математических и инженерных задач.

Самостоятельную работу необходимо начинать с изучения теоретического материала.

В процессе консультации с преподавателем необходимо выяснить все непонятные моменты.

Работа с литературой является важнейшим элементом в получении знаний по дисциплине. Прежде всего, необходимо воспользоваться списком рекомендуемой по данной дисциплине литературы.

## **АННОТАЦИЯ** **рабочей программы дисциплины**

### **Спец математика**

#### **1. Цель и задачи дисциплины**

Целью изучения дисциплины является: формирование у обучающихся теоретической и практической базы по методам и алгоритмам численного решения основных задач математики.

Задачей дисциплины является: формирование у обучающихся навыков составления алгоритмов, которые играют определяющую роль в вопросах программирования и численного решения инженерно-технических задач.

#### **2. Структура дисциплины**

2.1 Распределение трудоемкости по отдельным видам учебных занятий, включая самостоятельную работу: Лк - 18 ч; ПЗ - 36 ч; СР - 54 ч.  
Общая трудоемкость дисциплины составляет 108 часа, 3 зачетных единиц

##### 2.2 Основные разделы дисциплины:

1. Использование комплексных чисел и аппарата матричной алгебры в электроэнергетике;
2. Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети» студенты должны:
3. Графы электрической сети;
4. Матричная форма записи уравнений состояний электрической сети;
5. Уравнение установившегося режима электрической сети;
6. Методы расчета установившегося режима;
7. Определение потерь мощности в электрических сетях.

#### **3. Планируемые результаты обучения (перечень компетенций)**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

- ОПК-2 - способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении экспериментальных задач;
- ПК-2 - способность обрабатывать результаты экспериментов

#### **4. Вид промежуточной аттестации: зачет**

**Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе  
на 20\_\_-20\_\_ учебный год**

1. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие дополнения:

---

---

---

2. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие изменения:

---

---

---

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.,  
(разработчик)

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись)

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень бакалавриата) от «3» сентября 2015 г. №955

для набора 2015 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «12» ноября 2015г. №701, заочной формы обучения от «12» ноября 2015г. №701

для набора 2018 года и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «12» марта 2018г. №130, заочной формы обучения от «12» марта 2018г. №130

**Программу составил:**

Астапенко Н.А. ст.преподаватель кафедры ЭиЭ

\_\_\_\_\_ (подпись)

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры ЭиЭ

от «\_\_» \_\_декабря\_\_ 2018 г., протокол №\_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой ЭиЭ

\_\_\_\_\_ Ю.Н.Булатов

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий выпускающей кафедрой

\_\_\_\_\_ Ю.Н.Булатов

Директор библиотеки

\_\_\_\_\_ Т.Ф. Сотник

Рабочая программа одобрена методической комиссией ФЭиА

от «\_\_» \_\_декабря\_\_ 2018 г., протокол №\_\_\_\_\_

Председатель методической комиссии факультета

\_\_\_\_\_ А.Д.Ульянов

**СОГЛАСОВАНО:**

Начальник

учебно-методического управления

\_\_\_\_\_ Г.П. Нежевец

Регистрационный №\_\_\_\_\_

