

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра воспроизводства и переработки лесных ресурсов**

УТВЕРЖДАЮ:  
Проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_ Е.И. Луковникова  
«\_\_\_\_\_» декабря 2018 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ**

**Б1.Б.11**

**НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ**

**35.03.02 Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих  
производств**

**ПРОФИЛЬ ПОДГОТОВКИ**

**Лесоинженерное дело**

Программа академического бакалавриата

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

<b>1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ .....</b>	<b>3</b>
<b>2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ .....</b>	<b>4</b>
<b>3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ</b>	<b>5</b>
3.1 Распределение объёма дисциплины по формам обучения.....	5
3.2 Распределение объёма дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости .....	5
<b>4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>6</b>
4.1 Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий .....	6
4.2 Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам .....	7
4.3 Лабораторные работы.....	74
4.4 Семинары практические занятия.....	74
4.5. Контрольные мероприятия: курсовой проект (курсовая работа), контрольная работа, РГР, реферат.....	74
<b>5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>75</b>
<b>6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ</b>	<b>76</b>
<b>7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....</b>	<b>76</b>
<b>8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО – ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>76</b>
<b>9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....</b>	<b>77</b>
9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению практических работ..	79
<b>10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....</b>	<b>83</b>
<b>11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....</b>	<b>83</b>
<b>Приложение 1. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.....</b>	<b>84</b>
<b>Приложение 2. Аннотация рабочей программы дисциплины .....</b>	<b>90</b>
<b>Приложение 3. Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе .....</b>	<b>91</b>
<b>Приложение 4. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости по дисциплине.....</b>	<b>92</b>

# 1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

## Вид деятельности выпускника

Дисциплина охватывает круг вопросов, относящихся к научно-исследовательской и производственно-технологической деятельности в соответствии с компетенциями и видами деятельности, указанными в учебном плане.

## Цель дисциплины

Подготовка обучающихся к самостоятельному решению научно-исследовательских задач лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств с использованием современного компьютерного и программного обеспечения.

## Задачи дисциплины

Научить обучающихся использовать математические методы в технических приложениях; использовать возможности вычислительной техники и программного обеспечения; самостоятельно формулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения, организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения.

Код компетенции 1	Содержание компетенций 2	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине 3
ОПК-1	способность понимать научные основы технологических процессов в области лесозаготовительных производств	<b>знать:</b> - методы получения математических моделей технологических процессов; - математические методы и программы ЭВМ для решения моделей. <b>уметь:</b> - использовать математические методы в технических приложениях; - самостоятельно формулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения, организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения. <b>владеть:</b> - математическими методами планирования эксперимента для получения математических моделей описания технологических процессов; - методами статистической обработки результатов эксперимента и проверки адекватности математической модели.

ПК-2	способность использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования.	<p><b>знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методы получения математических моделей технологических процессов;</li> <li>- математические методы и программы ЭВМ для решения моделей.</li> </ul> <p><b>уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- самостоятельно формулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения, организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения.</li> </ul> <p><b>владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- математическими методами планирования эксперимента для получения математических моделей описания технологических процессов;</li> <li>- методами статистической обработки результатов эксперимента и проверки адекватности математической модели.</li> </ul>
ПК-12	способность выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.	<p><b>знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-основные понятия и методы математического анализа</li> </ul> <p><b>уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать математические методы в технических приложениях;</li> </ul> <p><b>владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-самостоятельно формулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения</li> <li>-организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения</li> </ul>

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.Б.11 Моделирование и оптимизация процессов относится к базовой части.

Дисциплина Моделирование и оптимизация процессов базируется на знаниях, полученных при изучении таких учебных дисциплин, как: математика, физика, методы и средства научных исследований.

Основываясь на изучении перечисленных дисциплин, моделирование и оптимизация процессов деревообработки представляет основу для изучения дисциплин: Техническое обслуживание и ремонт лесного оборудования, Технология и машины лесовосстановительных работ..

Такое системное междисциплинарное изучение направлено на достижение требуемого ФГОС уровня подготовки по квалификации бакалавр.

### 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1. Распределение объема дисциплины по формам обучения

Форма обучения	Курс	Семестр	Трудоемкость дисциплины в часах						Курсовая работа (проект), контрольная работа, реферат, РГР	Вид промежуточной аттестации
			Всего часов (с экз.)	Аудиторных часов	Лекции	Лабораторные работы	Практические занятия	Самостоятельная работа		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Очная		-	-	-	-	-	-	-	-	-
Заочная	4	-	180	22	10	-	12	149	-	экзамен
Заочная (ускоренное обучение)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Очно-заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

#### 3.2. Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкость

Вид учебных занятий	Трудоемкость (час.)	в т.ч. в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)	Распределение по курс, час
			4
1	2	3	4
<b>I. Контактная работа обучающихся с преподавателем (всего)</b>	22	6	22
Лекции (Лк)	10	2	10
Практические занятия (ПЗ)	12	4	12
Групповые (индивидуальные) консультации	+	-	+
<b>II. Самостоятельная работа обучающихся (СР)</b>	149	-	149
Подготовка к лабораторным работам	56	-	56
Подготовка к практическим занятиям	57	-	57
Подготовка к экзамену в течение семестра	36	-	36
<b>III. Промежуточная аттестация</b> экзамен	9	-	9
Общая трудоемкость дисциплины	час.	180	180
	зач. ед.	5	5

#### 4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### 4.1. Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий - для заочной формы обучения:

№ раздела и темы	Наименование раздела и тема дисциплины	Трудоемкость, (час.)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)		
			учебные занятия		самостоятельная работа обучающихся
			лекции	практические занятия	
1	2	3	4	5	6
<b>1.</b>	<b>Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.</b>	<b>56</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>49</b>
1.1.	Введение. Этапы оптимизационного исследования. Определение математических моделей. Требования к математическим моделям. Классификация математических моделей. Общая постановка задачи исследования операций. Критерий оптимальности. Многокритериальные задачи исследования операций. Методы свертки критериев.	56	3	4	49
<b>2.</b>	<b>Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.</b>	<b>59</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>52</b>
2.1.	Введение в линейное программирование. Задачи линейного программирования. Основная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация основной задачи линейного программирования. Графическое решение основной задачи линейного программирования методом перестановок. Алгоритм преобразования стандартной таблицы в симплекс-методе. Нахождение опорного и оптимального решения задачи линейного программирования. Формулировка двойственной задачи линейного программирования. Экономическая интерпретация прямой и двойственной задач линейного программирования.	59	3	4	52

3.	<b>Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.</b>	<b>56</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>48</b>
3.1	Формулировка транспортной задачи. Нахождение опорного плана. Улучшение плана перевозок. Решение транспортной задачи методом потенциалов. Транспортные задачи с неправильным балансом. Постановка задачи нелинейного программирования. Методы отыскания экстремума для функции одной переменной. Методы отыскания экстремума для функции нескольких переменных. Методы имитационного моделирования. Исследования на имитационной модели.	56	4	4	48
	<b>ИТОГО</b>	<b>171</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>149</b>

#### 4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам.

##### Раздел 1. Введение. Этапы оптимизационного исследования. Определение математических моделей.

**Математической моделью объекта** называется совокупность математических зависимостей, описывающих его функционирование.

Наиболее типичными объектами исследований в деревообработке являются технологические процессы механической обработки, сушки, пропитки, склеивания, прессования древесины, нанесение защитно-декоративного покрытия. Все они достаточно сложны, поэтому при математическом описании их неизбежно приходится упрощать, огрублять, пренебрегая второстепенными факторами и обращая внимание на существенные. Успех или неудача исследования во многом предопределяется выбором способа описания объекта, вида математической модели. Математические модели получают двумя основными методами: теоретическим и экспериментальным. Соответственно различают аналитические модели, построенные теоретическими методами, и эмпирические модели, полученные по результатам обработки экспериментальных данных. Поясим природу аналитических моделей.

Любой технологический процесс деревообработки включает некоторые физические процессы: перемещение вещества, тепло- и массоперенос, химические превращения. Перемещение вещества может быть связано с нарушением внутренних связей, что типично для процессов механической обработки древесины - резания, раскалывания, измельчения, обработки давлением. Физические процессы тепло- и массопереноса лежат в основе сушки и пропитки древесины. Технологические процессы склеивания и отделки сопровождаются химическими превращениями

Теоретическое описание физических процессов базируется на общих законах природы: законах сохранения материи и энергии, некоторых физических принципах и законах, установленных опытным путем. Закон сохранения материи можно записать в виде уравнений материальных балансов:

для динамики процесса

$$\text{приход} = \text{убыль} + \text{приращение};$$

для статики процесса

$$\text{приход} = \text{убыль}.$$

При построении моделей эти уравнения записывают с использованием понятия поток вещества. Поток вещества - это количество поступившего или ушедшего вещества за фиксированный отрезок времени через единицу поверхности.

Закон сохранения материи записывается в виде выражения (1.2) в том случае, когда рассматривается поток вещества, проходящий через определенное сечение. Для потоков вещества, поступающих в некоторую емкость и выходящих из нее, применяется форма (1.1). Закон сохранения энергии записывается аналогично (1.1) и (1.2) по приходу, убыли и приращению энергии.

Рассмотрим примеры построения моделей на основе закона сохранения материи.

### Определение математических моделей

Обозначим через  $V_1$  входящий поток круглого сырья, выходящие потоки:  $V_2$  - поток пиломатериалов;  $V_3$  - поток технологической щепы;  $V_4$  - поток опилок;  $V_5$  - поток потерь на усушку и распыл. Уравнение материального баланса запишем в следующем виде:

$$V_1 = V_2 + V_3 + V_4 + V_5.$$

Взяв производные по времени от его обеих частей, получим дифференциальную форму уравнения

$$dV_1/dt = dV_2/dt + dV_3/dt + dV_4/dt + dV_5/dt.$$

Уравнение (1.4) задает связь между скоростями изменения входных и выходных потоков, т. е. между производительностью линии по пропуску сырья  $dV_1/dt$ , производительностью линии по выработке пиломатериалов  $dV_2/dt$ , по выработке технологической щепы  $dV_3/dt$  и т. д.

### Математическая модель получения проклеенной массы в производстве двп

В ящике непрерывной проклейки, снабженном мешалкой, происходит смешивание древесноволокнистой массы (поток  $Q_1$ ) с пропитывающей добавкой (поток  $Q_2$ ), гидрофобной добавкой (поток  $Q_3$ ) и осадителем (поток  $Q_4$ ). В результате смешивания получается проклеенная масса, поток которой обозначим через  $Q_5$ . Модель данного процесса можно записать на основе соотношения (1.1):

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_5 = \Delta Q_5.$$

Приращение  $\Delta Q_5$ , рассматриваемое за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ , представляет собой производную  $dQ_5/dt$ . Модель принимает следующий вид:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_5 t.$$

### Математическая модель движения частицы стружечной массы

Модель строится на основе физических законов. (Головач В. М. Повышение качества формирования древесностружечного ковра.

Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. – М).

Для контроля качества формирования древесностружечного ковра при производстве ДСтП необходимо изучить движение частиц стружечной массы при насыпке осмоленных древесных частиц на движущийся поддон или ленточный конвейер. Рассмотрим модель движения одиночной осмоленной древесной частицы. На свободно падающую частицу будут действовать сила тяжести  $mg$  и сила сопротивления воздуха  $F$ , пропорциональная квадрату скорости:

$$F = c_x S \rho v^2 / 2$$

где  $m$  - масса частицы;

$g$  - ускорение свободного падения;

$c_x$  - коэффициент лобового сопротивления;

$S$  - так называемое миделево сечение - площадь проекции частицы на плоскость, перпендикулярную к направлению скорости ее падения;

$\rho$  - плотность воздуха;

$v$  - скорость частицы.



Второй закон Ньютона для движения частицы при ее свободном падении можно записать в виде

$$m (dv/dt) = mg - c_x S p v^2 / 2.$$

После разделения переменных получим

$$dv / (g - av^2) = dt$$

где  $a = c_x S p / 2m$ . После интегрирования дифференциального уравнения (1.5) получим

$$\frac{1}{2\sqrt{ag}} \ln \left| \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{a}}{\sqrt{g} - v\sqrt{a}} \right| = t + C.$$

Значение постоянной интегрирования  $C$  найдем из начальных условий. Примем, что при  $t = 0$ , то есть в момент отрыва от конвейера питателя, древесная частица имеет скорость  $v = 0$ . Подставив значения  $t = 0$  и  $v = 0$  в формулу (1.6), получим  $C = 0$ . С учетом этого найдем из (1.6) выражение для скорости частицы:

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}} \frac{e^{2\sqrt{ag}t} - 1}{e^{2\sqrt{ag}t} + 1} = \sqrt{\frac{g}{a}} \left( 1 - \frac{2}{e^{2\sqrt{ag}t} + 1} \right).$$

Из полученной модели (1.7) движения древесной частицы следует, что скорость ее с момента отрыва монотонно возрастает, стремясь к предельному значению  $v_{пр}$ , равному

$$v_{пр} = \lim_{t \rightarrow \infty} v = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

#### **Требования к математическим моделям. Классификация математических моделей. Общая постановка задачи исследования операций.**

Построение модели основано на использовании как закона сохранения энергии, так и физических законов. Данный процесс может быть описан дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка - уравнение теплопроводности Фурье. Это уравнение широко используется для описания процессов теплопереноса при прессовании древесностружечных и древесноволокнистых плит. Рассмотрим его вывод для простейшего случая, когда тепло распространяется по длине однородного изотропного теплоизолированного стержня вдоль координаты  $x$ . Возьмем два сечения стержня на расстоянии  $\Delta x$  друг от друга. Соответствующие им значения координаты обозначим через  $x$  и  $(x + \Delta x)$ . Обозначим через  $\Delta Q$  приращение количества тепла в полученном элементе за некоторый промежуток времени  $\Delta t$ . Величина  $\Delta Q$  равна  $c m \Delta T$ , где  $c$  - удельная теплоемкость;  $m$  - масса элемента стержня;  $\Delta T$  - изменение его температуры за время  $\Delta t$ . Если теперь вместо промежутка времени  $\Delta t$  взять единичный промежуток времени, то соответствующее приращение количества тепла  $dq$  будет равно  $dq = \Delta Q / \Delta t = c m \Delta T / \Delta t$ . Переходя здесь к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим  $dq = c m dT / dt$ . Представим массу элемента как произведение его плотности  $\rho$ , площади поперечного сечения  $\sigma$  и длины  $\Delta x$ . Тогда

$$dq = c \rho \sigma \Delta x (dT / dt).$$

Согласно закону сохранения энергии приращение  $dq$  равно алгебраической сумме количеств тепла, поступивших в рассматриваемый элемент за единицу времени через сечения  $x$  и  $(x + \Delta x)$ . Обозначим эти количества тепла через  $q_1$  и  $q_2$ :

$$dq = q_1 - q_2.$$

Выражения для  $q_1$  и  $q_2$  получим из закона внутренней теплопроводности в твердых телах (закона Фурье). В одномерном случае  $q = -\sigma$ , где  $q$  - количество тепла, протекающее через площадку  $a$ , перпендикулярную к оси  $x$ ;  $X$  - коэффициент теплопроводности. Выражение (1.9) поэтому можно переписать в виде:

$$dq = -\sigma \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x + \sigma \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}$$

Поделив обе части на  $\Delta x$  и учтя (1.8), получим

Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , придем к искомому уравнению теплопроводности:

где  $a$  - коэффициент температуропроводности,  $a = a_{\text{ср}}$ .

Аналогичный вид имеет уравнение влагопроводности, описывающее распределение влажности в теле и используемое в теории сушки древесины.

### Классификация математических моделей.

В некоторых случаях закономерности протекания различных процессов можно описать, используя общие соображения. Пусть  $y$  - величина, характеризующая количество определенной продукции (в широком смысле), созданной человеком или природой к настоящему моменту времени  $t$ . Это может быть, например, количество товаров, биомасса растущего дерева, число изобретений, количество публикаций в некоторой научной области и т. д. Иногда можно предположить, что приращение  $\Delta y$  этой величины за промежуток времени  $\Delta t$  пропорционально самой величине  $y$  и длине промежутка, т. е.  $\Delta y = a y \Delta t$ , где  $a$  - коэффициент. Переходя к бесконечно малым приращениям, получим дифференциальное уравнение  $dy/dt = ay$ .

Приняв за начало отсчета  $t = t_0 = 0$ , получим решение этого уравнения в виде  $y = y_0 e^{at}$ . График этой зависимости представляет собой экспоненциальную кривую (рис. 1.1, а). Здесь - это значение  $y$  при  $t = 0$ .

Такой экспоненциальный рост действительно свойствен процессам, имеющим лавинообразный характер, когда прирост пропорционален достигнутому уровню и нет ограничений роста. Эта же зависимость справедлива и для описания общей закономерности развития науки и техники в эпоху НТР.

Допустим теперь, что процесс расширенного воспроизводства протекает в условиях ограниченности ресурсов. Тогда его иногда можно описать следующим дифференциальным уравнением, справедливым в предположении, что скорость прироста  $dy/dt$  возрастает пропорционально количеству полученного продукта и снижается по мере исчерпания ресурсов:

$$dy/dt = a [1 - (y/k)]y,$$

где  $k$  - коэффициент.

В результате интегрирования этого уравнения (при  $t_0 = 0$ ) получаем  $y = k / (1 + be^{-at})$ , где  $b = (k/y_0) - 1$ .

Это уравнение описывает так называемую логистическую кривую (рис. 1.1, б). При  $t \rightarrow \infty$  ордината этой кривой стремится к асимптоте  $y = k$ . На начальном участке, т. е. при малой степени использования ресурсов, она сходна с экспонентой. Логистические кривые хорошо описывают различные процессы «с насыщением», в том числе и развитие во времени функциональных характеристик различных технических устройств.

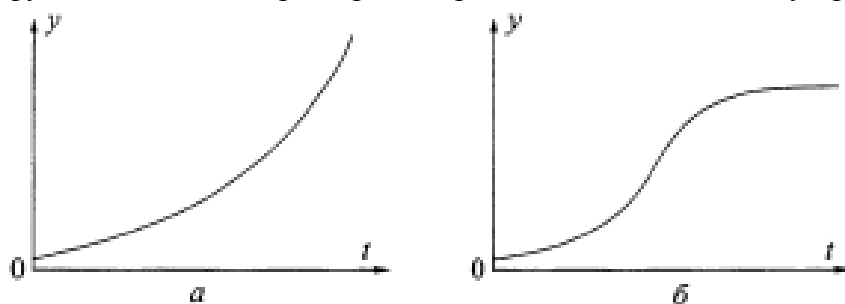


Рис. 1.1. Простейшие модели развития:

а - экспоненциальная кривая; б - логистическая кривая

Законы развития систем в действительности более сложны. Так, технические системы, исчерпав ресурсы своего развития, переходят на следующий уровень уже в качестве подсистем по отношению к новым, более сложным системам.

Достоверное математическое описание любого технологического процесса в деревообработке и в других отраслях - достаточно трудная задача. Помимо описания входящих в его состав физических процессов в этих случаях требуется, как правило, рассмотрение сложных взаимосвязей выпуска продукции с наличием запасов, поступлением сырья, полуфабрикатов, работой оборудования и т.д. Кроме того, математическому

описанию подлежат, как правило, многочисленные транспортно-переместительные операции при погрузке, разгрузке и сортировании материалов. Поэтому для построения математических моделей технолого-гических процессов деревообработки наряду со сформулированными выше физическими законами и принципами широко используются самые разнообразные математические методы - как традиционные, так и специально разработанные в исследовании операций.

Аналитические методы построения моделей, как правило, применяют в сочетании с экспериментальными, поскольку математическое описание объекта, полученное аналитическими методами, обычно содержит константы, значения которых определяют по результатам эксперимента. Например, при проектировании систем пневмотранспорта технологической щепы от рубительной машины к бункеру используют в качестве математической модели уравнение Дарси, связывающее потери давления воздушного потока  $H$  с длиной трубы  $l$ , ее диаметром  $d$  и скоростью воздуха  $v$ :

$$H = \lambda(l/d)\rho(v^2/2),$$

где  $\rho$  - плотность воздуха;

$\lambda$ - коэффициент гидравлического сопротивления, зависящий от параметров  $v$ ,  $d$  и шероховатости трубы  $A$ .

Зависимость  $X = f(v, d, A)$  устанавливают экспериментальными методами. Этими методами уточняют также вид математической модели и проверяют ее достоверность.

Экспериментальные методы получения математических моделей объектов играют доминирующую роль в тех случаях, когда исследуемый процесс слишком сложен для того, чтобы можно было получить его теоретическое описание, например, при описании силовых и качественных характеристик процессов механической обработки древесины.

Статистическую обработку результатов эксперимента при получении эмпирических моделей часто проводят методом регрессионного анализа. Такие эмпирические модели называют регрессионными. Рекомендациями, связанными с составлением экспериментальных планов и получением математических моделей по результатам их реализации, занимается специальная дисциплина - планирование эксперимента.

В зависимости от способа представления информации различают детерминированные и вероятностные (или стохастические) математические модели. Вероятностные модели содержат случайные параметры, поэтому результат расчета по такой модели - это либо вероятность наступления определенного события, либо статистическая оценка некоторой случайной величины. Пример вероятностной модели - модель расходования запасов для сборочного цеха мебельного комбината, с помощью которой можно рассчитать вероятность наличия того или иного объема запасов деталей на складе. Все регрессионные модели также являются вероятностными, поскольку для них выходной величиной является статистическая оценка условного математического ожидания некоторого параметра.

В отличие от вероятностной, детерминированная модель однозначно предсказывает значение выходной величины при заданных значениях входных параметров. Пример детерминированной модели - рассмотренная выше зависимость (1.11). Область основного применения вероятностных моделей исследования операций - описание объектов в условиях неопределенности, т. е. при отсутствии некоторых сведений об условиях его функционирования.

В зависимости от фактора времени математические модели принято делить на статические и динамические. В динамических моделях рассматриваются характеристики объекта, меняющиеся во времени; в статических эти параметры предполагаются не зависящими от времени.

Кибернетика внесла в современную науку понятие о моделировании как о новом эффективном методе познания окружающей действительности. По этому методу изучение самого объекта - оригинала - ведется посредством изучения другого объекта - модели, - имеющего сходство с оригиналом. Под сходством имеют в виду подобие свойств, соотношений или общность основных законов функционирования оригинала и модели. Моделирование означает построение модели объекта и исследование его на построенной модели. Такой метод познания окружающей действительности играет все более значительную роль в современной науке и технике.

Кроме математических моделей, в науке и технике используют модели других видов, например, предметные модели, т.е. модели, представляющие собой материальные объекты. Различают физические и аналоговые предметные модели. Если предметная модель и моделируемый объект имеют одну и ту же физическую природу, то говорят о физическом моделировании и, соответственно, о физических моделях.

С помощью физических моделей изучают, например, явления, возникающие при обтекании твердых тел жидкостью и газом на их уменьшенных копиях. Так, сопротивление воды движению бревен в реке можно исследовать на небольших цилиндрах, погруженных в лоток с жидкостью. При физическом моделировании характеристикам моделируемого объекта соответствуют одноименные характеристики модели: скорости - скорость; времени - время и т.д. Необходимыми условиями для физического моделирования являются геометрическое (подобие формы) и физическое подобие. Последнее означает пропорциональность значений исследуемых параметров оригинала и модели в соответствующие моменты времени и в соответствующих точках пространства. Благодаря физическому подобию значение исследуемого параметра для оригинала можно получить, умножив значение этого параметра, полученное в эксперименте на модели, на некоторый коэффициент. Этот коэффициент, постоянный для всех величин данной размерности, называется коэффициентом подобия. Например, коэффициент подобия длин  $K_l$  равен отношению длин сходственных элементов оригинала и модели:

где индекс 1 соответствует исследуемому объекту, а индекс 2 - модели.

Физические величины, как известно, связаны между собой определенными соотношениями. Если некоторые из них выбрать в качестве основных, то коэффициенты подобия для всех других величин можно выразить через коэффициенты подобия основных величин. Так, поскольку скорость равна  $v = l/t$ , то коэффициент подобия скоростей  $K_v = v_1/v_2$  можно выразить через коэффициенты подобия длин  $K_l$  и времени  $K_t$ :

$$K_v = v_1/v_2 = (l_1/t_1)/(l_2/t_2) = (l_1/l_2)/(t_2/t_1) = K_l/K_t$$

Аналогично коэффициент подобия для ускорений равен  $K_a = K_v/K_t$ . Согласно теории подобия для данного физического явления существует определенное количество безразмерных комбинаций величин, характеризующих это явление. Эти безразмерные комбинации величин, называемые критериями подобия, должны иметь одно и то же значение для исследуемого объекта и его модели.

Рассмотрим, например, критерий подобия Ньютона, который является основным критерием при физическом моделировании процессов динамики твердых тел и жидкостей. Обозначив коэффициент подобия масс через  $K_m = m_1/m_2$  найдем из второго закона Ньютона связь между коэффициентом подобия для сил  $K_F$  и остальными коэффициентами подобия:

$$K_F = F_1/F_2 = (m_1 a_1)/(m_2 a_2) = K_m K_a = (K_m K_v)K_t = (K_m K_l)/(K_t^2)$$

Рассмотрим теперь безразмерное выражение и выразим в нем значения через соответствующие параметры модели и коэффициенты подобия согласно формулам (1.12) - (1.15):

$$(m_1 v_1^2)/(F_1 l_1) =$$

Таким образом, безразмерное выражение  $m v^2/(F l)$  должно иметь одну и ту же величину для оригинала и модели. Значение этого выражения называется числом Ньютона. При моделировании гидравлических явлений используют и другие критерии - Рейнольдса, Фруда. Необходимым условием физического моделирования является равенство всех критериев подобия для оригинала и модели. Поскольку построить модель, удовлетворяющую всем критериям, как правило, не удается, прибегают к приближенному моделированию, при котором исследуются только важнейшие характеристики объекта.

При аналоговом моделировании, в отличие от физического, природа исследуемого объекта и его модели различны, но функционирование обоих описывается одними и теми же математическими соотношениями. Рассмотрим, например, механические колебания пружинного маятника, то есть груза массы  $m$ , подвешенного на пружине, и изменения тока в колебательном контуре, содержащем последовательное соединение постоянной ЭДС  $E$ ,

емкости  $C$  и индуктивности  $L$ . Оба эти процесса описываются одним и тем же дифференциальным уравнением. Действительно, на груз массы  $m$ , смещенный из положения равновесия на величину  $x$ , действуют сила тяжести  $mg$  и сила упругости пружины  $kx$ . Тогда, по второму закону Ньютона,  $m\ddot{x} = mg - kx$ .

Для колебательного контура согласно второму закону Кирхгофа имеем где  $i$  - ток в контуре;

$q$  - заряд на пластинах конденсатора.

Подставив в формулу (1.18)  $i = dq/dt$ , получим

$L$

Из сопоставления уравнений (1.17) и (1.19) следует, что колебания электрических зарядов в рассматриваемом контуре происходят по тому же закону, что и колебания груза в пружинном маятнике.

Вследствие этой и подобных аналогий на электрических моделях, более удобных для исследований, можно изучать механические, а также гидравлические и другие явления. Примером аналогового моделирования может служить моделирование на аналоговых вычислительных машинах (АВМ). Следует отметить, что возрастающие возможности цифровой вычислительной техники обусловили постепенное уменьшение использования методов аналогового моделирования и увеличение применения моделирования на электронных цифровых вычислительных машинах (ЭВМ). В этом случае на ЭВМ осуществляется исследование введенной в нее математической модели объекта.

Приведенную классификацию моделей можно несколько расширить, учитывая, что математические модели обычно включают в разряд так называемых знаковых моделей. К ним относятся помимо математических моделей описания объектов с помощью схем, логических схем алгоритмов, графов, чертежей, номограмм и т. п. Кроме того, отдельно рассматривают имитационные модели объектов, реализуемые на ЭВМ.

### **Критерий оптимальности. Многокритериальные задачи исследования операций. Методы свертки критериев.**

Имеется некоторое число пунктов на местности, связанных сетью дорог (рис. 5.2). Требуется найти кратчайший путь по этим дорогам из начального пункта А в конечный пункт М. На рис. 5.2 имеющиеся дороги обозначены отрезками прямых, числа над ними - это расстояния между пунктами.

В соответствии со схемой динамического программирования следует разбить процесс на этапы, или шаги, и выделить соответствующие состояния системы. Последнее,  $n$ -е, состояние, естественно, должно соответствовать попаданию в точку М. Рассмотрим в качестве предпоследнего,  $(n - 1)$ -го, состояния попадание в один из тех пунктов, откуда можно прийти в пункт М только за один переход, причем отсутствуют маршруты, позволяющие сделать это за два или более переходов. Очевидно, таким условиям удовлетворяют пункты Л и К, но не пункт И, так как для него, кроме маршрута И - М, есть еще путь И - К - М, состоящий из двух переходов. С состоянием  $(n - 2)$  поставим в соответствие пункты, для которых наибольшее число переходов до пункта М равно двум, с состоянием  $(n - 3)$  - пункты с наибольшим числом переходов, равным трем и т. д. Тогда состоянию  $(n - 2)$  соответствует только один пункт И; состоянию  $(n - 3)$  - пункты Г и З; состоянию  $(n - 4)$  - пункты В и Е; состоянию  $(n - 5)$  - пункты Б и Д. Состоянию  $(n - 6)$  соответствует только начальный пункт А. Начальное состояние обычно считается нулевым, поэтому число состояний в данной задаче равно  $n = 6$ .

Таким образом, пункты маршрута приведены в соответствие состояниям системы следующим образом:

Номер состояния..... 0 1 2 3 4 5 6  
Пункты..... А Б,Д В,Е Г,З И Л,К М

Сначала решаем задачу для последнего, шестого, шага. Здесь отыскиваются оптимальные участки маршрута от пунктов, соответствующих пятому состоянию, т. е. Л и К, до пункта М. Оптимальное управление состоит в выборе кратчайшего маршрута. На данном шаге выбора

нет: каждый из пунктов Л и К соединен с пунктом М только одним переходом, который и будет условным оптимальным управлением. На рис. 5.2 маршрут, соответствующий условному оптимальному управлению, выделен двойной линией. Критерий оптимальности всей задачи - это минимум суммарной длины маршрута. Значения целевой функции на данном последнем шаге - это просто расстояния от пунктов Л и К до пункта М. Эти числа записаны в рамках рядом с соответствующими пунктами.

Перейдем к оптимизации предпоследнего, пятого, шага. Здесь рассматривается только пункт И. Кратчайший из двух маршрутов от него до пункта М - это путь в один переход И - М, длина которого равна 4 ед. На четвертом шаге анализируем маршруты из пунктов Г и З. Для пункта Г есть два варианта окончания маршрута: первый - через пункт Д второй - через пункт И. Для отыскания лучшего варианта надо сравнить длины этих фрагментов, предполагая, что при попадании в пункт Л или И дальнейшее движение происходит по оптимальному маршруту (пользуемся принципом оптимальности).

Это окончание маршрута нам уже известно по результатам оптимизации последнего шага. Поэтому для определения длины каждого участка маршрута из пункта Г достаточно сложить длину первого перехода из этого пункта с числом, стоящим над пунктом, которым данный переход оканчивается. Так, длина участка маршрута от пункта Г до М через пункт Л равна  $6 + 5 = 11$ , а через пункт И равна  $5 + 4 = 9$ . Кратчайшим, следовательно, будет путь через пункт И. Поэтому участок Г - И выделяем двойной линией, а над пунктом Г проставляем число 9 - оптимальное расстояние от него до пункта М. Теперь уже, каким бы путем мы ни попали в пункт Г, оптимальное окончание маршрута нами получено: это путь Г - И - М. Аналогичным образом из двух вариантов маршрутов из точки З оптимален путь через пункт И. Соответствующее расстояние до точки М равно 6. Таким же способом оптимизируются третий и второй шаги. Найденные оптимальные маршруты и соответствующие расстояния приведены на рис.5.2.

Отметим, что при выборе маршрута из пункта Д можно принять любое решение: длина пути через пункт Е и через пункт И оказалась одинаковой и равной  $11 : 2 + 9 = 7 + 4$ . Для определенности на рис. 5.2 изображен первый вариант. То же можно сказать о пункте Б, где из трех возможных путей два оказываются одинаково эффективными. Остается 1-й шаг, на котором предстоит выбрать одно из четырех возможных направлений движения из пункта А. Для этого сравниваем длины маршрутов из А через Б, В, Д и Е. Они равны, соответственно,  $4 + 13 = 17$ ;  $6 + 11 = 17$ ;  $6 + 11 = 17$ ;  $7 + 9 = 16$ . Длина последнего маршрута оказалась минимальной. Поэтому из пункта А следует перейти в пункт Е и далее, выбирая каждый раз найденный ранее оптимальный путь. Таким образом, кратчайший маршрут длиной 16 единиц проходит через пункты А, Е, З, И, М.

На этом же примере легко показать, что попытка оптимизировать каждый шаг в отдельности не приводит к получению оптимального решения задачи. В самом деле, действуя таким образом, т.е. отыскивая на каждом шаге переход минимальной длины, мы на 1-м шаге приходим из пункта А в Б, на 2-м - из Б в В и далее по маршруту Г - И - М. Длина всего пути составит 18 единиц - хуже, чем в оптимальном решении.

## **Многокритериальные задачи исследования операций**

В качестве примера задачи распределения ресурсов рассмотрим один из вариантов задачи о реконструкции. Предположим, что в составе производственного объединения имеется четыре предприятия, подлежащие реконструкции. Общий объем средств, выделенных на реконструкцию всех предприятий, составляет 100 условных единиц. Количество средств, вложенных в любое предприятие, должно быть кратно 20. В табл. 5.1 приведена величина ежегодной прибыли  $F_i$ , которую получило бы каждое предприятие после реконструкции, зависимости от объема  $x$  вложенных средств.

Как видно из табл. 5.1, зависимость прибыли от количества вложенных средств для каждого предприятия является возрастающей, но не линейной функцией, причем для разных предприятий она различна. Требуется выяснить, как распределить имеющиеся средства по предприятиям чтобы суммарная прибыль в результате реконструкции оказалась максимальной.

Выделение средств $x$	Прибыль предприятия			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
1	2	3	4	5
0	0	0	0	0
20	6	5	9	3
40	9	6	11	5
60	10	8	13	6
80	13	9	14	9
100	15	10	15	11

Для удобства деления на этапы будем условно предполагать, что процесс реконструкции происходит последовательно: на первом этапе выделяются средства на реконструкцию первого предприятия; на втором этапе - на реконструкцию второго и т. д. Номер этапа, таким образом, соответствует номеру предприятия, для которого выделяются средства. Управлением на каждом шаге является объем  $u_i$  средств, выделенных на реконструкцию  $i$ -го предприятия,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

В соответствии с идеей метода динамического программирования решение задачи начинается с последнего шага. Различные состояния процесса к началу этого шага будут соответствовать разному количеству средств  $x$ , оставшихся к данному моменту. Оптимальное решение на последнем шаге и  $u_4^*$  принимается просто: в реконструкцию последнего предприятия вкладываются все оставшиеся средства, то есть  $u_4^* = x$  (вторая графа табл.). Величина условного оптимального выигрыша на этом этапе, которую мы обозначим  $W_4^*(x)$ , будет равна соответствующему значению прибыли четвертого предприятия:  $W_4^*(x) = F_4(x)$ . Теперь можно заполнить третью графу табл. 5.2. В ней переписаны значения прибыли четвертого предприятия из 5-й графы табл. 5.1.

Перейдем к оптимизации предыдущего, третьего, шага. Пусть к началу его объем средств равен  $x$ . Это средства, выделенные на реконструкцию третьего и четвертого предприятий. Если для третьего предприятия решено выделить  $u_3$  единиц, то для четвертого останется  $(x - u_3)$ . Поэтому выигрыш на двух последних шагах будет равен

$$F_3(u_3) + W_4(x - u_3)$$

$x$	$i=4$		$i=3$		$i=2$		$i=1$	
	$u_4^*(x)$	$W_4^*(x)$	$u_3^*(x)$	$W_3^*(x)$	$u_2^*(x)$	$W_2^*(x)$	$u_1^*(x)$	$W_1^*(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	20	3	20	9	0	9		
40	40	5	20	12	20	14		
60	60	6	20	14	20	17		
80	80	9	40	16	20	19		
100	100	11	20	18	20	21	40	26

Последнее слагаемое - это выигрыш на четвертом этапе. Руководствуясь принципом оптимальности, следует искать такое управление на третьем шаге, которое обратит в максимум выигрыш на третьем шаге в сумме с максимальным выигрышем на четвертом шаге, т. е. величину

$$F_3(u_3) + W_4^*(x - u_3).$$

В результате будет получен максимальный условный выигрыш на двух последних шагах. Эту величину обозначим через  $W_3^*(x)$ . Таким образом,  $W_3^*(x)$ .

Чтобы найти  $W_3^*(x)$  придется перебрать все возможные значения управления  $u_3$  на третьем шаге при различных количествах средств  $x$ , вложенных к началу данного шага. Эти величины приведены в первой и второй графах табл. 5.3. Так, для  $x = 20$  управление  $u_3$  может принимать одно из двух значений: 0 или 20; для  $x = 40$  - одно из трех значений: 0, 20, 40 и т. д. (табл. 5.3, графа 2). Соответствующие значения выигрыша на третьем шаге  $F_3(u_3)$  взяты из четвертой графы табл. 5.1 и переписаны в четвертой графе табл. 5.3. Аргументом величины

$W_4$  в (5.2) является выражение  $(x - u_3)$ . Его значения для различных  $u_3$  приведены в третьей графе табл. 5.3. Соответствующие значения  $W_4^*(x - u_3)$  взяты из третьей графы табл. 5.2 и вписаны в пятой графе табл. 5.3. Например, для  $x = 20$  и  $u_3 = 0$ ,  $x - u_3 = 20$ ;  $F_3(0)=0$  (см. табл. 5.1);  $W_4^*(20) = 3$  (см. графу 3, табл. 5.2). Сумма величин  $F_3(u_3)$  и  $W_4^*(x - u_3)$ , т. е. в четвертой и пятой графах табл. 5.3, приведена в шестой графе этой таблицы. Это не что иное, как выражение в фигурных скобках формулы (5.2). Теперь для определения  $W_3^*(x)$  по этой формуле достаточно найти максимальное из чисел в шестой графе для каждого  $x$ . Эти числа здесь обведены и вписаны в пятой графе табл. 5.2.

В четвертую графу вписаны соответствующие оптимальные управления. Например, для  $x = 20$  условным оптимальным управлением на третьем шаге будет  $u_3 = 20$ , поскольку ему соответствует наибольшая величина выигрыша,  $W_3^* = 9$ .

Если максимальными оказались сразу несколько суммарных выигрышей для данного  $x$ , то выбирается управление, соответствующее любому из них. Так, для  $x = 60$  максимум суммарного выигрыша на третьем и четвертом шагах достигается как при  $u_3 = 20$ , так и при  $u_3 = 40$ . В обоих случаях он равен 14. В качестве оптимального здесь выбрано  $u_3 = 20$ .

Завершив подсчеты по третьему шагу и заполнив графы 4 - 6 табл. 5.3 и графы 4, 5 табл. 5.2, переходим к оптимизации второго шага. Для него составляем уравнение, аналогичное уравнению (5.2), и руководствуемся при этом теми же принципами: оптимальное управление на втором шаге должно максимизировать сумму выигрыша на этом шаге и максимального выигрыша на всех остальных шагах: третьем и четвертом, т. е.

$$W_2^*(x) = \max\{F_2(u_2) + W_3^*(x - u_2)\}.$$

Здесь через  $x$  по-прежнему обозначено количество средств, имеющихся к началу рассматриваемого шага (в данном случае к началу второго шага). Тогда к началу третьего шага останется  $(x - u_2)$  единиц. От этой величины зависит выигрыш на третьем и четвертом шагах,  $W_2(x - u_2)$ . Расчеты для второго шага аналогичны расчетам на третьем шаге. При этом пользуемся уже заполненными графами 1 - 3 табл. 5.3, полагая теперь, что  $u_i$  - это управление на втором шаге. Графы 7 и 8 этой таблицы заполняются данными из графы 3 табл. 5.1 и графы 5 табл. 5.2. Найденные значения условных оптимальных управлений и выигрышей записываются в графах 6 и 7 табл. 5.2.

Для первого шага имеем уравнение

$$W_1(x) = \max\{F_1(u_1) + W_2^*(x - u_1)\}$$

x	$u_i, i = 3, 2, 1$	$x - u_i$	Третий шаг			Второй шаг			Первый шаг		
			$F_3(u_3)$	$W_4^*(x - u_3)$	$W_1(x, u_3)$	$F_3(u_3)$	$W_3^*(x - u_2)$	$W_1(x, u_2)$	$F_3(u_3)$	$W_2^*(x - u_1)$	$W_1(x, u_1)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	0	20	0	3	0+3=3	0	0	9			
	20	0	9	0	9+0=9	5	9	5			
40	0	40	0	5	0+5=5	0	12	12			
	20	20	9	3	9+3=12	5	9	14			
	40	0	11	0	11+0=11	6	0	6			
60	0	60	0	6	6	0	14	14			
	20	40	9	5	14	5	12	17			
	40	20	11	3	14	6	9	15			
	60	0	13	0	13	8	0	8			
80	0	80	0	9	9	0	16	16			
	20	60	9	6	15	5	14	19			
	40	40	11	5	16	6	12	18			
	60	20	13	3	16	8	9	17			
	80	0	14	0	14	9	0	9			
100	0	100	0	11	11	0	18	18	0	21	21



	20	80	9	9	<u>18</u>	5	16	<u>21</u>	6	19	25
	40	60	11	6	17	6	14	20	9	17	<u>26</u>
	60	40	13	5	18	8	12	20	10	14	24
	80	20	14	3	17	9	9	18	13	9	22
	100	0	15	0	15	10	0	10	15	0	15

Объем расчетов здесь уменьшается, так как к началу первого шага нам известно количество выделенных средств  $x$ : оно равно 100. Следовательно, вычисления достаточно выполнить только для этого  $x$ . По завершении расчетов оказалось (графы 8 и 9 табл. 5.2), что оптимальное управление на первом шаге равно  $u_2^* = 40$ . Найденное значение является уже **безусловным оптимальным управлением**, поскольку оно обеспечивает максимум суммарной прибыли на всех шагах. Величина этого максимума оказалась равной  $W_1^* = 26$ .

Последняя стадия расчетов - прохождение процесса, начиная с первого и до последнего, четвертого, шага с целью отыскания на каждом из них уже не условного, а безусловного оптимального управления. На первом шаге, как уже выяснено,  $u_2^* = 40$ , т. е. 40 единиц денежных средств следует выделить первому предприятию. У нас осталось, следовательно,  $x = 100 - 40 = 60$  ед. к началу второго шага, т. е. для финансирования реконструкции всех остальных предприятий. Числу  $x = 60$  на втором шаге соответствует  $u_2^* = 20$ . (графа 6 табл. 5.2). Теперь уже это безусловное оптимальное управление. Оставшиеся средства в количестве  $60 - 20 = 40$  единиц предназначены третьему и четвертому предприятиям. Для  $x = 40$  из графы 4 табл. 5.2 получим  $u_2^* = 20$ . - столько средств выделяется третьему, а остаток,  $x = 40 - 20 = 20$ , - четвертому предприятию.

Таким образом, оптимальное распределение средств на реконструкцию следующее: первому предприятию выделяется 40 ед., второму, третьему и четвертому - по 20 ед. Суммарная прибыль при этом составит 26 ед.

### Методы сверки критериев.

В лесопилении бревна перед раскроем сортируют по величинам их диаметров в вершинном торце. Каждая размерная группа содержит бревна одного или нескольких ближайших четных диаметров. Бревна, входящие в одну размерную группу, распиливают по одному поставу, который рассчитывают, как правило, на средний (точнее, средневзвешенный) диаметр бревен данной размерной группы. Чем меньше число четных диаметров бревен, входящих в данную размерную группу, тем лучше применяемый постав соответствует размерным характеристикам сырья. Это способствует увеличению объемного выхода пиломатериалов и, следовательно, росту получаемой прибыли.

С другой стороны, уменьшение числа диаметров бревен в одной размерной группе влечет за собой увеличение числа этих групп, что приводит к увеличению затрат на сортирование пиловочного сырья. Таким образом, возникает оптимизационная задача: как разделить имеющийся запас сырья на размерные группы, чтобы величина приведенного дохода была максимальной. Этот критерий, как видно из его структуры, см. формулу, учет как возрастание объема выпуска пилопродукции в результате увеличения объемного выхода пиломатериалов, так и затраты на сортирование пиловочного сырья.

Воспользуемся методом динамического программирования для решения поставленной задачи. Исходные данные: величины объемов бревен для каждого их четного диаметра. Пусть имеющийся запас пиловочного

сырья содержит бревна  $t$  четных диаметров: бревна диаметра  $d_1$  19 см, в количестве  $V(d_1)$ , м<sup>3</sup>; диаметра  $d_2$  -  $V(d_2)$ , 9 м<sup>3</sup>, ..., диаметра  $d_m$  -  $V(d_m)$ , м<sup>3</sup>. В соответствии с порядком действий, изложенным в п. 5.2, разделим процесс сортирования на этапы, выберем фазовые координаты и управления. С каждым этапом поставим в соответствие определенную размерную группу пиловочного сырья: пусть  $i$ -му этапу соответствует распиливание сырья  $i$ -й размерной группы. Общее количество этапов  $n$  нам заранее неизвестно. Состояние  $S_i$  системы на каждом этапе будем характеризовать единственной фазовой координатой - наибольшим четным диаметром  $d_{i \max}$  бревен, входящих в  $i$ -ю размерную группу:  $x_i = d_{i \max}$ .

В качестве управления  $u_i$  на каждом шаге также будем рассматривать единственный параметр - число четных диаметров бревен в  $i$ -й размерной группе. Пусть, например, бревна с вершинным диаметром  $d_3$  входят в третью размерную группу, бревна с диаметрами  $d_4$  и  $d_5$  - в четвертую, а с диаметрами  $d_6$ ,  $d_7$  и  $d_8$  - в пятую размерную группу. Тогда  $x_3 = d_3$ , и  $u_3 = 1$ ;  $x_4 = d_5$ , и  $u_4 = 2$ ;  $x_5 = d_8$ , и  $u_5 = 3$ . Очевидно, что значение фазовой координаты вместе с управлением на данном шаге при таком их выборе полностью определяют соответствующую размерную группу бревен.

Рассмотрим на основе формулы (2.2) выражение для переменной составляющей приведенного дохода, полученного в результате распиливания имеющегося запаса сырья и реализации произведенной пиломатериальной продукции. Величину единовременных капитальных затрат в этой формуле положим равной нулю. Вместо величины суммарных эксплуатационных затрат  $Z$  возьмем ее переменную составляющую  $Z_c$ , связанную с затратами на сортирование сырья. Тогда для нашей задачи целевая функция примет вид

$$W = \sum_{i=1}^n C_i Q_i - Z_c$$

где  $Q_i$  - объем пиломатериалов, полученных из пиловочного сырья  $i$ -й размерной группы, а  $C_i$  - их средняя отпускная цена. Величина  $Z_c$  зависит прежде всего от объема сырья, подлежащего сортированию, и от числа  $n$  размерных групп. Представим ее условно в виде аддитивной функции

$$Z_c = \sum_{i=1}^n Z_i$$

где  $Z_i$  - величина затрат на сортирование, приведенная к одной размерной группе пиловочного сырья. Тогда естественно считать, что затраты  $Z_i$  прямо пропорциональны объему сырья  $V_i$  в  $i$ -й размерной группе и обратно пропорциональны числу четных диаметров бревен в ней, т. е. управлению  $u_i$  на соответствующем шаге:

$$Z_i = fV_i + r/u_i$$

где  $f$  и  $r$  - положительные коэффициенты. Представление второго слагаемого в форме  $r/u_i$  объясняется тем, что увеличение  $u_i$  влечет за собой сокращение числа  $n$  размерных групп и, следовательно, уменьшение суммарных затрат на сортирование. Теперь критерий оптимальности задачи можно записать в виде аддитивной функции  $W = \sum_{i=1}^n \omega_i$ , где  $\omega_i$  - целевая функция на  $i$ -м шаге, т. е., в данном случае, составляющая приведенного дохода для  $i$ -й размерной группы:

$$\omega_i = C_i Q_i - fV_i - r/u_i$$

Коэффициенты  $f$  и  $r$  в этой формуле можно определить по результатам экономического анализа себестоимости пиломатериалов на лесопильных предприятиях. Далее нужно выразить функцию  $\omega_i$  в уравнении, через фазовую переменную на предыдущем ( $i - 1$ )-м шаге  $x_{i-1}$  и управление  $u_i$ , то есть получить в явном виде выражение. Величина  $Q_i$  в уравнении, очевидно, равна  $Q_i = k_i V_i$ , где  $k_i$  - средний коэффициент объемного выхода пиломатериалов, получаемых из бревен  $i$ -й размерной группы.

Следовательно,

$$\omega_i = (C_i Q_i - f)V_i - r/u_i$$

Учитывая, что через  $x_i$

обозначен наибольший диаметр бревен в  $i$ -й группе, можно записать:

$$V_i = V(d_{imin}) + V(d_{imin} + 2) + V(d_{imin} + 4) + V(x_i)$$

где  $d_{imax}$  - наименьший четный диаметр бревен в  $i$ -й размерной группе, а через  $V(d_{imin})$  обозначен объем бревен, имеющих этот вершинный диаметр. Значения диаметров  $d_1, d_2, \dots$  образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 2 см. Поэтому

$$x_i = d_{imin} + 2(u_i - 1)$$

Диаметру  $d_{imin}$  предшествует четный диаметр, являющийся максимальным для предыдущей, ( $i - 1$ )-й, группы. Следовательно,

$$d_{imin} = x_{i-1} + 2$$

Подставив это выражение для  $d_{imin}$  в уравнении, получим

$$x_i = x_{i-1} + 2u_i$$

Соотношение показывает, каким образом система переходит из состояния в  $S_{i-1}$  последующее состояние  $S_i$ , т. е. служит явным видом выражения. Подставив в формулу выражения для  $d_{imin}$ , имеем

$$V_i = V(x_{i-1} + 2) + V(x_{i-1} + 4) + \dots + V(x_{i-1} + 2u_i)$$

Величина  $k_i$  в формуле также является функцией фазовой координаты и управления  $u_i$ . Как известно, с ростом вершинного диаметра  $d_B$  коэффициент  $k$  объемного выхода пиломатериалов возрастает приблизительно по закону выпуклой квадратичной функции:  $k = \delta + \alpha d_B + \beta d_B^2$ , где коэффициенты  $\delta$  и  $\alpha$  положительны,  $\beta$  отрицателен. По отношению к данной размерной группе вместо  $d_B$  будем рассматривать наименьший диаметр бревен в ней, равный  $(x_{i-1} + 2)$ . Величина  $k_i$  пропорциональна также и управлению  $u_i$ , причем эта зависимость выражена слабее, чем предыдущая. Таким образом, приближенно можно полагать

$$k = \delta + \alpha(x_{i-1} + 2) + \beta(x_{i-1} + 2)^2 + \gamma u_i$$

где  $\gamma > 0$  и  $\gamma$  значительно меньше  $\alpha$ .

Величину  $C_i$  в уравнении можно определить по прейскуранту и спецификации на пиломатериалы, вырабатываемые из бревен данной размерной группы.

Выражение для целевой функции  $\omega_i$  с учетом переписывается так:

$$\omega_i(x_{i-1}, u_i) = \{C_i[\alpha(x_{i-1} + 2) + \beta(x_{i-1} + 2)^2 + \gamma u_i] \times \sum_{j=1}^{u_i} V(x_{i-1} + 2j) - r/u_i\}$$

Теперь можно записать для данной задачи основное функциональное уравнение в виде

$$W_i^*(x_{i-1}) = \max\{\omega_i(x_{i-1}, u_i) + W_{i+1}^*(x_{i-1} + 2u_i)\},$$

где функция  $\omega_i(x_{i-1}, u_i)$  определяется выражением. Аргумент функции  $W_{i+1}^*$  в получен подстановкой вместо  $x_i$  его выражения.

Далее решается последовательность экстремальных задач. Вначале отыскивается условный оптимальный выигрыш  $W_n^*$  на последнем шаге:

$$W_n^* = \max\{\omega_n(x_{n-1}, u_n)\}$$

При этом задаются различными значениями  $x_{n-1}$  и рассматривают каждый раз только допустимые управления, которые переводят систему в состояние  $x_n$ . Состояние  $x_n$  задано: это наибольший четный диаметр  $d_m$  бревен в пиловочном сырье, подлежащем распиливанию. Заданным является и исходное состояние системы  $x_0$ . Это, очевидно, величина четного диаметра, предшествующего минимальному диаметру бревен в имеющемся запасе:  $x_0 = d_1 - 2$ . При выборе допустимых управлений можно руководствоваться рекомендацией: объединять в одну размерную группу не более чем  $S$  четных диаметров бревен. Тогда в качестве допустимых управлений как на последнем, так и на предыдущих шагах выбираются числа  $u_i = 1, 2, \dots, s$ . После определения  $W_n^*$  уравнение переписывают для  $i = n - 1$  и с его помощью решают задачу условной оптимизации для предыдущего,  $(n - 1)$ -го, шага. Далее точно так же поступают для  $(n - 2)$ -го,  $(n - 3)$ -го и т. д. шагов, до тех пор, пока не будут рассмотрены все допустимые состояния и управления. Затем отыскивают оптимальное число этапов и действительное оптимальное управление на первом шаге  $u_1^*$ . С этой целью среди всех условных оптимальных управлений  $u_i (i = n; (n - 1); (n - 2); \dots)$ , выводящих систему из состояния  $x_0$ , выбирается то, при котором целевая функция  $W^*(x_0)$  максимальна. Соответствующему этапу присваивается номер 1, в результате чего сразу отыскивается оптимальное число этапов  $n$ . Для найденного оптимального управления  $u_1^*$  по формуле находят соответствующее значение  $x_1$ . Для этой величины среди найденных ранее условных оптимальных управлений на следующем шаге отыскивают действительное оптимальное управление  $u_2^*$ . По формуле при  $i = 2$  находят  $x_2$  и т. д., вплоть до  $x_{n-1}$ .

## Раздел 2. Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.

**Тема 2.1 Введение в линейное программирование. Задачи линейного программирования. Основная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация основной задачи линейного программирования.**

Лекция проводится в форме дискуссии (3 часа)

Имеется сырье 1-го и 2-го сорта в количестве соответственно  $b_1$  и  $b_2$ ,  $m^3$ . Три предприятия по его переработке, выпускающие однородную продукцию, располагают свободными мощностями, позволяющими переработать соответственно  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$ ,  $m^3$ , сырья. Эти предприятия работают в разных условиях и имеют соответственно различные нормы выхода продукции.

Пусть  $a_{ij}$  - объем продукции, вырабатываемой из 1  $m^3$  сырья  $i$ -го сорта на  $j$ -м предприятии,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, 3$ . Требуется определить, в каком количестве необходимо поставлять сырье каждого сорта на каждое из предприятий. При этом должен быть обеспечен максимальный объем выпуска продукции, и учтены ограничения по запасам сырья и объемам его переработки на предприятиях. Элементы решения в данной задаче удобно обозначить переменными с двумя индексами: первый индекс - сорт сырья; второй - номер предприятия. Таким образом, через  $x_{ij}$  обозначен объем сырья  $i$ -го сорта, поставляемого на  $j$ -е предприятие. Задача поэтому содержит шесть элементов решения:  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$ . Общий объем сырья 1-го сорта, поставляемого на все три предприятия, равен сумме  $(x_{11} + x_{12} + x_{13})$  и не должен превышать имеющегося запаса  $b_1$   $m^3$ . Следовательно, имеем группу из двух ограничений по запасам сырья каждого сорта:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq b_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq b_2 \end{aligned} \right\}$$

Объем поставок сырья 1-го и 2-го сорта на первое предприятие, равный  $(x_{11} + x_{21})$ , не должен превышать мощность  $c_1$  этого предприятия по его переработке. Исходя из этого, составляются ограничения по мощности переработки сырья для первого и остальных предприятий:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} &\leq c_1 \\ x_{12} + x_{22} &\leq c_2 \\ x_{13} + x_{23} &\leq c_3 \end{aligned} \right\}$$

Общий объем выработки продукции на всех предприятиях равен сумме

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_{ij}$$

для которой надо найти максимум. Это выражение служит целевой функцией задачи

$$W = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_{ij} \rightarrow \max.$$

Кроме того, надо учесть требование не отрицательности переменных

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$$

Построенная математическая модель (3.10) - (3.13) - это еще один пример ЗЛП.

### **Задачи линейного программирования**

Сформулируем задачу линейного программирования в общем виде.

Имеется  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Требуется найти такие их значения, при которых целевая функция

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

обращается в максимум (минимум). При этом переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  должны удовлетворять ряду ограничений, каждое из которых должно относиться к одному из следующих типов:

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n = d_0;$$

$$e_1x_1 + e_2x_2 + \dots + e_nx_n = e_0;$$

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n = f_0;$$

Кроме того, имеются ограничения вида

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_n \geq 0.$$

которые называют обычно **простыми или тривиальными ограничениями**. Очевидно, что ограничения вида (3.17) легко сводятся к виду (3.16) умножением обеих частей исходного неравенства на (-1) и обратно - вид (3.16) к виду (3.17). От ограничений-равенств тоже всегда можно перейти к эквивалентному неравенству вида (3.16) посредством исключения какой-либо переменной.

Пусть, например, в ЗЛП имеется ограничение  $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4$ , где переменные  $x_1, x_2, x_3$  неотрицательны. Выразим из этого равенства  $x_3$ :

$$x_3 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 - 4/5$$

Тогда равенство (3.19) в сочетании с ограничением  $x_3 \geq 0$  эквивалентно неравенству  $(2/5)x_1 + (3/5)x_2 - 4/5 \geq 0$ . Отметим, наконец, что задача, в которой требуется найти максимум целевой функции  $W$ , эквивалентна задаче минимизации целевой функции  $W' = -W$ .

Запишем задачу линейного программирования общего вида в следующей форме:

$$\begin{aligned} W = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min; \\ \left. \begin{aligned} b_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{1n}x_n &\geq 0; \\ b_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{2n}x_n &\geq 0; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_m + b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + b_{mn}x_n &\geq 0, \end{aligned} \right\} \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0. \end{aligned}$$

где  $m$  - число нетривиальных ограничений.

Совокупность значений переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , удовлетворяющая всем ограничениям ЗЛП, называется ее **допустимым решением**. **Оптимальным решением** ЗЛП называется такое ее допустимое решение, при котором целевая функция достигает экстремума, т. е. максимума или минимума, в зависимости от условий задачи.

### Основная задача линейного программирования

Для выяснения основных свойств решения задачи линейного программирования проведем ее геометрическую интерпретацию.

Требуется найти максимум функции

$$W = 3x_1 + 4x_2$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 5x_2 &\leq 30; \\ 4x_1 + 7x_2 &\leq 28; \\ x_1 \geq 0; x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим координатную плоскость на рис, по оси абсцисс которой будем откладывать значения переменной  $x_1$ , а по оси ординат - значения  $x_2$ . Каждой точке плоскости соответствует некоторая пара значений  $x_1$  и  $x_2$ . Множество точек, для которых выполняется ограничение  $x_1 \geq 0$  представляет собой правую полуплоскость, т. е. часть плоскости правее оси  $Ox_2$ , а все точки, для которых  $x_2 \geq 0$ , располагаются в верхней полуплоскости - выше оси  $Ox_1$ . Точки, для которых удовлетворяются оба эти неравенства,  $x_1 \geq 0$  и  $x_2 \geq 0$ , лежат, очевидно, в первом квадранте. Добавим к этим ограничениям неравенство. Рассмотрим сначала соответствующее равенство:

$$6x_1 + 5x_2 = 30;$$

Это уравнение прямой  $l$ , отсекающей отрезок в 5 единиц на оси  $Ox_1$  и в 6 единиц на оси  $Ox_2$ . Учитывая знак неравенства, можно сделать вывод о том, что точки, удовлетворяющие ему,

лежат ниже прямой  $l$  или на ней самой. Штриховкой возле прямой отмечена область, в которой соответствующее неравенство не выполняется.

Одновременно трем ограничениям,  $x_1 \geq 0$  и  $x_2 \geq 0$ , удовлетворяют точки, лежащие внутри и на границе треугольника  $OCB$ . Аналогично учитывается ограничение. Все точки, для которых оно выполняется, лежат ниже прямой  $n$  или на ней. Уравнение этой прямой

$$4x_1 + 7x_2 = 28;$$

Поэтому точки, удовлетворяющие всем четырем ограничениям задачи, лежат внутри и на границах выпуклого четырехугольника  $OMKB$  (на рис. 3.2 заштрихован). Здесь  $K$  - точка пересечения прямых  $l$  и  $m$ .

Геометрический образ множества допустимых решений называется **областью допустимых решений** (ОДР) задачи линейного программирования. Мы доказали, что ОДР в рассматриваемой задаче - это выпуклый четырехугольник  $OMKB$ .

Среди множества допустимых решений следует найти оптимальное. Для этого введем в рассмотрение целевую функцию (3.27). Будем придавать ей различные значения и исследовать, где находятся соответствующие им точки в ОДР. Положим сначала значение целевой функции равным нулю:  $W = 3x_1 + 4x_2 = 0$ . Это уравнение прямой  $n$ . На ней имеется единственная точка  $\{x_1 = 0; x_2 = 0\}$ , принадлежащая ОДР. Пусть теперь  $W = 3x_1 + 4x_2 = 6$ . Это уравнение прямой  $p$ , параллельной предыдущей и расположенной выше нее. Стрелкой указано направление смещения прямой, соответствующее возрастанию целевой функции. Среди всех точек этой прямой области допустимых решений принадлежат только точки отрезка  $AD$ , для каждой из которых  $W = 6$ . Еще предпочтительнее с точки зрения приближения к максимуму целевой функции положение отрезка  $EF$  прямой  $q$ , уравнение которой  $3x_1 + 4x_2 = 12$ . Очевидно теперь, что максимальное значение целевой функции на множестве допустимых решений достигается при самом верхнем положении прямой  $W$ , когда она все еще проходит хотя бы через одну точку, принадлежащую ОДР. Это прямая  $r$ , проходящая через точку  $K$ . Ее координаты определяются из решения системы уравнений  $x_1 = 3\frac{2}{11}; x_2 = 2\frac{2}{11}$ . Эта пара чисел и есть оптимальное решение данной ЗЛП. Значение целевой функции для него равно

$$W = 3 \cdot 3\frac{2}{11} + 4 \cdot 2\frac{2}{11} = 18\frac{3}{11}$$

В приведенном примере ЗЛП имела единственное решение. Покажем, что возможны и другие случаи.

Рассмотрим ЗЛП

$$\begin{aligned} W &= 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + 8x_2 &\leq 32; \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 15; \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь область допустимых решений - многоугольник  $OABC$ . Отрезок  $BC$  является частью прямой  $l$ , уравнение которой получено из неравенства и имеет вид  $5x_1 + 3x_2 = 15$ . Все прямые, на которых целевая функция принимает фиксированное значение  $W = 5x_1 + 3x_2 = \text{const}$ , будут параллельны этой прямой. Поэтому максимум ее достигается в любой точке отрезка  $BC$ . Таким образом, эта ЗЛП имеет бесчисленное множество решений.

Возможны случаи, когда задача линейного программирования не имеет решений. Это возможно, когда множество допустимых решений пусто. Например, в ЗЛП

$$\begin{aligned} 9x_1 - 5x_2 &\rightarrow \min; \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2; \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 6; \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

система неравенств (3.38) - (3.40) не имеет решений, поэтому допустимых решений задачи не существует (см. рис. 3.3, б). Кроме того, такой случай возможен, если ОДР существует, но не ограничена, например, в ЗЛП:

$$\begin{aligned} W &= x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + 1x_2 &\leq 1; \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2; \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

В этом случае целевая функция может принимать сколь угодно большие значения (см. рис. 3.3, в).

### Геометрическая интерпретация основной задачи линейного программирования.

Рассмотрим так называемую **основную задачу линейного программирования (ОЗЛП)**, отличающуюся от задачи линейного программирования общего вида. В ней требуется минимизировать целевую функцию вида, а все нетривиальные ограничения имеют вид равенств. Общий вид ОЗЛП следующий:

$$\begin{aligned} W &= c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min; \\ &\left. \begin{array}{l} b_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{1n}x_n = b_1; \\ b_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_m + b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + b_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right\} \\ &x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0. \end{aligned}$$

Некоторые теоремы линейной алгебры сразу позволяют решить вопрос о существовании допустимого решения ОЗЛП. Предположим, что из  $m$  уравнений системы только  $r$  линейно независимы. Это значит, что каждое из остальных  $(m - r)$  уравнений можно получить, преобразуя рассмотренные  $r$  уравнений. Число  $r$  называется рангом системы уравнений.

Например, в системе

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 2; \\ 4x_1 - x_2 - 7x_3 = 5. \end{cases}$$

только первые два уравнения линейно независимы. Третье уравнение можно получить, если сложить первое уравнение с удвоенным вторым. Поэтому ранг данной системы уравнений равен 2.

Величина  $r$  не превышает числа переменных  $n$ :  $r \leq n$ . Случай, когда  $r = n$  мало интересен. При этом система уравнений имеет единственное решение  $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ . Если все  $x_i^*$  при этом неотрицательны ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то найденное решение системы уравнение является одновременно допустимым и оптимальным решением ОЗЛП. Если же хотя бы одна из величин  $x_i^*$  отрицательна, то ОЗЛП не имеет допустимых решений. Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $r$  строго меньше  $n$ . Тогда, если система совместна, то она имеет бесчисленное множество решений. При этом  $(n - r)$  переменным можно придавать произвольные значения. Эти переменные называются **свободными**. Остальные  $r$  переменных выражаются через свободные. Они называются базисными. Для существования допустимых решений ОЗЛП необходимо, чтобы среди множества решений системы нашлись неотрицательные, т. е. удовлетворяющие ограничениям.

К основной задаче линейного программирования можно свести ЗЛП общего вида следующим образом. Введем дополнительные переменные  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , равные левым частям ограничений:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = b_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{1n}x_n; \\ y_2 = b_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{2n}x_n; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_m = b_m + b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + b_{mn}x_n. \end{array} \right\}$$

Из неравенств следует, что все дополнительные переменные должны быть неотрицательны:  $y_1 \geq 0; j = 1, 2, \dots, m$ . Таким образом, задача линейного программирования общего вида сведена к следующей задаче:

$$\left. \begin{aligned}
 W &= c_1 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_n x_n \rightarrow \min; \\
 y_1 &= b_1 + b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{1n} x_n; \\
 y_2 &= b_2 + b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{2n} x_n; \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 y_m &= b_m + b_{m1} x_1 + b_{m2} x_2 + b_{mn} x_n; \\
 x_i &\geq 0, i = 1, \dots, n; \\
 y_j &\geq 0, j = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \right\}$$

в которой все нетривиальные ограничения имеют вид равенств, то есть к ОЗЛП, но с большим числом переменных, чем в исходной задаче.

Система с  $(n + m)$  неизвестными, входящая в эту задачу, имеет очень удобный вид. Будем считать, что все ее уравнения линейно независимы. Тогда она имеет ранг  $r$ , равный числу уравнений  $m$ . При этом  $m$  базисных переменных  $y_1, y_2, \dots, y_m$  уже выражены через  $n$  свободных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Основной задаче линейного программирования разумно давать геометрическую интерпретацию в пространстве свободных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . При  $n = 2$  рассмотрим плоскость с координатами  $x_1, x_2$ . Вследствие требования неотрицательности переменных  $y_j \geq 0$ , область допустимых решений в этом случае ограничена прямыми, описываемыми уравнениями:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= b_1 + b_{11} x_1 + b_{12} x_2 = 0; \\
 y_2 &= b_2 + b_{21} x_1 + b_{22} x_2 = 0; \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 y_m &= b_m + b_{m1} x_1 + b_{m2} x_2 = 0 \\
 x_1 &= 0; x_2 = 0.
 \end{aligned}$$

ОДР, если она существует, представляет собой выпуклый много-угольник,  $g$ , соответствующий случаю  $m = 3$ ). Он называется **многоугольником допустимых решений**. Оптимальное решение достигается одной из вершин этого многоугольника. Поскольку на каждой из ограничивающих прямых одна из переменных  $y_j$  или  $x_i$  обращается в нуль, можно утверждать, что в любой вершине многоугольника допустимых решений, а значит, и в вершине, соответствующей оптимальному решению, по крайней мере две переменные обращаются в нуль.

При  $n = 3$  следует уже рассматривать трехмерное пространство свободных переменных  $x_1, x_2, x_3$ . ОДР в нем ограничена плоскостями  $y_j = b_j + b_{j1} x_1 + b_{j2} x_2 + b_{j3} x_3 = 0, j = 1, 2, \dots, m$ , а также координатными плоскостями  $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0$ . Она представляет собой выпуклый многогранник, в одной из вершин которого находится оптимальное решение. Вершина многогранника образуется пересечением не менее чем трех плоскостей, на каждой из которых одна из переменных обращается в нуль. Поэтому в каждой из вершин, в том числе и в точке оптимума, обращается в нуль не менее трех переменных.

При  $n > 3$  аналогичным образом рассматривается пространство свободных переменных большей размерности. Поверхности, ограничивающие ОДР, называются в этом случае **гиперплоскостями**.

Теперь можно сформулировать некоторые свойства решений основной задачи линейного программирования.

1. Область допустимых решений ОЗЛП, если она существует, всегда образует выпуклое множество. Выпуклым называется множество, обладающее следующим свойством: если любые две точки принадлежат этому множеству, то ему же принадлежат и все точки отрезка, соединяющего исходные точки.
2. Оптимальное решение, если оно существует, всегда достигается на границе ОДР, а именно, в одной из вершин многогранника допустимых решений. Допустимое решение,



находящееся в одной из вершин этого многогранника, называется опорным решением, а сама вершина - опорной точкой.

- 3. В опорной точке не менее чем  $n$  переменных обращаются в нуль. Здесь  $n$  - число свободных переменных ОЗЛП.
- 4. Для отыскания оптимального решения можно перебрать все опорные решения, отыскивая среди них то, в котором целевая функция достигает экстремума.

**Графическое решение основной задачи линейного программирования методом перестановок.  
Алгоритм преобразования стандартной таблицы в симплекс-методе.**

Основным методом решения ЗЛП является так называемый симплекс-метод. Он состоит в отыскании опорного решения ЗЛП и в последующем переборе опорных точек до достижения оптимального решения. При этом на каждом шаге перебора опорное решение улучшается по сравнению с предыдущим шагом.

Рассмотрим процедуру симплекс-метода для задачи линейного программирования, сведенной к ОЗЛП и имеющей вид. При этом  $m$  уравнений системы (3.46), входящей в ее состав, будем считать линейно независимыми.

Введем обозначения:  $a_{11} = -b_{11}$ ;  $a_{12} = -b_{12}, \dots$ ;  $a_{mn} = -b_{mn}$ , с учетом которых система (3.46) примет так называемую стандартную форму

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n); \\ y_2 &= b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n); \\ &\dots \dots \dots \\ y_m &= b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n). \end{aligned} \right\}$$

Составим стандартную таблицу коэффициентов этой системы. В алгоритм симплекс-метода входит многократно повторяющаяся процедура перерешения системы (3.48) относительно новых базисных переменных. В ходе этой процедуры требуется вывести какую-либо переменную  $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ , из числа свободных и перевести ее в базисные, а взамен ввести в число свободных какую-либо базисную переменную  $y_i, i = 1, 2, \dots, m$ . Такую замену обозначим  $x_j \leftrightarrow y_i$ . По результатам этой процедуры осуществляется переход к новой опорной точке.

Пусть требуется произвести замену  $x_j \leftrightarrow y_i$ . Элемент  $a_{ij}$  стандартной табл. называется **разрешающим**. Строка и графа, на пересечении которых стоит разрешающий элемент, также называются разрешающими.

Изложим алгоритм замены переменных. Он состоит в следующем преобразовании стандартной табл.:

- 1) в таблице выделяют (обводят) разрешающий элемент  $a_{ij}$ . Вычисляют его обратную величину  $\lambda = 1/a_{ij}$  и записывают ее в нижней части той же ячейки, в которой находится разрешающий элемент;

Базисная переменная (БП)	Свободный член (СЧ)	Свободные переменные				
		$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_1$	$\dots$

$y$	$b_1$	$a_{11}$	$a_{21}$	$\dots$	$a_{1j}$	$\dots$	$a_{1n}$
$y_2$	$b_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2j}$	$\dots$	$a_{2n}$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$y_i$	$b_i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$\dots$	$a_{ij}$	$\dots$	$a_{in}$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$y_m$	$b_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mj}$	$\dots$	$a_{mn}$

- 2) все элементы разрешающей строки, кроме самого  $a_{ij}$ , умножают на  $\lambda$ . Результаты записывают в нижних частях соответствующих ячеек;
- 3) все элементы разрешающей графы, кроме самого  $a_{ij}$ , умножают на  $(-\lambda)$ . Результаты записывают в нижних частях соответствующих ячеек;
- 4) подчеркивают в разрешающей строке все верхние числа – прежние элементы, а в разрешающей графе – все нижние числа – новые элементы, – за исключением  $\lambda$ ;
- 5) для каждого из элементов, не принадлежащих ни к разрешающей строке, ни к разрешающей графе, записывают в нижней части соответствующей ячейки произведения подчеркнутых чисел, стоящих в той же строке и той же графе, что и данный элемент;
- 6) переписывают таблицу, заменив  $x_j$  на  $y_i$  и обратно, элементы разрешающей строки и разрешающей графы на числа, стоящие в нижних частях соответствующих ячеек; каждый из остальных элементов – на сумму чисел, стоящих в верхней и нижней частях той же ячейки.

Например, дана система уравнений

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 + 1; \\ y_2 &= x_1 - x_2 - 2x_3; \\ y_3 &= x_1 + 3x_2 + 4. \end{aligned} \right\}$$

Требуется произвести замену переменных  $x_3 \leftrightarrow y_2$ , то есть вывести переменную  $x_3$  из числа свободных и перевести ее в базисные, а взамен внести в число свободных переменную  $y_3$ . Перепишем исходную систему в стандартной форме:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 1 - (2x_1 - x_2 - x_3); \\ y_2 &= 0 - (x_1 + x_2 + 2x_3); \\ y_3 &= 4 - (-x_1 - 3x_2). \end{aligned} \right\}$$

Составим стандартную таблицу

БП	СЧ	Свободные переменные		
		$x_1$	$x_2$	$x_2$
$y_1$	1	-2	-1	-1
$y_2$	0	-1	1	2
$y_3$	4	-1	-3	0

Разрешающим элементом является элемент на пересечении строки  $y_2$  и графы  $x_3$ . Это число 2. Величина, обратная разрешающему элементу, равна  $\lambda = 1/2$ .

БП	СЧ	Свободные переменные		
		$x_1$	$x_2$	$x_2$
$y_1$	1	-5/2	-1/2	1/2

$y_2$	0	-1/2	1/2	1/2
$y_3$	4	-1	-3	0

Все элементы табл. перепишем в верхние части соответствующих клеток вспомогательной табл. В этой же таблице будем записывать и результаты промежуточных вычислений. Число  $\lambda$  запишем в нижней части той же ячейки, в которой находится разрешающий элемент. Нижние части остальных ячеек табл. заполняются согласно приведенного выше алгоритма. Перепишем табл., заменив  $x_3$  на  $y_2$  и обратно (табл.), вычислив ее элементы в соответствии. Таким образом, исходная система уравнений разрешена относительно переменных  $y_1, x_3, y_3$  и приобрела следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 1 - (-2,5x_1 - 0,5x_2 + 0,5y_2) = 1 + 2,5x_1 + 0,5x_2 + 0,5y_2; \\ y_2 &= 0 - (-0,5x_1 - 0,5x_2 + 0,5y_2) = 0,5x_1 + 0,5x_2 - 0,5y_2 \\ y_3 &= 4 - (-x_1 - 3x_2) = 4 + x_1 + 3x_2. \end{aligned} \right\}$$

БП	СЧ	Свободные переменные		
		$x_1$	$x_2$	$x_2$
$y_1$	$b_1$	$a_{11}$	$a_{21}$	$a_{1n}$
$y_2$	$b_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{2n}$
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
$y_m$	$b_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$a_{mn}$
W	$c_0$	$y_1$	$y_2 \dots$	$y_n$

Помимо уравнений-ограничений в ОЗЛП имеется еще целевая функция (3.41). После замены  $x_j \leftrightarrow y_i$  ее также надо выразить через новые свободные переменные  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, y_i, x_{j+1}, \dots, x_n$ . Это делается точно так же, как и при преобразовании произвольной строки стандартной таблицы. Функция W приводится к стандартной форме:

$$W = c_0 - \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n$$

где  $\gamma_1 = -c_1; \gamma_2 = -c_2; \dots; \gamma_n = -c_n$ . Числа  $c_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  записываются в качестве элементов добавочной строки стандартной таблицы (табл. 3.6) и подвергаются тем же преобразованиям, что и остальные строки. Отличие этой строки состоит в том, что в ней никогда не выбирается разрешающий элемент.

### Алгоритм преобразования стандартной таблицы в симплекс-методе.

Первый этап решения ОЗЛП симплекс-методом состоит в получении опорного решения задачи. На втором этапе отыскивается ее оптимальное решение.

Изложим алгоритм отыскания опорного решения ОЗЛП в предположении, что ограничения задачи записаны в стандартной форме, а коэффициенты этой системы и целевой функции сведены в стандартную таблицу.

1. Если в системе все свободные члены  $b_1, b_2, \dots, b_m$  неотрицательны, то опорное решение уже получено и имеет вид  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0; y_1 = b_1; y_2 = b_2; \dots; y_m = b_m$ . Иными словами, для получения опорного решения, в случае, если все  $b \geq 0$ , следует в системе (3.48) принять все свободные переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равными нулю и получить из нее значения базисных переменных  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , которые станут равны соответствующим свободным членам  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

2. Пусть в одном из уравнений системы свободный член отрицателен. Если все элементы  $a_{ij}$  соответствующей строки неотрицательны, то система несовместна с условиями неотрицательности варьируемых переменных и, следовательно, ОЗЛП не имеет решений.
3. Пусть в уравнении с отрицательным свободным членом есть отрицательный элемент  $a_{ij}$ . Тогда графа стандартной таблицы, в которой он находится, выбирается в качестве разрешающей. Если в рассматриваемой строке отрицательных элементов несколько, то можно взять любой из них.
4. Рассмотрим все элементы данной графы, не считая строки  $W$ , имеющие одинаковый знак со своим свободным членом. Элемент, для которого отношение к нему свободного члена минимально, выбирается в качестве разрешающего. Обратимся к алгоритму замены переменных.
5. В соответствии с изложенными выше правилами осуществляется обмен переменными, которым соответствует выбранный разрешающий элемент.
6. Полученное решение исследуется согласно пп. 1 и 2. Если оно не является опорным и не доказана несовместность системы ограничений, то процедура обмена переменных повторяется до тех пор, пока не будет найдено опорное решение или не доказана несовместность системы.

**Нахождение опорного и оптимального решения задачи линейного программирования. Формулировка двойственной задачи линейного программирования. Экономическая интерпретация прямой и двойственной задач линейного программирования.**

После того как опорное решение ОЗЛП найдено, приступают к отысканию ее оптимального решения в следующей последовательности:

1) рассматривается стандартная симплексная таблица, соответствующая найденному опорному решению. Если все свободные члены в ней, не считая строки  $W$ , неотрицательны, а в строке  $W$ , не считая свободного члена, нет ни одного положительного элемента, то оптимальное решение достигнуто и имеет вид  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0; y_1 = b_1; y_2 = b_2; \dots; y_m = b_m$ ;

2) если в строке  $W$  есть один или несколько положительных элементов, не считая свободного члена, а в каждой из соответствующих им граф нет ни одного положительного элемента, то оптимального решения не существует. Целевая функция в этом случае не ограничена снизу;

3) если хотя бы в одной из таких граф есть положительные элементы, то надо осуществить обмен свободной и базисной переменными. При этом в качестве разрешающего элемента следует взять тот положительный элемент анализируемой графы, для которого отношение к нему соответствующего свободного члена минимально. В строке  $W$  могут быть два или больше положительных коэффициентов, соответствующие графы которых содержат положительные элементы. В этом случае можно взять любую из таких граф для выбора в ней разрешающего элемента;

4) вновь обращаются в п. 1, и при необходимости процедура повторяется.

### **Формулировка двойственной задачи линейного программирования**

В лесопилении методы линейного программирования широко используются для решения задачи планирования раскроя пиловочного сырья на пиломатериалы. Рассмотрим содержательную постановку и математическую модель этой задачи.

В лесопильный цех ЛДП поступают бревна, рассортированные на  $n$  размерных групп. Известна спецификация пиломатериалов, которые требуется получить в результате раскроя данного объема пиловочного сырья. Задан также набор поставок для раскроя бревен каждой размерной группы. Требуется определить, какой объем бревен следует распилить по каждому из рассматриваемых поставок, чтобы выполнить спецификацию пиломатериалов при минимальном расходе пиловочного сырья.

Введем обозначения:

$V_k$  - имеющийся объем бревен  $k$ -й размерной группы,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;

$Q_i$  - минимально допустимый объем выработки пиломатериалов  $i$ -го сечения,

$i = 1, 2, \dots, m$  ( $m$  - общее число сечений вырабатываемых пиломатериалов);  
 $x_{kj}$  - искомый объем бревен  $k$ -й размерной группы, распиливаемых по  $j$ -му поставу,  $j = 1, 2, \dots, N_k$  ( $N_k$  - количество предназначенных к использованию поставов для раскроя бревен  $k$ -й размерной группы);  
 $a_{kji}$  - коэффициент объемного выхода пиломатериалов  $i$ -го сечения, полученных при раскрое бревен  $k$ -й размерной группы по  $j$ -му поставу. Эти коэффициенты являются известными характеристиками применяемых поставов.

С учетом введенных обозначений объем пиломатериалов  $i$ -го сечения, полученных в результате распиливания  $x_{kj}$  кубометров бревен  $k$ -й размерной группы по  $j$ -му поставу, составляет  $a_{kji}x_{kj}$ . Общий объем таких пиломатериалов получают в результате суммирования

этого выражения по всем поставам и размерным группам, т. е.  $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{N_k} a_{kji}x_{kj}$ . Поэтому

требование выработки пиломатериалов  $i$ -го сечения в объеме, не меньшем  $Q_i, \text{ м}^3$ , реализуется в виде следующего ограничения:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{N_k} a_{kji}x_{kj} \geq Q_i, i = 1, 2, \dots, m.$$

Если, кроме того, задан максимально допустимый объем  $Q^*$  выработки этих пиломатериалов, то необходимо дополнительно учесть соответствующее ограничение:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{N_k} a_{kji}x_{kj} \leq Q_i^*, i = 1, 2, \dots, m.$$

Общий объем бревен  $k$ -й размерной группы, распиливаемых по всем рассчитанным для них поставам, равен, очевидно,  $\sum_{j=1}^{N_k} x_{kj}$ .

Тогда ограничение по ресурсам пиловочного сырья может быть записано в виде

$$\sum_{j=1}^{N_k} x_{kj} \leq V_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

Переменные  $x_{kj}$  должны быть неотрицательны:

$$x_{kj} \geq 0, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, N_k.$$

В качестве критерия оптимальности можно принять минимум расхода сырья. Соответствующая целевая функция запишется в виде

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{N_k} x_{kj} \rightarrow \min.$$

Вместо этого критерия можно рассмотреть критерий минимума отходов сырья при его раскрое. Обозначим через  $c_{kj}$  коэффициент объемного выхода пиломатериалов при распиливании бревен  $k$ -й размерной группы по  $j$ -му поставу. Его величина равна

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m_j} a_{kji},$$

где  $m_j$  - число сечений пиломатериалов, вырабатываемых с использованием  $j$ -го поставу.

Тогда коэффициент объемного выхода отходов для этого же поставу равен

$$1 - c_{kj} = 1 - \sum_{i=1}^{m_j} a_{kji}.$$

Целевая функция, реализующая критерий минимума отходов сырья, примет вид

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{N_k} (1 - c_{kj})x_{kj} \rightarrow \min.$$

Совокупность соотношений (3.52) - (3.56) или (3.52) - (3.55), (3.57) - это задача линейного программирования, являющаяся математической моделью задачи планирования раскроя пиловочного сырья.

Предположим теперь, что планируется раскрой пиловочного сырья с учетом его качества, а в спецификации на выработку пиломатериалов наряду с их сечениями указывается и требуемая сортность. В этом случае бревна сортируют на размерно-качественные группы, которые распиливаются по различным поставкам. Пиломатериалы также различаются не только по сечениям, но и по размерно-качественным характеристикам. Математическая модель этой задачи формально не отличается от модели предыдущей. Индекс  $k$  теперь будет номером размерно-качественной группы сырья, общее число которых равно  $n$ . Для числа размерно-качественных групп пиломатериалов сохраняется обозначение  $m$ , а индекс  $i$  будет ее номером.

### Экономическая интерпретация прямой и двойственной задач линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом привести в соответствие некоторую другую, называемую двойственной по отношению к исходной задаче. Понятие двойственности важно не только для теории линейного программирования. С его помощью получают информацию о свойствах оптимального решения ЗЛП. Рассмотрим ЗЛП с ограничениями в виде неравенств:

$$\left. \begin{aligned} W &= \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \max; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i, i = 1, 2, \dots, m; \\ x_{ij} &\geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \right\}$$

Исходную ЗЛП часто называют **прямой задачей**.

ЗЛП, двойственная к ЗЛП, формулируется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sum_{j=1}^n b_j y_j \rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j &\leq c_i, i = 1, 2, \dots, m; \\ y_{ij} &\geq 0, j = 1, \dots, m. \end{aligned} \right\}$$

Пусть, например, исходная задача имеет вид

$$\left. \begin{aligned} W &= x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &\leq 5; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &\geq 0. \\ x_1 &\geq 0, \dots, x_4 \geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Двойственной к ней будет следующая ЗЛП:

$$\left. \begin{aligned} F &= 5y_1 + 3y_2 \rightarrow \min; \\ 2y_1 + y_2 &\geq 1; \\ -y_1 + 2y_2 &\geq -2. \\ 2y_1 + y_2 &\geq 3 \\ -3y_1 + y_2 &\geq -1 \\ y_1 &\geq 0; y_2 \geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Отметим прежде всего, что каждому ограничению-неравенству исходной задачи соответствует неотрицательная переменная двойственной. Требование максимизации в исходной задаче заменено в двойственной задаче требованием минимизации. Направление

знаков неравенств в двойственной задаче противоположно направлению знаков неравенств в исходной задаче.

В некотором смысле двойственная задача - это исходная задача, повернутая на 90°. Рассмотрим первую графу коэффициентов, входящих в ограничения двойственной задачи. Она совпадает с первой строкой, составленной из коэффициентов в ограничениях исходной задачи. То же относится к любой другой паре из графы и строки. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи служат свободные члены ограничений прямой задачи, а свободными членами ограничений двойственной задачи – коэффициенты целевой функции исходной ЗЛП.

С использованием отмеченных взаимосвязей легко составить двойственную задачу к любой исходной ЗЛП. В этой паре задач линейного программирования любую из них можно выбрать в качестве исходной. Тогда другая ЗЛП окажется двойственной к ней. Так, взяв в качестве исходной задачу перейдя по описанным выше правилам к двойственной, вернемся к ЗЛП.

Рассмотрим ЗЛП с ограничениями-равенствами:

$$W = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m;$$

$$x_{ij} \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

Задача, двойственная к ней, формулируется следующим образом:

$$F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, j = 1, 2, \dots, m$$

В данном случае не требуется неотрицательности переменных двойственной задачи.

Приведем теперь прямую и двойственную задачи к ОЗЛП введением дополнительных переменных. Запишем первое из ограничений исходной ЗЛП в виде  $b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n \geq 0$ .

Введем дополнительную неотрицательную переменную  $x_{n+1}$ , равную левой части этого ограничения. Тогда его можно записать в виде равенства  $b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n = x_{n+1}$ .

Аналогичным образом вводим дополнительную неотрицательную переменную для каждого из остальных ограничений задачи, всего, следовательно,  $m$  дополнительных переменных.

Целевую функцию в ОЗЛП следует минимизировать, поэтому знаки коэффициентов в ней изменяем на противоположные. Теперь исходная задача примет следующий вид:

$$W = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j \rightarrow \min;$$

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n); \\ x_{n+2} &= b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n); \\ &\dots \\ &\dots \\ x_{n+m} &= b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n). \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \\ x_{n+j} &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\}$$

Система равенств написана здесь в стандартной форме по образцу системы.





Можно заметить, что матрица коэффициентов в табл. 3.19 с точностью до знака совпадает с матрицей в табл. 3.18, повернутой на  $90^\circ$ . Отсюда следует, что, решив прямую ЗЛП, мы уже фактически решили задачу, двойственную к ней.

Действительно, пусть при решении прямой ЗЛП на последней итерации симплекс-метода получена симплексная таблица вида.. Это означает, что в этой таблице все  $b_i \geq 0$ , все  $c_i \leq 0$ , и оптимальное решение прямой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} x_1^* = x_2^* = \dots = x_n^* &= 0 \\ x_{n+1}^* = b_1; x_{n+2}^* = b_2, \dots, x_{n+m}^* &= b_m. \end{aligned}$$

На той же итерации симплексная таблица двойственной задачи будет иметь вид табл. Но тогда ее столбец свободных членов состоит из элементов  $(-c_j)$ , и все они неотрицательны, а элементы строки F - это значения  $(-b_i)$ , и все они неположительны. Значит, на этой же итерации получено и оптимальное решение двойственной задачи, которое имеет вид

$$\begin{aligned} y_1^* = y_2^* = \dots = y_m^* &= 0 \\ y_{m+1}^* = -c_1, y_{m+2}^* = -c_2, \dots, y_{n+m}^* &= -c_n. \end{aligned}$$

Таким образом, для получения решения двойственной задачи достаточно решить прямую ЗЛП, а в качестве значений базисных переменных двойственной задачи взять с противоположным знаком элементы строки W прямой ЗЛП из ее последней симплексной таблицы. Значения же свободных переменных двойственной задачи следует принять равными нулю (см. две приведенные выше системы равенств). Отмеченная противоположность знаков для элементов строки W в табл. и столбца свободных членов в табл. объясняется лишь тем, что решение как прямой, так и двойственной задачи было сведено к ОЗЛП с минимизируемой целевой функцией.

Как выяснилось, базисным переменным прямой ЗЛП соответствуют свободные переменные двойственной, а свободным переменным исходной задачи - базисные переменные двойственной ЗЛП. Для того чтобы сразу получать решение двойственной задачи по результатам решения прямой ЗЛП, следует установить соответствие между переменными той и другой задачи. Оно вытекает из сравнения табл. и представляется в следующем виде: с переменными  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$  прямой ЗЛП приводят в соответствие переменные  $y_1, y_2, \dots, y_m$  двойственной задачи (в соответствующем порядке), с переменными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  прямой задачи приводят в соответствие переменные  $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}$  двойственной ЗЛП.

В теории линейного программирования доказан ряд теорем, устанавливающих взаимосвязь и необходимые и достаточные условия оптимальности допустимых решений прямой и двойственной задач. Доказано, в частности, что оптимальные значения целевых функций для прямой и двойственной задач совпадают.

Пусть  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  оптимальное решение исходной ЗЛП (3.64), а  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*$  оптимальное решение двойственной задачи (3.65). Количество  $n$  переменных в ней равно числу видов ресурсов в прямой ЗЛП.

Для экономического анализа двойственной ЗЛП важны следующие положения, являющиеся основными следствиями теорем, доказанных в теории двойственности:

1) если в оптимальном решении исходной задачи некоторый  $i$ -й ресурс используется не полностью, т. е. имеет место строгое неравенство

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^* < b_i, \text{ то соответствующая переменная } y_j^* \text{ в оптимальном решении}$$

двойственной задачи равна нулю:  $y_j^* = 0$ . Если же данный ресурс согласно оптимальному решению расходуется полностью (соответствующее ограничение выполняется как строгое равенство), то значение  $y_j^*$  положительно;

2) как было отмечено выше, оптимальные значения целевых функций для прямой и двойственной задач совпадают. Тогда

$$W = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

Отсюда следует, что двойственная переменная  $y_j^*$ , являясь коэффициентом при  $b_1$ , характеризует зависимость максимального значения целевой функции исходной задачи от изменения ресурсов (речь идет об относительно малых изменениях их объемов). Действительно, из последнего равенства следует, что

$$y_i^* = \partial W_{\max} / \partial b_i, i = 1, 2, \dots, m,$$

Откуда

$$\Delta W_{\max} \approx y_i^* \Delta b_i$$

Следовательно, величина двойственной переменной в оптимальном решении показывает, насколько возросло бы максимальное значение целевой функции исходной задачи, если бы количество данного ресурса увеличилось на единицу. (Двойственные переменные  $y_1, y_2, \dots, y_m$  часто называют условными или двойственными оценками соответствующих видов ресурсов.) Поэтому наибольшую величину двойственной оценки в оптимальном решении будет иметь наиболее дефицитный ресурс. Ресурсу, имеющемуся в избытке, соответствует условная оценка, равная нулю.

### Раздел 3. Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.

#### Раздел 3.1 Формулировка транспортной задачи. Нахождение опорного плана. Улучшение плана перевозок. Решение транспортной задачи методом потенциалов. Транспортные задачи с неправильным балансом.

Лекция проводится в форме дискуссии (3 часа)

В лесной и деревообрабатывающей промышленности, как и в других отраслях, часто приходится сталкиваться с задачами оптимизации перевозок разного рода грузов. Это может быть сухопутная транспортировка пиловочного сырья от леспромхозов к лесозаводам или сплав круглого леса от рейдов отправления к лесоперевалочным комбинатам; перевозки пиломатериалов от лесозаводов к потребителям; поставка мебельных изделий с фабрик в магазины и т. д. Во всех задачах подобного рода имеется несколько пунктов отправления - поставщиков, - где сосредоточены запасы груза, и несколько пунктов назначения - потребителей груза. Необходимо составить экономичный план перевозок грузов от поставщиков к потребителям. В исследовании операций подобные задачи известны под названием **транспортных задач (ТЗ)**.

Рассмотрим на числовом примере математическую модель транспортной задачи. Ее условия, а иногда и результаты решения будем записывать в **транспортной таблице**.

Рассмотрим теперь эту модель в общем виде. Имеем  $m$  поставщиков и  $n$  потребителей. Запасы груза у поставщиков равны соответственно  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Заявки потребителей составляют  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Известна стоимость  $c_{ij}$  перевозки единицы груза от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю,  $i = 1, 2, \dots, m$   $j = 1, 2, \dots, n$ . Предполагается, что суммарные запасы груза равны суммарным потребностям в нем:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

поставщик		потребитель					
обозначение	Запас груза	$B_1$	$B_2$	...	$B_j$	...	$B_n$
$A_1$	$a_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	....	$c_{1j}$	...	$c_{1n}$
$A_2$	$a_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	....	$c_{2j}$	...	$c_{2n}$

.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
$A_i$	$a_i$	$c_{i1}$	$c_{i2}$	...	$c_{ij}$	...	$c_{in}$
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
$A_m$	$a_m$	$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	$c_{mj}$	...	$c_{mn}$
Потребность в грузе		$b_1$	$b_2$	...	$b_j$	...	$b_n$

Искомый план перевозок, т. е. совокупность значений переменных  $X_{ij}$ , должен удовлетворять тем же условиям, что и в рассмотренном выше числовом примере.

Запишем ограничения задачи, связанные с требованием удовлетворить заявку каждого потребителя:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{m1} &= b_1; \\ x_{12} + x_{22} + x_{m2} &= b_2; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{mn} &= b_n. \end{aligned} \right\}$$

Требование вывезти весь груз из каждого пункта отправления реализуется следующими ограничениями:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{1n} &= a_1; \\ x_{12} + x_{22} + x_{2n} &= a_2; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{mn} &= a_m. \end{aligned} \right\}$$

Целевая функция задачи

$$W = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Переменные  $x_{ij}$  должны быть неотрицательными:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Видно, что приведенная модель является задачей линейного программирования в силу линейности целевой функции и ограничений. Поэтому транспортные задачи в принципе можно решать любыми методами, пригодными для решения ЗЛП, в том числе и симплекс-методом. Однако благодаря характерной структуре модели транспортной задачи решить ее можно более простыми методами.

Рассмотренная выше модель транспортной задачи, предполагающая равенство суммарного спроса суммарным запасам, т. е. наличие ограничения, называется **закрытой моделью** транспортной задачи. Можно доказать, что эта задача всегда имеет оптимальное решение.

Решение транспортной задачи часто называют **планом перевозок**. Вместо слов «допустимое решение транспортной задачи» говорят «допустимый план», вместо слов «опорное решение»-«опорный план перевозок».

### Улучшение плана перевозок

Процесс решения транспортной задачи состоит из двух этапов, как и для обычной задачи линейного программирования:

- 1) отыскания опорного решения;
- 2) последовательного его улучшения с целью отыскания оптимального решения задачи.

Самый простой метод отыскания опорного решения транспортной задачи - метод северо-западного угла - состоит в последовательном заполнении клеток транспортной таблицы, начиная с левой верхней клетки - северо-западный угол. Обозначим клетку на пересечении

строки  $A_i$  и столбца  $B_j$  через  $i, j$ . При решении транспортной задачи, условия которой приведены в таблице, в левую верхнюю клетку (1,1) транспортной таблицы минимальное из чисел  $a_1$  и  $b_1$ . В данном случае – это число  $b_1 = 30$ . Это означает, что заявка первого потребителя полностью удовлетворена из запасов груза первого поставщика:  $x_{11} = 30$ , и столбец  $B_1$  можно исключить из дальнейшего рассмотрения, приняв остальные переменные этого столбца  $x_{21}$  и  $x_{31}$  равными нулю.

Номер п/п	Поставщик		Потребитель			
			1	2	3	4
	Обозначение	Запас	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
1	$A_1$	$a_1=35$	5 30	13 5	6	11
2	$A_2$	$a_2=45$	4	7 5	12 40	8
3	$A_3$	$a_3=50$	9	2	3 25	10 25
4	Потребность в грузе		$b_1 = 30$	$b_2 = 10$	$b_3 = 35$	$b_4 = 25$

Переходим к клетке (1, 2), находящейся правее рассмотренной. У первого поставщика осталось еще 5 единиц груза, которые можно отправить второму потребителю. Поэтому число 5 вписываем в данную клетку:  $x_{12} = 5$ . Так как первый поставщик израсходовал свой груз, переходим к заполнению второй строки таблицы, начиная с клетки (2,2). Сюда впишем 5 единиц груза из пункта  $A_2$ , которых недостает второму потребителю, удовлетворив полностью его заявку. Оставшиеся у второго поставщика 40 единиц груза передадим третьему потребителю:  $x_{21} = 40$ . Осталось рассмотреть третью строку. В клетку (3, 3) помещаем 25 единиц, удовлетворив заявку пункта  $B_3$ , а оставшиеся в пункте  $A_3$  25 единиц передадим в  $B_4$ . Таким образом, груз всех поставщиков полностью распределен, и удовлетворены заявки всех потребителей, т. е. найдено допустимое решение данной задачи. Для того чтобы это решение было опорным, необходимо выполнение следующего условия: число занятых клеток в транспортной таблице должно быть равно  $N = m + n - 1$ . В данном случае это условие выполнено: заполнено шесть клеток, и  $N = 3 + 4 - 1 = 6$ . Подсчитаем значение целевой функции, соответствующее найденному опорному решению:

$$W = 5 \times 30 + 13 \times 5 + 7 \times 5 + 12 \times 40 + 3 \times 25 + 10 \times 25 = 1055.$$

Как правило, опорное решение, полученное методом северо-западного угла, значительно отличается от оптимального потому, что при его отыскании мы нигде не учитывали стоимости перевозок.

Рассмотрим более эффективный метод отыскания опорного решения - **метод наименьшего элемента**. Здесь рекомендуется другой порядок заполнения клеток транспортной таблицы. Сначала заполняется клетка, соответствующая минимальной стоимости перевозок единицы груза. Затем отыскивается клетка с тем же свойством среди оставшихся незаполненных клеток. Она заполняется во вторую очередь, и т. д.

Номер п/п	Поставщик		Потребитель			
			1	2	3	4
	Обозначение	Запас	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
1	$A_1$	$a_1=35$	5 (+)	13	25 6	(-) 11 10

2	$A_2$	$a_2=45$	30 (-)	4	7	12	8 15 (+)
3	$A_3$	$a_3=50$	9	2	3	10	40
4	Потребность в грузе		$b_1 = 30$	$b_2 = 10$	$b_3 = 35$	$b_4 = 25$	

Продемонстрируем применение этого метода. Наименьшая стоимость перевозки единицы груза в транспортной табл. соответствует клетке (3, 2):  $c_{32} = 2$ . В нее запишем наименьшее из чисел  $a_3$  и  $b_2$ , т. е. 10 (табл.). Среди оставшихся клеток наименьшая стоимость перевозок соответствует клетке (3, 3):  $c_{33} = 3$ . В нее запишем число 40. Это количество груза, оставшееся в пункте  $A_3$ . Далее переходим к клетке (2, 1), записав в нее число 30. Следующей должна быть клетка (1, 1), но поскольку заявка первого потребителя уже удовлетворена, ее пропускаем и переходим к клетке (1,3). Сюда записываем число 25, равное оставшейся потребности в грузе для пункта  $B_3$ , и т. д. В результате получено опорное решение, отличающееся от предыдущего решения в табл. Значение целевой функции для него, как легко вычислить, равно 640, т. е. значительно лучше, чем для опорного решения, полученного по методу северо-западного угла.

### Цикл пересчета

Полученное тем или иным способом опорное решение, как правило, не является оптимальным. Так, при анализе табл. 3.23 можно предположить, что снабжение четвертого потребителя грузом из запасов первого поставщика нерационально из-за высокой стоимости перевозок:  $c_{14} = 11$ . Нужно попытаться так изменить план перевозок, чтобы часть груза из запасов первого поставщика досталась не четвертому, а первому потребителю, для которого стоимость перевозок значительно ниже:  $c_{11} = 5$ . Практически это означает, что часть груза из клетки (1,4) переносится в клетку (1, 1). В этом случае, однако, пункт  $B_1$  получит излишек груза, а пункту  $B_2$  его будет не хватать. Чтобы восстановить баланс, можно это же количество груза перенести из клетки (2,1) в клетку (2, 4). Идея подобного перераспределения ресурсов положена в основу нескольких методов отыскания оптимального решения транспортной задачи.

Рассмотрим один из них, называемый **методом потенциалов**. Напомним, что имеется опорный план решаемой транспортной задачи. Его транспортная таблица содержит  $(m \times n)$  клеток, из которых  $(m+n-1)$  заняты, а остальные  $(mn-(m+n-1))$  свободны. Для иллюстрации в транспортной таблице занятые клетки обозначены точками. Значения стоимости перевозок и величины переменных  $x_{ij}$  образующие опорный план, в таблице опущены.

Метод потенциалов предполагает выполнение следующих этапов.

1. Каждому поставщику  $A_i$  ставится в соответствие некоторая переменная  $u_i$ , называемая **потенциалом** данного поставщика. Каждому потребителю  $B_j$  ставится в соответствие переменная  $v_j$  - потенциал этого потребителя.
2. Для отыскания значений этих переменных, т. е. потенциалов поставщиков и потребителей, составляется и решается система уравнений. При этом каждой занятой клетке  $(i, j)$  соответствует свое уравнение, имеющее вид

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

где  $c_{ij}$  - стоимость перевозки единицы груза для данной клетки;

$u_i$  и  $v_j$  - соответственно потенциалы поставщика и потребителя.

Номер п/п	Поставщик		Потребитель								Потенциал поставщика
			1	2	3	4	5	6	7	8	
	Обозначение	Запас	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$	$B_8$	
1	$A_1$	$a_1$					+		-		$u_1$

2	A <sub>2</sub>	a <sub>2</sub>	+	-					+	u <sub>2</sub>
3	A <sub>3</sub>	a <sub>3</sub>							+	u <sub>3</sub>
4	A <sub>4</sub>	a <sub>4</sub>					-			u <sub>4</sub>
5	A <sub>5</sub>	a <sub>5</sub>	-	+						u <sub>5</sub>
6	A <sub>6</sub>	a <sub>6</sub>								u <sub>6</sub>
7	Потребность		b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	b <sub>5</sub>	b <sub>6</sub>	b <sub>7</sub>	b <sub>8</sub>
8	Потенциал потребителя		v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>

Всего составляется  $(m+n-1)$  уравнений по числу занятых клеток. Число переменных в системе равно  $(m+n)$ , т. е. на единицу больше числа уравнений. Поэтому система легко решается: одной из переменных придают произвольное значение, обычно нуль, и тогда однозначно определяются значения остальных переменных.

3. Для каждой свободной клетки вычисляют сумму потенциалов соответствующих ей поставщика и потребителя. Обозначим ее  $z_{ks}$  для  $k$ -го поставщика и  $s$ -го потребителя:

$$z_{ks} = u_k + v_s$$

Эту сумму называют **псевдостоимостью**. Далее для этой же клетки вычисляют разность

$$\delta_{ks} = c_{ks} - z_{ks} = c_{ks} - u_k - v_s$$

Если для всех свободных клеток полученные разности неотрицательны, значит исходный опорный план уже оптимален.

Иными словами, опорный план оптимален, если для каждой свободной клетки псевдостоимость не превышает соответствующей стоимости перевозок.

4. Наличие хотя бы одной свободной клетки с отрицательной разностью свидетельствует о том, что оптимальное решение еще не достигнуто. В этом случае отыскивают ту клетку с отрицательной величиной  $\delta_{ks}$ , где эта разность наибольшая по абсолютной величине.

5. В найденную свободную клетку следует записать некоторое количество груза, перераспределив перевозки. Для этого строится так называемый цикл. Это многоугольник с прямыми углами, одна из вершин которого находится в найденной свободной клетке, а все остальные - в занятых клетках. Такой многоугольник, и при том единственный, всегда можно найти. Так, цикл для свободной клетки (2, 1) (см. табл. 3.24) содержит, кроме нее, еще три занятых клетки: (2, 2), (4, 2) и (4, 1). В этой таблице приведены в качестве примеров еще два цикла для свободных клеток (1, 5) и (4, 3).

В построенном цикле последовательно, по часовой стрелке или против нее, помечают его вершины чередующимися знаками «+» и «-». Начинают при этом со свободной клетки, которой приписывают знак «+».

6. Среди клеток, помеченных знаком «-», отыскивают ту, в которой записано минимальное количество груза. Это значение прибавляют к значениям количества груза в тех клетках цикла, которые помечены знаком

«+», включая свободную клетку, и вычитают из значений в клетках цикла, помеченных знаком «-». Эта процедура называется перенос по циклу.

7. В результате такого перераспределения груза получается новый план, заведомо лучший, чем предыдущий. Для него процедуру повторяют, начиная с первого этапа.

Метод потенциалов всегда приводит к отысканию оптимального решения после определенного числа повторений всей процедуры или, как говорят, за конечное число итераций.

Выше отмечалось, что транспортная таблица, содержащая опорное решение транспортной задачи, должна содержать ровно  $(m + n - 1)$  занятых клеток. Случай, когда число занятых клеток меньше указанного, называется **вырожденным**. Для отыскания оптимального

решения при вырожденном опорном плане достаточно записать нуль в какую-либо свободную клетку и в дальнейшем оперировать с ней как с занятой.

### Решение транспортной задачи методом потенциалов

Во многих задачах о перевозках не нужно требовать, чтобы весь запас груза у поставщиков был вывезен потребителям. Иными словами, имеется избыток груза. Поэтому условие заменяется неравенством

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m;$$

Вместо ограничений-равенств (3.76) также будут неравенства:

Полученная модель, содержащая целевую функцию и ограничения, называется открытой моделью транспортной задачи. Другой вариант открытой транспортной задачи (ТЗ) возникает, когда суммарный объем заявок превышает общий объем груза:

В этом случае ограничения сохраняются, а заявки выполняются не полностью, поэтому равенства заменяются неравенствами

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Открытая транспортная задача легко сводится к рассмотренной выше закрытой транспортной задаче. Для задачи с избытком груза вводится фиктивный (n+ 1)-й потребитель. Объем  $b_{n+1}$  его заявки принимают равным разности между суммарным запасом груза поставщиков и суммарным объемом заявок потребителей: а стоимости перевозок от любого поставщика к этому фиктивному потребителю считают равными нулю:

$$c_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Тем самым открытая транспортная задача преобразована в закрытую с тем же значением целевой функции.

Для открытой транспортной задачи с избытком заявок вводится (m+ 1)-й фиктивный поставщик с запасом груза, равным

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

Стоимость перевозок от этого поставщика к любому потребителю принимают равной нулю.

Возможны и другие постановки этих задач. В задаче с избытком груза можно, например, учесть различные величины штрафов за единицу невывезенного груза от разных поставщиков. Задачу с избытком заявок можно рассмотреть с учетом сравнительной важности удовлетворения заявок разных потребителей. Эти постановки также сводятся к закрытой транспортной задаче.

Поставщик		Потребитель		
Обозначение	Запас	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
A <sub>1</sub>	50	35	2	17
A <sub>2</sub>	100	4	34	18
A	20	29	5	8
Потребитель		40	70	50

### Транспортные задачи с неправильным балансом

Рассмотрим еще несколько модификаций транспортной задачи, для решения которых разработаны эффективные алгоритмы.

**1. Транспортная задача с ограниченными пропускными способностями.** Здесь вводятся дополнительные ограничения на пропускную способность коммуникаций. Поэтому требование  $x_{ij} \geq 0$  заменяется двусторонним неравенством:  $0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$ , где  $d_{ij}$ - заданное предельное количество груза, которое может быть перевезено от i-го поставщика к j -му

потребителю за время, оговоренное в условиях задачи. Ее решение можно получить, расширив возможности метода потенциалов.

**2. Транспортная задача с запретами.** В не предполагается, что между некоторыми пунктами производства и потребления отсутствуют коммуникации и, следовательно, запрещены соответствующие перевозки. Такая задача может быть сведена к модели обычной транспортной задачи.

**3. Много продуктовая транспортная задача.** Здесь планируется перевозка не одного, как обычно, а нескольких видов грузов. Если эти грузы не взаимозаменяемы (например, промышленные изделия и пищевые продукты), то такая задача распадается на несколько однопродуктовых транспортных задач, решаемых изолированно друг от друга. В других случаях между перевозимыми продуктами возможна взаимозаменяемость, то есть потребность в одном из них может быть частично или полностью удовлетворена поставками другого продукта. Так, например, может обстоит дело с поставками пиломатериалов различных сечений и сортности. Существует прием, позволяющий свести эту задачу к ТЗ с запретами. Сущность его в том, что каждый пункт отправления заменяется группой таких пунктов по числу имеющихся в нем видов продукции.

Аналогичным образом расщепляются пункты потребления: каждый из новых пунктов имеет заявки только на продукты, между которыми существует полная взаимозаменяемость. С помощью коэффициентов взаимозаменяемости, которые предполагаются заданными, пересчитываются заявки новых потребителей в единицах эквивалентного продукта. Наличие коммуникации между любыми двумя вновь полученными пунктами отправления и потребления предполагается лишь в том случае, если в заявке последнего имеются продукты данного поставщика. При этом условии с помощью коэффициентов взаимозаменяемости вычисляется соответствующий коэффициент матрицы транспортных затрат.

Можно рассмотреть также многопродуктовую транспортную задачу с перевозками на разнородном транспорте, например, на автомашинах различных марок, обладающих различной скоростью и грузоподъемностью на тех или иных маршрутах. Эта задача может быть сведена к транспортной либо к распределительной задаче в зависимости от того, учитывается ли различная грузоподъемность машин разных марок.

**4. Задача о перевозках с промежуточной обработкой.** Предположим, что в каждом пункте отправления производится некоторый полуфабрикат, который сначала поступает в пункты переработки, после чего доставляется потребителям. Известны объемы производства полуфабрикатов, предельно допустимые объемы его переработки в каждом пункте и заявки потребителей. Заданы также стоимости перевозок от пунктов производства к пунктам переработки и от последних - к потребителям. Требуется составить план перевозок, при котором весь полуфабрикат вывозится и перерабатывается, заявки потребителей удовлетворяются, а суммарные транспортные затраты достигают минимума. Модель этой задачи, как можно показать, сводится к модели транспортной задачи с запретами, которая в свою очередь, как уже отмечалось, приводится к обычной транспортной задаче.

К математической модели транспортной задачи сводятся не только задачи о перевозках грузов, но и целый ряд задач иного содержания. Рассмотрим некоторые из них.

Имеется  $t$  пунктов, где возможно строительство предприятий, производящих некоторую продукцию. Затраты на производство единицы продукции в  $i$ -м пункте равны  $a_i$ , а максимально возможный объем ее выпуска составляет  $b_i$  единиц в год,  $i = 1, 2, \dots, t$ . Изготавливаемая продукция должна быть распределена между  $n$  потребителями. Доставка единицы продукции от  $i$ -го пункта производства к  $j$ -му потребителю обходится в  $c_{ij}$  руб. ( $i = 1, 2, \dots, t$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ). Потребность в продукции для  $j$ -го потребителя составляет  $d_j$  единиц в год. Требуется составить план выпуска продукции и схему перевозок так, чтобы годовые затраты на производство и перевозку продукции были минимальны.

Обозначим через  $y_i$  искомый объем выпуска продукции в  $i$ -м пункте, а через  $x_{ij}$  - объем перевозок от  $i$ -го пункта производства к  $j$ -му потребителю.

Ограничения на объемы производства продукции

$$y_i \geq b_i, i = 1, 2, \dots, t.$$

Вся произведенная продукция должна быть вывезена:



$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m;$$

Заявка каждого потребителя должна быть удовлетворена:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, j = 1, 2, \dots, n;$$

Объемы производства и перевозок неотрицательны:

$$y_i \geq 0, ; x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

Требование минимума суммарных затрат на производство и перевозку продукции реализуется следующей целевой функцией:

$$W = \sum_{i=1}^m a_i + y_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Если в ограничениях и целевой функции этой модели заменить  $y_i$  на  $\sum_{j=1}^n x_{ij}$  согласно, то она сводится к следующей модели открытой транспортной задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq b_i, i = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= d_j, j = 1, 2, \dots, n; \\ x_{ij} &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\ W &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_i + c_{ij}) x_{ij} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

### Распределительная задача

Математическая модель распределительной задачи является обобщением транспортной задачи и сводится к ней лишь в некоторых частных случаях. Рассмотрим ее содержательную формулировку применительно к задаче распределения различной продукции между несколькими предприятиями.

Пусть  $n$  предприятий должны выпускать в совокупности  $m$  видов продукции. Это могут быть мебельные фабрики, производящие различные виды изделий; лесозаводы, выпускающие пиломатериалы различных сечений, и т. д. Заданы величины затрат  $c_{ij}$  в рублях на единицу  $i$ -го вида изделия при изготовлении его на  $j$ -м предприятии, а также время  $\lambda_{ij}$  необходимое для производства единицы  $j$ -го изделия на  $j$ -м предприятии; плановое задание  $a_i$  по каждому виду изделия и число  $b_j$  часов работы  $j$ -го предприятия, которое может быть выделено в течение планового периода на производство всех рассматриваемых изделий. Требуется распределить производство изделий по разным предприятиям так, чтобы минимизировать суммарные затраты при выполнении планового задания с учетом ограниченности ресурсов рабочего времени.

Обозначим через  $x_{ij}$  искомый объем выпуска изделий  $i$ -го вида на  $j$ -м предприятии. Требование выполнения планового задания имеет вид

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m.$$

Условия, учитывающие ограниченность фонда рабочего времени, записываются в виде неравенств

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_{ij} \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Переменные  $x_{ij}$  неотрицательны:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Суммарные затраты на изготовление всех изделий выражаются функцией

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Таким образом, в математической формулировке поставленная задача сведена к отысканию таких значений переменных  $x_{ij}$ , при которых удовлетворяются ограничения (3.91) - (3.93), а целевая функция (3.94) обращается в минимум. Построенная математическая модель относится к задачам линейного программирования и отличается от модели транспортной задачи наличием множителей  $\lambda_{ij}$  в ограничениях (3.92). Ее называют **моделью распределительной задачи**. Приняты и другие названия, например,  $\lambda_{ij}$  - задача, обобщенная транспортная задача. Для решения распределительной задачи может быть использован любой метод линейного программирования, например, симплекс-метод. Имеются и более простые, специально разработанные методы.

Если все  $\lambda_{ij}$  равны единице, мы получаем обычную транспортную задачу. Кроме того, как легко показать, распределительная задача сводится к транспортной, если для каждого  $i$  коэффициенты  $\lambda_{ij}$  пропорциональны, то есть  $\lambda_{i1}/\lambda_{i1} = \lambda_{i2}/\lambda_{i2} = \dots = \lambda_{in}/\lambda_{in} = \alpha_i$ , где  $\alpha_i$  - некоторые константы.

### **Постановка задачи нелинейного программирования. Методы отыскания экстремума для функции одной переменной. Методы отыскания экстремума для функции нескольких переменных.**

Построение моделей линейного программирования основано на предположении о линейной зависимости между характеристиками объекта и элементами решения. Такое предположение в технологических исследованиях далеко не всегда оказывается оправданным. Можно указать много объектов оптимизации, в том числе и в деревообработке, для которых оно неправомерно. Нелинейными, как правило, являются зависимости технико-экономических, силовых и качественных характеристик процессов механической обработки древесины от режимных факторов. Модель (3.86) -(3.90) задачи об оптимальном размещении производства также оказывается при внимательном рассмотрении грубой, поскольку предполагает линейную зависимость между затратами на производство и его объемом [см. первую сумму в целевой функции (3.90)]. На самом же деле эта зависимость имеет более сложный характер (рис. 4.1.). На начальном участке I она выпукла вверх. Это объясняется тем, что вначале с ростом выпуска затраты на производство единицы продукции снижаются. Затем, при достижении некоторого объема выпуска, дальнейшее его увеличение достигается ценой перегрузки производства, что приводит к увеличению себестоимости продукции (участок II).

### **Методы отыскания экстремума для функции одной переменной.**

Задачи оптимизации, в которых требуется отыскать значения  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , обращающих в минимум или максимум целевую функцию

$$W = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \left( \max \right)$$

и удовлетворяющих  $m$  ограничениям в виде равенств или неравенств

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq, \geq \bar{b}_j, j = 1, 2, \dots, m$$

называются **задачами математического программирования**. Здесь предполагается, что функции  $f$  и  $\varphi_j$  известны, а константы  $b_j$  заданы. На все или на часть переменных  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) могут быть наложены дополнительные условия неотрицательности или дискретности. В частном случае, когда все функции  $f$  и  $\varphi_j$  линейны, задача математического программирования сводится к задаче линейного программирования, рассмотренной в предыдущей главе. Если же хотя бы одна из функций  $f$  или  $\varphi_j$  нелинейна, то задача (4.1), (4.2) называется **задачей нелинейного программирования**.

Задачи нелинейного программирования очень разнообразны и гораздо сложнее, чем задачи линейного программирования. В отличие от ЗЛП, оптимальное решение задачи нелинейного

программирования может находиться как внутри, так и на границах области допустимых решений (ОДР). Например, решением задачи

$$\begin{aligned} & \min (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ & 0 \leq x_1 \leq 5; 0 \leq x_2 \leq 5 \end{aligned}$$

является, как легко убедиться, точка  $x_1=2, x_2=3$ , лежащая внутри ОДР. А для задачи с теми же ограничениями, но другой целевой функцией,  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max$ , решением будет точка  $x_1 = x_2 = 5$  на границе ОДР.

При изучении методов линейного программирования нами был подробно рассмотрен симплекс-метод. Это алгоритм решения ЗЛП, который гарантирует достижение ее решения (если оно существует) за конечное число шагов. В этом случае говорят, что алгоритм сходится за конечное число итераций. Таким же свойством обладает метод потенциалов, предназначенный для решения транспортной задачи. Для задач нелинейного программирования подобного универсального алгоритма не существует. В зависимости от типа этих задач разрабатываются специальные алгоритмы их решения, причем большинство из них не обеспечивает сходимости за конечное число итераций и, следовательно, является приближенными.

### Методы отыскивания экстремума для функции нескольких переменных

В качестве примера задачи нелинейного программирования рассмотрим постановку задачи оптимизации режимов рамного пиления древесины. Элементами решения здесь служат следующие пять параметров: подача на один зуб пилы  $u_z$  мм, шаг зубьев пил  $t$ , мм; толщина их  $s$ , мм, жесткость пил  $k$ , Н/мм, а также величина пути резания зубьев пил в древесине  $L$ , км, за время  $T$ , равное периоду работы лесопильного потока. С учетом того, что лесопильная рама является головным лесопильным оборудованием, в качестве критерия оптимальности разумно принять максимум ее сменной производительности.

Приведем вывод целевой функции задачи. Предварительно определим время  $\tau$ , мин, затраченное непосредственно на пиление за смену. Обозначим через  $t_n$  время простоя лесопильной рамы при смене пил, мин. Тогда количество перестановок пил в течение рабочей смены равно  $T_{см} / (t + t_n)$ ,  $T_{см}$  - продолжительность рабочей смены, мин. Поэтому

$$\tau = K_T K_1 \left( T_{см} - \frac{T_{см} t_n}{T + t_n} \right)$$

где  $K_T$  - коэффициент использования рабочего времени смены;

$K_1$  - коэффициент использования лесопильного потока.

Штучная производительность лесопильной рамы, измеряемая в количестве бревен (брусьев), распиленных за смену, равна

$$P = \tau u / l$$

где  $u$  - скорость подачи, м/мин;

$l$  - средняя длина бревен, м.

После подстановки выражения для  $\tau$  из (4.4) эта формула примет следующий вид:

$$P = K_{общ} T_{см} u / l \left( 1 - \frac{t_n}{T + t_n} \right)$$

где  $K_{общ} = K_T K_1$  - общий коэффициент использования рабочего времени.

Зависимость скорости подачи и от подачи на зуб  $u_z$ , мм, величины хода пильной рамки  $H$ , мм, шага зубьев пил  $t$ , мм и частоты вращения коленчатого вала лесопильной рамы  $n$ , мин<sup>-1</sup>, задается следующей формулой:

$$u = u_z H n / 1000 t$$

Величина пути резания  $L$  выражается через период  $T$  работы лесопильного потока:  $L = L_p n T / 10^6$ , где  $L_p$  - путь резания одного зуба пилы за один ход пильной рамки, мм. Для

случая, когда величина хода пильной рамки превышает среднюю высоту пропила  $h$ , мм, можно считать  $L_p = h$ . Поэтому  $L = hnT/10^6$ , откуда

$$T = 10^6 L / hn$$

Подставив выражения для  $u$  и  $T$  (4.6) и (4.7) в формулу (4.5), получим

$$\Pi = \frac{u_z K_{обш} T_{см} Hn}{t1000l} \left[ 1 - \frac{1}{\left( \frac{10^6 L}{hnt_n} \right) + 1} \right]$$

Умножив это выражение на средний объем бревна (бруса), выразим вместо этого выражение (4.8) умножить на средний объем  $V_{п}$  пиломатериалов, вырабатываемых из одного бревна (бруса), то целевая функция будет измеряться в  $m^3$  вырабатываемых пиломатериалов. Поскольку величина  $V_{п}$  вычисляется как разность между объемом бревна (бруса) и суммарным объемом всех пропилов, то в целевую функцию войдет еще один элемент решения - толщина пил.

Множество ограничений рассматриваемой модели удобно разбить на три группы.

*В первую группу* входят технологические ограничения по мощности привода лесопильной рамы, работоспособности впадин зубьев пил, устойчивости пил. Они составляются по результатам технологического анализа процесса пиления, изучения его силовых и энергетических характеристик. Приведем наименее громоздкое по своей форме ограничение по работоспособности впадин зубьев пил:

$$u_z \leq t^2 / \alpha h_{\max}$$

где  $h_{\max}$  - максимальная высота пропила;

$\alpha$ - коэффициент, зависящий от формы зуба, соотношения хода пильной рамки и величины  $h_{\max}$ , а также от требований к шероховатости поверхности пиломатериалов.

*Вторую группу* составляют ограничения, вызванные требованиями к качеству обработки пилопродукции. Этими требованиями лимитируются, в частности, шероховатость поверхности и разнотолщинность пиломатериалов. Оценочным показателем при определении шероховатости поверхности пиломатериалов служит среднеарифметическая величина  $R_{m \max}$  максимальных высот неровностей. В качестве оценочного показателя при определении точности размерообразования часто берут величину среднего квадратического отклонения  $d$  толщины пиломатериалов.

Для формирования соответствующих ограничений следует получить зависимость величины  $R_{m \max}$  и  $d$  от элементов решения, т. е. выражения для функций:

$$\left. \begin{aligned} R_{m \max} &= f_1(\alpha, s, t, k, L) \\ d &= f_2(\alpha, s, t, k, L) \end{aligned} \right\}$$

Единственным реальным способом получения этих зависимостей является многофакторный эксперимент.

Таким образом, ограничения второй группы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} R_{m \max} &= f_1(\alpha, s, t, k, L) \leq R_{m \max}^{\max} \\ d &= f_2(\alpha, s, t, k, L) \leq d^{\max} \end{aligned} \right\}$$

где  $R_{m \max}^{\max}$  и  $d^{\max}$  - заданные граничные значения соответствующих параметров.

Ограничения третьей группы связаны с конечным диапазоном варьирования элементов решения и с дискретностью их задания, если это имеет место. Последнее относится к толщине  $s$  пил, шагу  $t$  их зубьев, для которых установлены стандартные значения, а также к пути резания  $L$ . Значения пути резания определяются в зависимости от числа перестановок пил за смену и, следовательно, также дискретны. Имеем поэтому

$$u_{z \min} \leq u_z \leq u_{z \max};$$

$$s = s_1, s_2, \dots, s_l;$$

$$t = t_1, t_2, \dots, t_m;$$

$$L = L_1, L_2, \dots, L_n;$$

$$k_{\min} \leq k \leq k_{\max}.$$

Как легко заметить, целевая функция (4.8) и ограничение (4.9) являются нелинейными функциями элементов решения  $u_z, t, L$ . Этого достаточно для следующего утверждения: задача оптимизации режимов процесса рамного пиления древесины является задачей нелинейного программирования. На самом деле нелинейными являются и полученные экспериментально ограничения второй группы, поскольку оказалось, что для адекватного описания результатов эксперимента функции  $f_1$  и  $f_2$ , входящие в выражения (4.10), должны быть многочленами второго или более высокого порядка.

Рассмотренная ситуация, при которой для построения оптимизационной модели потребовалось сочетание аналитических и экспериментальных методов, типична для технологических исследований в деревообработке.

### Методы отыскания экстремума для функций одной переменной

Прежде чем изучать методы решения задач нелинейного программирования, рассмотрим методы отыскания экстремума функций без учета ограничений. Точнее, ограничения могут быть, но предполагается, что они не оказывают влияния на процесс отыскания экстремума и на его результат. Эти методы называют **методами безусловной минимизации**, имея в виду отыскание минимума функций. Их изучение удобно начать с наиболее простой задачи поиска экстремума функции одной переменной  $f(x_1)$ . Это так называемая одномерная задача оптимизации. Функцию, для которой отыскивается экстремум, будем по-прежнему называть целевой функцией.

Отметим прежде всего, что функция  $f(x_1)$  может иметь как один, так и несколько экстремумов. Например, функция, изображенная на рис. 4.2, имеет четыре максимума в точках 1, 3, 5, 7 и три минимума в точках 2, 4, 6. При этом значение функции в точке 3 превосходит ее величину

для всех остальных значений аргумента  $x$ . Такая точка называется точкой глобального максимума, а все остальные максимумы функции называются локальными. Аналогично, точка 6 будет точкой глобального минимума функции, изображенной на рис. 4.2, а точки 2 и 4 - это точки ее локального минимума.

Из дифференциального исчисления хорошо известны необходимые и достаточные условия экстремума функции  $f(x_1)$ . Необходимое условие экстремума: если существует производная  $f'(x_1)$  функции  $f(x_1)$  в точке  $x_1=a$  и эта функция имеет в точке  $a$  максимум или минимум, то  $f'(a)=0$ . Достаточное условие экстремума: если существует вторая производная функции  $f''(a)$  то функция  $f(x_1)$  имеет в точке  $a$ : максимум при  $f'(a)=0$  и  $f''(a)<0$ ; минимум при  $f'(a)=0$  и  $f''(a)>0$

Рассмотрим несколько примеров, в которых эти условия используются для решения простейших задач оптимизации.

### Задача оптимизации размеров оконного блока

1. Предположим, что оконный блок одностворчатой конструкции имеет форму прямоугольника. Каким должно быть соотношение его сторон, чтобы при заданной площади остекления на изготовление блока пошло бы наименьшее количество материала? Обозначим через  $x$  и  $y$  искомые стороны прямоугольника, а через  $S$  - известную величину его площади.

Тогда

$$xy=S$$

Предположим, что все бруски коробки и все створки имеют одинаковую площадь сечения. В этом случае количество материала, необходимое для изготовления оконного блока, пропорционально его периметру  $P=2x+2y$ , который поэтому желательно обратить в минимум. Имеем, следовательно, экстремальную задачу: минимизировать функцию  $(2x+2y)$  при условии.

Результат решения не изменится, если в качестве минимизируемой функции взять полупериметр  $W = P/2 = x + y \rightarrow \min$ . Подставим в это выражение значение  $y = S/x$ . Тогда  $W=x+S/x$ . Воспользовавшись необходимым условием экстремума, возьмем производную от  $W$  по  $x$  и приравняем ее нулю:  $W' = 1 - (S/x^2) = 0$ . Из двух корней полученного уравнения имеет смысл только положительный  $x = \sqrt{S}$ . Тогда  $y = S/x = S/\sqrt{S} = \sqrt{S}$ .

Докажем, что полученное решение  $x = y = \sqrt{S}$  действительно соответствует минимуму целевой функции. Для этого воспользуемся достаточным условием экстремума, найдя вторую производную от функции  $W$ :  $W'' = 2S/x^3$ . Это выражение положительно при любом  $x > 0$ , что и служит требуемым доказательством. Таким образом, оптимальным соотношением размеров прямоугольного оконного блока является равенство его сторон, т.е. оптимален оконный блок квадратной формы.

2. Предположим теперь, что оконный блок имеет двустворчатую конструкцию и задано число  $k$ , представляющее собой отношение площадей сечений брусков коробки и створок. Эти площади обозначим соответственно через  $s_1$  и  $s_2$ . Тогда  $k = s_2/s_1$ . Найдём оптимальные размеры  $x$  и  $y$  рамочной конструкции в этом случае, считая, как и прежде, что должно выполняться соотношение. Для упрощения расчёт проведем приближенно, пренебрегая различием продольных размеров коробки и створок. Минимизируемой величиной будет их суммарный объём. Коробка оконного блока содержит в данном случае внутреннюю стойку. Поэтому объём коробки равен  $s_1(2x + 3y)$  в предположении, что сечения всех ее брусков одинаковы. Для блока данной конструкции с двойным остеклением объём всех створок равен  $s_2(4x + 8y)$ .

Сумма этих объёмов, выступающая в роли целевой функции, равна

$$W = s_1(2x + 3y) + s_2(4x + 8y) = x(2s_1 + 3s_2) + y(3s_1 + 8s_2)$$

С учетом (4.13) целевая функция примет вид

$$W = x(2s_1 + 3s_2) + \left(\frac{S}{x}\right)(3s_1 + 8s_2)$$

Приравняв нулю производную от этого выражения, получим уравнение

$$x(2s_1 + 3s_2) + \frac{S}{x^2}(3s_1 + 8s_2) = 0$$

Его положительное решение, т. е. оптимальное значение  $x = x_{\text{опт}}$  равно

$$x_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{S(3s_1 + 8s_2)}{2s_1 + 4s_2}}$$

Из формулы получим значение  $y_{\text{опт}}$ :

$$y_{\text{опт}} = S/x_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{S(2s_1 + 4s_2)}{3s_1 + 8s_2}}$$

Поделив  $x_{\text{опт}}$  на  $y_{\text{опт}}$ , найдём оптимальное соотношение между размерами оконного блока:

$$\frac{x_{\text{опт}}}{y_{\text{опт}}} = \frac{(3s_1 + 8s_2)}{(2s_1 + 4s_2)}$$

С использованием коэффициента  $k = s_2/s_1$  его можно переписать в виде  $x_{\text{опт}}/y_{\text{опт}} = (3 + 8k)/(2 + 4k)$ . Если, например,  $k = 2$ , то  $x_{\text{опт}}/y_{\text{опт}} = 1,9$ . Аналогичным образом можно рассмотреть и оптимизировать размеры других вариантов конструкций оконных блоков.

### Задача оптимизации размеров фигурного бруса

В лесопилении хорошо известна задача об определении размеров четырехкантного бруса, выпиливаемого из бревна, при которых объём бруса максимален. Эта задача сводится к отысканию прямоугольника максимальной площади, вписанного в круг данного диаметра. Оптимальным будет брус квадратного сечения, сторона которого меньше диаметра бревна в  $\sqrt{2}$ .

На лесопильном оборудовании агрегатного типа выпиливают фигурный брус, одна из возможных конфигураций которого изображена на рис. 4.3. Сечение вписано в окружность данного радиуса  $r$ . Брус считаем симметричным:  $OD=OC=a$ ;  $AD=BC=b$ . Решим для него аналогичную задачу: каким должно быть соотношение между размерами  $a$  и  $b$ , чтобы площадь сечения бруса была максимальной?

Часть сечения бруса в первом квадранте представляет собой шестиугольник  $ODAKBC$ . Его площадь составляет четвертую часть всего сечения и равна сумме площадей прямоугольников  $ODAE$  и  $EKBC$ . Площадь первого прямоугольника равна  $ab$ , площадь второго  $b(a-b)$ . Суммарная площадь равна

$$S = ab + b(a - b) = 2ab - b^2.$$

Из треугольника  $ODA$  получим

$$a = \sqrt{r^2 - b^2}.$$

Подставив формулу для  $a$  в выражение для площади  $S$ , получим

$$S = 2b\sqrt{r^2 - b^2} - b^2.$$

Возьмем производную по  $b$  от этого выражения и приравняем ее нулю:

$$S' = 2\sqrt{r^2 - b^2} - 2b^2/\sqrt{r^2 - b^2} - 2b = 0.$$

После элементарных преобразований получим  $r^2 - 2b^2 - b\sqrt{r^2 - b^2} = 0$ . Уединив радикал и возведя обе части уравнения в квадрат, приведем его к виду  $r^2 - 5b^4 - 5b^2r^2 + r^4 = 0$

Рассмотрим только положительные решения этого биквадратного уравнения, имеющие физический смысл:

$$b_1 = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}; \quad b_2 = r\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}.$$

По формуле (4.15) получим соответствующие значения параметра  $a$ :

$$a_1 = \sqrt{r^2 - b_1^2} = r\sqrt{(5 + \sqrt{5})/10};$$

$$a_2 = \sqrt{r^2 - b_2^2} = r\sqrt{(5 - \sqrt{5})/10};$$

Видно, что  $a_1=b_2$  и  $a_2=b_1$ , т. е. оба решения дают одни и те же размеры бруса:  $2b_1 = 2a_2 =$

$$2r\sqrt{(5 - \sqrt{5})/10} \approx 0,5257d; \quad 2b_2 = 2a_1 = 2r\sqrt{(5 + \sqrt{5})/10} \approx 0,8506d, \quad \text{где } d=2r.$$

Отношение этих размеров равно

$$\alpha = b_1/a_1 = a_2/b_2 = \sqrt{(5 - \sqrt{5})/(5 + \sqrt{5})} = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618.$$

Нетрудно убедиться, что вторая производная от функции отрицательна, и, следовательно, найденные размеры бруса действительно соответствуют максимальной площади его сечения. Интересно сравнить площади сечений фигурного бруса оптимальных размеров и бруса квадратного сечения. Подставив в формулу значения

$b = b_1 = r\sqrt{(5 - \sqrt{5})/10}$  и  $a = a_1 = r\sqrt{(5 + \sqrt{5})/10}$ , получим после преобразования

$$S = S_{\text{опт}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}r^2 = \alpha r^2.$$

Это четверть сечения бруса. Вся же его площадь равна

$$S_1 = 4S_{\text{опт}} = 4\alpha r^2$$

Для квадратного бруса площадь сечения равна

$$S_2 = (2r/\sqrt{2})^2 = 2r^2$$

Искомое отношение площадей сечений составит

$$S_1/S_2 = 4\alpha r^2/(2r^2) = 2\alpha \approx 1,236.$$

Следовательно, объем пиломатериалов при выработке фигурного бруса оптимальных размеров примерно на 24 % выше, чем при выпиливании бруса квадратного сечения.

Полученное отношение  $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$  известно со времен Евклида и называется **ЗОЛОТЫМ СЕЧЕНИЕМ**. К нему приводит деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение всего отрезка к большей его части равнялось отношению большей части к меньшей. Это отношение получается при решении самых различных задач, в том числе в задачах о наилучших пропорциях архитектурных сооружений.

Ниже приведены условия еще нескольких простейших оптимизационных задач, которые могут быть решены самостоятельно.

1. Бункер для щепы круглого сечения и формы, изображенный на рис. 4.4, изготовлен из однородного материала постоянной толщины. Составить систему алгебраических уравнений, по результатам решения которой при заданных значениях  $B$ ,  $r$ ,  $h$  и объеме  $V$  бункера можно определить величины  $R$  и  $H$ , для которых минимален расход материала на изготовление бункера.

2. При склеивании заготовок по длине на зубчатый шип используют шипы с затуплением (рис. 4.5, а) и без затупления (рис. 4.5, б). Прочность клеевого соединения пропорциональна площади склеиваемых поверхностей. Определить, какая из конфигураций шипов будет наилучшей, исходя из этого критерия при заданном шаге  $t$  и высоте  $h$  шипов. В случае, если окажется предпочтительнее шип с затуплением, найти оптимальное соотношение размеров  $t$  и  $d$ .

3. Известно, что момент сопротивления четырехбитного бруса равен величине  $bh^2/6$ , где  $b$  - ширина;  $h$  - высота бруса. Какими должны быть размеры бруса, выпиленного из бревна с заданным вершинным диаметром  $d$ , чтобы его момент сопротивления был максимальным?

### Численные методы отыскания экстремума.

Несмотря на то, что необходимые и достаточные условия экстремума получены, вопрос о его отыскании' даже для рассматриваемого одномерного случая нельзя считать исчерпанным. Часто бывает, во-первых, что уравнение  $f'(x_1) = 0$  не поддается аналитическому решению. Во-вторых, функция  $f(x_1)$  может быть не задана аналитически. Например, ее значение в каждом случае может определяться по результатам работы некоторой компьютерной подпрограммы. Аналогичным образом обстоит дело в задачах экспериментальной оптимизации. В этом случае исследователь-экспериментатор располагает лишь возможностью постановки опытов при различных значениях аргумента  $x_1$ . По результатам каждого из них определяется соответствующее значение функции  $f(x_1)$ , но не ее аналитическое представление. Завершается серия опытов опытом вблизи точки экстремума.

В подобных случаях определяют экстремум функций численными или аналогичными им экспериментальными методами. Это, в частности, рассматриваемые ниже методы дихотомии, золотого сечения и градиентный метод. В каждом случае решается задача отыскания максимума функции одной переменной  $f(x_1)$ , заданной на отрезке  $(x_{\min} \dots x_{\max})$ . Предполагается, кроме того, что эта функция имеет на данном отрезке единственный максимум. Такие функции называют **унимодалными**. Других сведений относительно целевой функции, в том числе и знания ее аналитического представления, не потребуется. Необходимо только иметь возможность определять значение функции в любой точке отрезка  $(x_{1 \min} \dots x_{1 \max})$ .

Поиск экстремума численными методами можно рассматривать как своего рода вычислительный эксперимент. Поэтому в литературе при описании соответствующих методов часто используют экспериментальную терминологию. Так, вместо слов «вычислим значение функции в точке  $x_1$ » говорят: «поставим опыт в точке  $x_1$ » и т. п.

Рассматриваемые методы предполагают последовательную процедуру поиска экстремума, при которой очередной этап исследования планируется в зависимости от результатов предыдущих этапов. Менее эффективна пассивная стратегия, когда все опыты планируются заранее, т. е. до начала самой процедуры поиска.

**Метод дихотомии, или метод половинного деления.** На первом этапе вычисляются значения целевой функции в двух точках  $x_{11}$  и  $x_{12}$ , расположенных симметрично относительно середины диапазона варьирования переменной  $x_1$  и возможно ближе друг к другу. Здесь  $x_{11}$  и  $x_{12}$  - значения переменной  $x_1$  в первой и второй точках соответственно, и  $x_{12} > x_{11}$ .

Обозначим через  $\varepsilon$  разность между значениями переменной  $x_1$  в этих точках:  $\varepsilon = x_{12} - x_{11}$ . Значение переменной  $x_1$  в каждом из поставленных опытов, очевидно, равно

$$x_{11} = x_1^{(0)} - \varepsilon/2; \quad x_{12} = x_1^{(0)} + \varepsilon/2,$$



где  $x_1^{(0)}$  - абсцисса середины диапазона варьирования переменной  $x_1$  определяемая по формуле

$$x_1^{(0)} = (x_{1min} + x_{1max})/2.$$

Величина  $\varepsilon$  выбирается возможно меньшей, но достаточной для того, чтобы можно было зафиксировать различие результатов опытов.

Обозначим через  $y_1$  и  $y_2$  результаты соответственно первого и второго опытов, т. е. значения целевой функции в точках  $x_{11}$  и  $x_{12}$ . Пусть оказалось, например, что  $y_1 > y_2$  (рис. 4.6). При предположении об унимодальности функции отклика максимум не может находиться правее точки  $x/2$ . Поэтому точку оптимума  $x_{1opt}$  следует искать в диапазоне  $x_{1min} \leq x_{1opt} \leq x_{12}$

На следующем этапе, аналогично предыдущему, планируется постановка очередных двух опытов вблизи центра нового диапазона. Условия этих опытов:

$$x_{13} = x_1^{(1)} - \varepsilon/2; \quad x_{14} = x_1^{(1)} + \varepsilon/2, \quad \text{где } x_1^{(1)} = (x_{1min} + x_{12})/2.$$

Пусть  $y_3 < y_4$ . Значит, из дальнейшего рассмотрения можно исключить интервал от  $x_{1min}$  до  $x_{13}$ . Поэтому следующие два опыта ставятся вблизи середины интервала  $(x_{13}, x_{12})$  и т. д. Таким образом, в методе дихотомии по результатам каждой пары опытов интервал, в котором может находиться искомая точка оптимума, сокращается почти вдвое. Этот интервал называется интервалом неопределенности.

Сравним эффективность рассмотренного метода с эффективностью пассивной процедуры, при которой условия проведения всех опытов должны быть заданы заранее. Предположим, что запланирована постановка восьми опытов:  $N=8$ . По методу дихотомии в этом случае будет поставлено четыре серии по два опыта в каждой, в результате чего исходный интервал неопределенности уменьшится почти в  $2^4 = 16$  раз.

Будем считать, что при пассивном поиске точки расположены в диапазоне варьирования равномерно (точки 1, 2, ..., 8 на рис. 4.7). Тогда при постановке  $N$  опытов исходный диапазон будет поделен на  $(N - 1)$  интервалов. По результатам всего эксперимента интервал неопределенности будет равен двум полученным интервалам (интервал между точками 4 и 6), т. е. уменьшится по сравнению с исходным в  $(N - 1)/2$  раз. Для восьми точек интервал неопределенности уменьшится, следовательно, только в 3,5 раза. Таким образом, при поиске по методу дихотомии величина интервала неопределенности убывает с ростом  $N$  обратно пропорционально величине  $2^N$ , а при пассивном поиске обратно пропорционально числу  $N$ . Поэтому, чем больше  $N$ , тем эффективнее метод дихотомии по сравнению с пассивным поиском.

## Метод золотого сечения

Этот метод более эффективен, чем метод дихотомии. Как и по предыдущему методу, на первой итерации ставятся два опыта. Однако на каждом последующем этапе требуется постановка только одного опыта.

По методу золотого сечения значения переменной  $x_1$  в первых двух опытах соответственно равны  $x_{11} = x_{1min} + 0,382(x_{1max} - x_{1min})$ ;  $x_{12} = x_{1min} + 0,618(x_{1max} - x_{1min})$ . Иными словами, расстояние от точки  $x_{11}$  до

левой границы диапазона варьирования переменной  $x_1$  составляет 0,382 его длины, а расстояние от точки  $x_{12}$  до этой же границы - 0,618 его длины. При этом обе точки располагаются на отрезке симметрично, поскольку  $0,618 = 1 - 0,382$ .

По результатам постановки первых двух опытов возможны следующие варианты:

- 1)  $y_1 > y_2$ ; в этом случае, из дальнейшего рассмотрения исключается отрезок  $(x_{12} \dots x_{1max})$ . (при условии поиска максимума функции);
- 2)  $y_1 < y_2$  (рис. 4.8) исключается отрезок  $(x_{1min} \dots x_{11})$ .

Оставшийся отрезок в любом случае вновь делится двумя точками на три отрезка в том же отношении 0,382 и 0,618. Достоинство данного метода заключается в том, что, начиная со второй итерации, при делении каждого очередного отрезка в указанном отношении одна из

новых точек деления обязательно совпадет со старой точкой, в которой уже был поставлен опыт. Так, для случая иллюстрируемого рис. 4.8, при делении отрезка  $(x_{11} \dots x_{1max})$  получим старую точку  $x_{12}$  и новую точку  $x_{13}$ . Поэтому на второй итерации надо поставить только один опыт в точке  $x_{13}$ . Аналогичным образом ставится по одному опыту на каждой последующей итерации.

Отметим, что число 0,618, фигурирующее в описании метода, представляет собой приближенное значение величины  $\alpha = 0,5(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618033$ . Квадрат числа  $\alpha$  дает другую точку деления единичного отрезка в данном методе:  $\alpha^2 \approx 0,382$ . Интервал неопределенности после каждой итерации уменьшается здесь в  $1/\alpha$  раз.

Постановку опытов по методу золотого сечения удобно выполнять с использованием следующего алгоритма [6].

Шаг 1. Примем  $A_1 = x_{1min}$ ;  $A_2 = x_{1max}$ ;  $H = A_2 - A_1$ ;  $x_{лев} = A_1 + \alpha^2 H$ ;  $x_{пр} = A_1 + \alpha H$ . В точке  $x_{лев}$  и  $x_{пр}$  ставят опыты. Обозначим их результаты  $y(x_{лев})$  и  $y(x_{пр})$ .

Шаг 2. Сравним  $y(x_{лев})$  и  $y(x_{пр})$ . Если  $y(x_{лев}) \geq y(x_{пр})$  перейдем к шагу 3. Если  $y(x_{лев}) < y(x_{пр})$  перейдем к шагу 4.

Шаг 3. Примем  $A_2 = x_{пр}$  и  $H = x_{пр} - A_1$ . Прекратим эксперимент, если  $H$  достаточно мало. В противном случае в качестве нового  $x_{пр}$  выберем предыдущее  $x_{лев}$ , а в качестве нового  $x_{лев}$  - точку  $(A_1 + \alpha^2 H)$ . Поставим опыт в точке  $x_{лев}$  и вернемся к выполнению шага 2.

Шаг 4. Примем  $A_1 = x_{лев}$  и  $H = A_2 - x_{лев}$ . Прекратим эксперимент, если  $H$  достаточно мало. В противном случае в качестве нового  $x_{лев}$  выберем предыдущее  $x_{пр}$ , а в качестве нового  $x_{пр}$  точку  $(A_1 + \alpha H)$ . Поставим опыт в точке  $x_{пр}$  и вернемся к выполнению шага 2.

### Градиентный метод

Этот метод для решения одномерных задач оптимизации менее эффективен, чем рассмотренные выше методы дихотомии и золотого сечения. Однако благодаря своей простоте он широко применяется для оптимизации объектов автоматического управления. Кроме того, градиентный метод, в отличие от рассмотренных выше методов, удается обобщить на многомерный случай, т. е. модернизировать его для решения задачи отыскания экстремума функции нескольких переменных.

Пусть  $M$  - абсцисса искомой точки оптимума (для определенности - максимума) (рис. 4.9). Вначале целевая функция вычисляется в некоторой произвольной точке 1 внутри диапазона варьирования переменной  $x_1$ . Пусть результат вычислений равен  $y_1$ . Из этой точки желательно сдвинуться в направлении точки  $M$ , в данном случае - влево. Но поскольку положение точки  $M$  заранее не известно, сначала делается пробный шаг в одном из двух возможных направлений, т. е. влево или вправо от точки 1.

Пусть, например, пробный шаг сделан вправо (точка 2) и результат его  $y_2$

Из того, что  $y_2 < y_1$ , можно сразу заключить, что точка  $M$  находится левее точки 1. Поэтому следующий рабочий шаг делается влево от точки 1 в точку 3. Так как  $y_3 > y_1$  то очередной рабочий шаг делается в том же направлении, то есть в точку 4, и т. д. Придя, наконец, в точку 6, убеждаемся, что  $y_6 < y_5$ . • Значит, точка  $M$  находится между точками 5 и 6. Если точность, с которой найдена абсцисса точки  $M$ , недостаточна, движение продолжается от точки 6 с уменьшенной длиной шага.

## Методы поиска экстремума функций нескольких переменных

Рассмотрим задачу отыскания экстремума функций нескольких переменных

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в предположении, что каждая из  $n$  переменных может принимать любое действительное значение - положительное или отрицательное. В задачах с практическим содержанием, где переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  имеют физический смысл, их диапазоны изменения всегда ограничены; тем не менее, рассмотрение данной задачи оказывается полезным, поскольку те идеи, которые будут предложены для ее решения, окажутся применимыми и для задач оптимизации с ограничениями, т. е. задач нелинейного программирования, имеющих большое практическое значение.

## Необходимые и достаточные условия экстремума

Предположим, что функция  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет непрерывные производные по своим аргументам. Если эта функция имеет экстремум в точке  $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_n^{(0)})$  то все ее частные производные в этой точке обращаются в нуль:  $\partial f / \partial x_i$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ . Иными словами, если приравнять нулю все частные производные от  $y$  по  $x_i$  и решить полученную систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \partial f / \partial x_1 &= 0; \\ \partial f / \partial x_2 &= 0; \\ \vdots & \quad \vdots \\ \partial f / \partial x_n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

то среди найденных решений окажется и точка экстремума. Точки, удовлетворяющие системе (4.18), называются критическими.

Достаточные условия экстремума сформулируем только для функции двух переменных  $y = f(x_1, x_2)$ . Предположим, что точка  $M(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$  является критической точкой функции  $f(x_1, x_2)$  то есть

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}; x_2^{(0)})}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial f(x_1^{(0)}; x_2^{(0)})}{\partial x_2} = 0.$$

Пусть, кроме того, в некоторой области, содержащей точку  $M$ , функция  $f(x_1, x_2)$  имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Вычислим в этой точке вторые производные функции  $f(x_1, x_2)$ :

$$A = \frac{\partial^2 f(x_1^{(0)}; x_2^{(0)})}{\partial x_1^2}; \quad B = \frac{\partial^2 f(x_1^{(0)}; x_2^{(0)})}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad C = \frac{\partial^2 f(x_1^{(0)}; x_2^{(0)})}{\partial x_2^2}.$$

Обозначим через  $D$  выражение  $A C - B^2$ . Тогда функция  $f(x_1, x_2)$  имеет в точке  $M$ :

- 1) минимум, если  $D > 0$  и  $A > 0$ ;
- 2) максимум, если  $D > 0$  и  $A < 0$ ;
- 3) отсутствие экстремума, если  $D < 0$ .

Если же  $D = 0$ , то экстремум в точке  $M$  может быть или не быть (в этом случае требуется дополнительное исследование).

**Задача оптимизации размеров тарного ящика.** Предположим, что ящик имеет форму прямоугольного параллелепипеда, все его стенки имеют одинаковую толщину и изготовлены из одного и того же материала. Требуется найти оптимальные размеры ящика (без крышки) при заданной его вместимости  $V$ .

Обозначим длину, ширину и высоту ящика через  $x, y$  и  $z$  соответственно. Тогда

$$V = xyz.$$

С учетом принятых предположений количество материала, необходимое для изготовления ящика, пропорционально площади всех его стенок, равной  $W = xy + 2yz + 2xz$ . Это выражение служит целевой функцией, подлежащей минимизации.

Подставив в него соотношение  $z = V/(xz)$  полученное из формулы, перепишем целевую функцию в виде функции двух переменных:

$$W = xy + 2V/x + 2V/y.$$

Воспользуемся необходимыми условиями экстремума. Для этого запишем систему уравнений вида так:

$$\left. \begin{aligned} \partial W / \partial x &= 0; \\ \partial W / \partial y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вычислим производные:  $\partial W / \partial x = y - 2V/x^2$ ;  $\partial W / \partial y = x - 2V/y^2$ . Тогда записанная выше система уравнений примет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} y - 2V/x^2 &= 0; \\ x - 2V/y^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \text{или} \begin{cases} x^2 y = 2V; \\ x y^2 = 2V. \end{cases}$$

Решением ее будут выражения:  $x_{\text{опт}} = y_{\text{опт}} = \sqrt[3]{2V}$ . Далее получаем значение

$$z_{\text{опт}} = V/(x_{\text{опт}} y_{\text{опт}}) = V/\sqrt[3]{(2V)^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

Поделив  $x_{\text{опт}}$  на  $y_{\text{опт}}$ , найдем соотношение между стороной и высотой

ящика:  $x_{\text{опт}} / y_{\text{опт}} = 2$ . Таким образом, найденное решение соответствует ящику, имеющему одинаковую длину и ширину, а высоту - вдвое меньшую, чем длину.

Убедимся, что полученное решение действительно доставляет минимум целевой функции. Для этого воспользуемся сформулированными в достаточными условиями. Вычислим вторые производные целевой функции  $W$ :

$$\partial^2 W / \partial x^2 = 4V/x^3; \partial^2 W / \partial x \partial y = 1; \partial^2 W / \partial y^2 = 4V/y^3.$$

Подставив в эти формулы найденные значения для  $x_{\text{опт}}$ ,  $y_{\text{опт}}$  и  $z_{\text{опт}}$ , получим:  $A=2$ ;  $B=1$ ;  $C=2$ . Вычислим  $D=AC - B^2=3$ . Имеем  $D > 0$  и  $A > 0$ . Следовательно, найденные размеры ящика соответствуют минимальной площади его поверхности.

Аналогичным образом можно оптимизировать размеры ящика, у которого, например, торцевые стенки имеют двойную толщину по сравнению с продольными стенками, дном и крышкой. В этом случае в качестве критерия следует рассматривать минимум объема расходуемого материала, а полученное решение проверить по прочностным показателям.

Действительно же корректной была бы задача оптимального проектирования изделия, исходя из некоторого экономического критерия, с учетом прочностных, функциональных и других характеристик.

Сформулированные выше необходимые и достаточные условия экстремума функций лишь в редких случаях удается использовать для решения практических задач прежде всего из-за сложности решения системы, которая, как правило, оказывается нелинейной. Чаще здесь используют численные методы, которые описаны ниже (пп. 4.3.2 - 4.3.6).

Будем по-прежнему отыскивать максимум функции и предполагать его единственность, хотя в многомерном случае это предположение значительно менее вероятно, чем в одномерном.

## Метод покоординатного поиска

Иногда этот метод называют методом Гаусса - Зейделя. Согласно данному методу переменные варьируются в ходе исследования поочередно. Вначале задается исходная точка  $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  в которой ставится первый опыт. Затем последовательно изменяются значения только одной переменной, например  $x_1$ , а остальные переменные  $x_2, x_3, \dots, x_n$  фиксируются на своих начальных уровнях  $x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ .

Из поставленных опытов отыскивается наилучший, т. е. тот, для которого значение  $y$  максимально. Соответствующее значение переменной  $x_1$  фиксируется. В этих условиях последовательно изменяют значения переменной  $x_2$ . Для опытов этой серии отыскивается и фиксируется ее наилучшее значение. В следующей серии варьируется только  $x_3$ , если число переменных больше двух, и т. д. до  $x_n$ . Затем цикл поочередного варьирования переменных проводят заново, начиная с  $x_1$ . Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет найдена точка, смещение относительно которой варьированием любого фактора приводит только к ухудшению результата. Она принимается за точку оптимума.

Для двумерного случая ( $n=2$ ) на рис. 4.10 дана геометрическая интерпретация метода. Условия опытов здесь изображены точками на плоскости, по координатным осям которой откладываются значения переменных  $x_1$  и  $x_2$ . На этом рисунке нанесены также **линии уровня**, или линии равного выхода. Для всех точек, лежащих на данной  $i$ -й линии уровня, значение отклика одинаково и равно некоторому значению  $y_i$ . Условия опытов первой серии изображены точками 1 - 5. Лучшим среди них оказался четвертый опыт. Соответствующее ему значение переменной  $x_1$  сохраняется

для всех опытов следующей серии, где варьируется  $x_2$  (точки 6 - 11). Здесь лучший опыт - десятый. Затем вновь варьируется переменная  $x_1$  и т. д. Всего для достижения области оптимума (точка 19) в данном случае понадобилось пять серий опытов.

Основное достоинство метода заключается в простоте его реализации. Алгоритм метода предусматривает только вычисления значений целевой функции без использования ее производных. Такие методы называют **прямыми**, или **методами нулевого порядка**. С другой стороны, именно из-за того, что при поиске экстремума по данному методу не используется информация о значениях производной целевой функции, он не относится к

числу эффективных. В частности, метод покоординатного поиска работает плохо, если имеет место взаимодействие между какими-либо переменными  $x_i$  и  $x_j$ , то есть в выражение для целевой функции входит произведение  $x_i x_j$ .

## Градиентный метод

Градиентный метод и его разновидности относятся к самым распространенным методам поиска экстремума функций нескольких переменных. Идея градиентного метода заключается в том, чтобы в процессе поиска экстремума (для определенности максимума) двигаться каждый раз в направлении наибольшего возрастания целевой функции.

Градиентный метод предполагает вычисление первых производных целевой функции по ее аргументам. Он, как и предыдущие, относится к приближенным методам и позволяет, как правило, не достигнуть, а только приблизиться к точке оптимума за конечное число шагов.

Вначале выбирают начальную точку  $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ . Если в одномерном случае из нее можно было сдвинуться только влево или вправо (см. рис. 4.9), то в многомерном случае число возможных направлений перемещения бесконечно велико. На рис. 4.11, иллюстрирующем случай двух переменных, стрелками, выходящими из начальной точки А, показаны различные возможные направления. При этом движение по некоторым из них дает увеличение значения целевой функции по отношению к точке А (например, направления 1 - 3), а по другим направлениям приводит к его уменьшению (направления 5 - 8). Учитывая, что положение точки оптимума неизвестно, считается наилучшим то направление, в котором целевая функция возрастает быстрее всего. Это направление называется **градиентом** функции. Отметим, что в каждой точке координатной плоскости направление градиента перпендикулярно касательной к линии уровня, проведенной через ту же точку.

В математическом анализе доказано, что составляющие вектора градиента функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  являются ее частными производными по аргументам, т. е.

$$\text{grad } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{ \frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial x}{\partial x_n} \right\}.$$

Таким образом, при поиске максимума по методу градиента на первой итерации вычисляют составляющие градиента по формулам для начальной точки  $\bar{x}^{(0)}$  и делают рабочий шаг в найденном направлении, т. е. осуществляется переход в новую точку  $\bar{x}^{(1)}$  с координатами:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1^{(1)} &= \bar{x}_1^{(0)} + \lambda \left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}^{(0)}}; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \bar{x}_n^{(1)} &= \bar{x}_n^{(0)} + \lambda \left. \frac{\partial y}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}^{(0)}} \end{aligned} \right\}$$

Рис. 4.12. Геометрическая интерпретация градиентного метода (двумерный случай) или в векторной форме

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \lambda \text{ grad } f(\bar{x}^{(0)}),$$

где  $\lambda$  - постоянный или переменный параметр, определяющий длину рабочего шага,  $\lambda > 0$ . На второй итерации снова вычисляют вектор градиент уже для новой точки  $\bar{x}^{(1)}$ , после чего по аналогичной формуле переходят точку  $\bar{x}^{(2)}$  и т. д. (рис. 4.12). Для произвольной  $k$ -й итерации имеем

$$\bar{x}_i^k = \bar{x}_i^{k-1} + \lambda \left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}^{k-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Если отыскивается не максимум, а минимум целевой функции, то на каждой итерации делается шаг в направлении, противоположном направлению градиента. Оно называется направлением антиградиента. Вместо формулы в этом случае будет

$$\bar{x}_i^k = \bar{x}_i^{k-1} - \lambda \left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}^{k-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Существует много разновидностей метода градиента, различающихся выбором рабочего шага. Можно, например, переходить в каждую последующую точку при постоянной величине  $\lambda$ , и тогда длина рабочего шага - расстояние между соседними точками  $\bar{x}^{(k)}$  и  $\bar{x}^{(k+1)}$  -

окажется пропорциональной модулю вектора градиента. Можно, наоборот, на каждой итерации выбирать  $\lambda$  таким, чтобы длина рабочего шага оставалась постоянной.

### **Метод наискорейшего подъема**

В случае поиска минимума его называют методом наискорейшего спуска. Он представляет собой разновидность градиентного метода. По этому методу величина  $\lambda$  на каждой итерации выбирается такой, чтобы приращение целевой функции при движении в данном направлении было наибольшим. Легко показать, что при этой процедуре направление градиента в очередной точке  $\bar{x}^{(k)}$  перпендикулярно к направлению его в предыдущей точке  $\bar{x}^{(k-1)}$ . Действительно, пусть градиент в начальной точке  $\bar{x}^{(0)}$  направлен по лучу  $l$  (рис. 4.14). Из этой точки выполняется переход в точку  $\bar{x}^{(1)}$ , для которой значение целевой функции, равное некоторому числу  $u_1$ , больше, чем в любой другой точке, находящейся на луче  $l$ . Отсюда следует, что линия уровня, соответствующая значению  $u=u_1$  пересечет луч  $l$  в единственной точке  $\bar{x}^{(1)}$ . ЗСМ, то есть будет касаться этого луча. Поскольку градиент в точке  $\bar{x}^{(1)}$  перпендикулярен к касательной к линии уровня  $u=u_1$ , то он будет перпендикулярен и к градиенту в точке  $\bar{x}^{(0)}$ .

### **Применение методов оптимизации в системах автоматизированного управления технологическими процессами деревообработки**

#### **Управление раскромом пиловочного сырья в автоматизированном лесопильном цехе**

Методы оптимизации широко используются для оперативного управления технологическими процессами в условиях функционирования АСУ. При этом функции управления процессом выполняет вычислительная техника. В зависимости от конкретной ситуации возможны различные принципы ее использования. В одних случаях всеми стадиями технологического процесса управляет единственная ЭВМ. В других случаях система управления содержит несколько ПЭВМ, каждая из которых управляет определенным участком технологического процесса. Основная функция ЭВМ заключается в переработке входных данных - о характеристиках сырья, требованиях к готовой продукции и т. д. - и выдаче информации о необходимом уровне управляющих воздействий, в частности об оптимальных режимах технологического процесса. Для этого ЭВМ снабжают программами решения соответствующих задач, в том числе оптимизационных.

Например, один из возможных вариантов построения технологической схемы участка раскромки бревен в автоматизированном лесопильном цехе состоит из двух технологических линий. На первой раскраивается тонкомерное, а на второй - крупномерное сырье. Остановимся подробнее на второй линии (рис. 4.23). Система содержит ЭВМ, в которую заранее введена информация о спецификации вырабатываемых пиломатериалов. Первоначально бревно проходит через систему датчиков, с помощью которых замеряются его основные параметры и характеристики формы: длина, диаметры в определенных сечениях, кривизна.

Эти данные поступают в ЭВМ, которая вырабатывает информацию о необходимом положении режущих инструментов, а также об оптимальном положении и ориентации бревна относительно постава пил, с тем, чтобы обеспечить максимальный объемный выход пиломатериалов при заданной спецификации. Для решения этой довольно сложной оптимизационной задачи разработаны специальные алгоритмы и программы. В соответствии с информацией, полученной от ЭВМ, специальная система рычагов ориентирует бревно и направляет его в линию раскромки.

Первоначально бревно проходит через фрезерные станки для придания плоской формы основанию и двум сторонам бревна, затем - через сдвоенный брусующий ленточнопильный станок. Боковые доски с него поступают на один из двух обрезных станков. Полученный брус подается на следующий фрезерный станок, который обрабатывает его четвертую сторону, а затем брус поступает на пятипильный ленточнопильный станок, где распиливается на доски. Наряду с ориентацией бревен ЭВМ управляет и системой центрирования брусков, поступающих на ленточнопильные станки, а также периодически

дает команду на перестановку пил этих станков, корректируя схемы раскроя пиловочного сырья, с учетом уже выполненной части спецификации.

Еще более совершенной является система, в которой датчики передают в ЭВМ информацию не только о форме бревна, но и о его пороках, прежде всего о сучках. В этом случае ЭВМ управляет ориентацией и раскроем бревна уже с позиций максимума его ценностного выхода.

### **Общая постановка задачи исследования операций**

Динамическое программирование - это один из методов решения сложных задач оптимизации. Его существенная особенность состоит в разделении исследуемого процесса на этапы (шаги). Этапы могут соответствовать, например, различным периодам времени функционирования системы, отдельным узлам или участкам рассматриваемого объекта, различным стадиям технологического процесса и т. д. Для каждого этапа решается задача оптимизации. Таким образом, решение сложной исходной задачи сводится к решению ряда более простых оптимизационных задач, взаимосвязанных друг с другом.

Эффективность решения задачи оптимизации на некотором  $i$ -м этапе характеризуется величиной критерия оптимальности ( $i$ ). Достижение экстремума этого критерия обеспечивается отысканием значений управляющих переменных - элементов решения. В задачах динамического программирования их называют **управлениями**. Управление на каждом шаге  $\bar{u}_i$  - это вектор, состоящий из совокупности некоторого числа  $t$  управляющих переменных:

$$\bar{u}_i = (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(m)}).$$

В более сложных случаях компонентами вектора управления могут быть функции и даже качественные показатели, например: различные способы подготовки сырья, профили режущих инструментов, использование той или иной технологической схемы и т. п.

Предположим, что целевая функция  $W$  всей задачи определяется как сумма частных критериев по всем этапам процесса, т. е.

$$W = \sum_{i=1}^n \omega_i$$

где  $n$  - число этапов. Такой критерий оптимальности называется **аддитивным**.

Пусть, например, предстоит осуществить реконструкцию деревооб-рабатывающего предприятия в течение  $n$  лет. В начале каждого года предполагается вкладывать в реконструкцию определенные средства. Ежегодная прибыль предприятия зависит от объема средств, вложенных в его реконструкцию в начале данного года. Требуется определить, сколько средств следует выделять на реконструкцию в начале каждого года при заданном их общем объеме, чтобы суммарная прибыль предприятия за  $n$  лет была максимальной. Сформулированная задача является простейшей задачей распределения ресурсов. При решении ее методом динамического программирования естественно выделяются этапы, соответствующие первому году функционирования системы. Целевая функция на каждом этапе - прибыль, полученная предприятием в данном году. Величина критерия оптимальности для всей задачи определится как сумма величин прибыли за все  $n$  лет. Управлением на каждом шаге будет единственная переменная - объем средств, вкладываемых в реконструкцию в начале каждого года.

Поэтапное решение задачи методом динамического программирования предполагает не обособленное, а взаимосвязанное рассмотрение этапов. Решение, принятое на каждом шаге, должно обязательно учитывать последующее протекание процесса. Если этого не делать, а решать задачу оптимизации на каждом этапе изолированно, исходя из получения максимума критерия оптимальности только на этапе, то решение всей задачи оптимальным, как правило, не будет. Такая “близорукая” стратегия, в применении к предыдущему примеру, означала бы, что все средства вкладываются в реконструкцию в первый же год.

Проще всего начать решение задачи с оптимизации последнего,  $n$ -го, этапа, поскольку последующие этапы, которые следовало бы учитывать при его оптимизации, отсутствуют. Вследствие этого в качестве критерия здесь можно взять максимум целевой функции, или,

как говорят, выигрыша, на данном шаге. Однако для решения этой задачи надо знать, чем закончился предыдущий ( $n - 1$ )-й шаг. Приходится делать об этом различные предположения и для каждого из них решать задачу. Каждое из полученных решений называется условным оптимальным управлением на  $n$ -м шаге, а соответствующее значение целевой функции - условным оптимальным выигрышем.

### **Задача оптимизации режимов работы для группы машин, входящих в состав станочной линии**

Режимы работы нескольких станков, выполняющих ряд последовательных операций в составе станочной линии, часто оказываются взаимосвязанными. В этом случае задача оптимизации режимов работы оборудования намного сложнее, чем та же задача, рассматриваемая для отдельно взятой рабочей машины. Изложим на конкретном примере постановку этой задачи и принцип ее решения с применением метода динамического программирования.

Рассматривается технологический процесс изготовления круглых палок. Станочная линия в этом процессе состоит из  $t$  одинаковых круглопалочных и  $N$  шлифовальных станков. Все круглопалочные станки работают в одинаковых режимах. Каждая заготовка обрабатывается сначала на одном из круглопалочных станков, а затем поступает последовательно на шлифовальные станки. Обработкой на круглопалочном станке задаются необходимые размеры и форма детали. Обработка на шлифовальных станках производится для последовательного повышения качества поверхности детали, т. е. для уменьшения ее шероховатости, характеризуемой максимальной высотой микронеровностей  $R_{m_{max}}$  на поверхности детали.

Каждый последующий шлифовальный станок имеет шлифовальную шкурку с меньшей зернистостью, поэтому качество детали, обработанной на нем, повысится. Заданное качество обработки достигается на последнем шлифовальном станке. Помимо зернистости  $d$  шлифовальной шкурки процесс ленточного шлифования определяется еще рядом независимых факторов. Среди них следующие управляемые факторы: скорость  $v$ , м/с, предельная износостойкость  $1 \text{ см}^2$  шкурки  $p_{пр}$ , см, (путь, пройденный шкуркой за все время ее работы), удельное давление шкурки на обрабатываемую деталь в зоне контакта  $q$ , Н/см<sup>2</sup>; величина снимаемого припуска  $h$ , см. Процесс обработки детали на круглопалочном станке определяется лишь тремя управляемыми факторами: подачей на резец  $u_z$ , мм, частотой вращения шпинделя  $n_{шп}$ , мин<sup>-1</sup> и предельной износостойкостью режущего инструмента  $L_{ст}$ , км.

Требуется определить необходимое число круглопалочных и шлифовальных станков и рассчитать оптимальные значения перечисленных выше управляемых параметров, исходя из выбранного критерия минимума суммарной себестоимости обработки. При этом необходимо обеспечить заданное качество обработки поверхности деталей и заданную производительность станочной линии.

Исходя из подхода к задаче в рамках метода динамического программирования, обработку деталей на станках линии рассматривают как многошаговый процесс. Состояние системы после первого шага связывается с обработкой на круглопалочном станке, состояние после второго, третьего и т. д. шагов характеризует обработку детали соответственно на первом, втором и т. д. шлифовальных станках.



Вводится двухкомпонентный вектор фазового состояния  $\bar{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)})$  для каждого шага  $i$ . Первая компонента  $x_i^{(1)}$  характеризует качество обработки после  $i$ -го шага, т. е. после  $(i-1)$ -го шлифовального станка, если  $i \geq 2$ , или после круглопалочного станка, если  $i = 1$ . Примем в качестве  $x_i^{(1)}$  величину  $x_i^{(1)} = 1 / R_{m_{max}}$ . Здесь  $R_{m_{max}}$  максимальная высота микронеровностей на поверхности детали после  $i$ -го шага.

Обозначим через  $\Pi_1$ , (деталей за смену) производительность круглопалочного станка, а через  $\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n$  - производительности соответствующих шлифовальных станков. Здесь  $n = N + 1$ . Это число этапов процесса, т. е. число станков, на которых проходит обработку каждая из деталей. Требование отсутствия простоев оборудования обеспечивается ограничением

$$\Pi_1 \geq \Pi_2 \geq \dots \geq \Pi_n$$

В качестве второй компоненты  $x_i^{(2)}$  вектора фазового состояния  $\bar{x}_i$  рассмотрим время, необходимое для обработки одной детали на первых  $i$  станках. Очевидно  $x_i^{(2)} = T / \Pi_1$ , где  $T$  - продолжительность смены, мин.

С учетом уравнения  $x_i^{(2)} = T / \Pi_1 + T / \Pi_2 + \dots + T / \Pi_i$ . Следовательно,

$$x_i^{(2)} = x_{i-1}^{(2)} + T / \Pi_i$$

Полное время обработки одной детали на всех  $n$  станках равно

$$x_n^{(2)} = T \sum_{i=1}^n 1 / \Pi_i$$

Пусть сменное задание состоит в обработке  $n_T$  деталей. Найдем время  $t$  его выполнения:

$$t = T / \Pi_1 + T / \Pi_2 + \dots + T / \Pi_{n-i} + n_T T / \Pi_{n-i} = x_n^{(2)} + (n_T - 1) T / \Pi_n$$

Сменное задание будет выполнено, если  $t \leq T$ , т. е.

$$x_n^{(2)} + \frac{(n_T - 1)T}{\Pi_n} \leq T$$

Для первой компоненты вектора  $x_i^{(1)}$  на последнем шаге должно выполняться условие  $x_n^{(1)} \geq x_{кон}^{(1)}$ , где  $x_{кон}^{(1)}$  соответствует требуемому классу качества обработки поверхности детали. Последними двумя неравенствами задается множество конечных состояний системы  $\bar{x}_{кон}$ .

Вводится вектор управления  $\bar{u}_i, i = 1, 2, \dots, n$ . На первом шаге он состоит из трех компонент, относящихся к режимным параметрам круглопалочного станка  $\bar{u}_1 = (u_z, n_{шп}, L_{ст})$ .

На втором и последующих шагах вектор  $\bar{u}_i$  состоит из пяти компонент - режимных факторов шлифовальных станков:  $\bar{u}_i = (q, d, h, v, p_{пр})$  при  $i \geq 2$ . Целевая функция задачи представляет собой переменную долю себестоимости обработки, равную сумме величин себестоимости по всем этапам процесса, и является аддитивной функцией. Выражение для целевой функции на каждом шаге, т. е. для круглопалочного и каждого из шлифовальных станков, получено из общей формулы. Аналогичным образом, исходя из формулы, найдены выражения для производительности каждого вида оборудования.

Обобщение результатов технологических исследований позволило также найти выражения для параметра  $R_{m_{max} i}$ , характеризующего качество обработки в зависимости от компонент векторов фазового состояния и управления на каждом шаге. Эти выражения вместе с формулой определяют переход системы из очередного состояния в последующее. С использованием полученных соотношений для данной задачи составлено основное функциональное уравнение динамического программирования. В результате удалось свести ее решение к решению последовательности задач нелинейного программирования небольшой размерности.

## Задача о замене оборудования

Процесс эксплуатации оборудования сопровождается его старением, в ходе которого снижается производительность, увеличиваются затраты на ремонт и обслуживание. В какой-то момент оказывается более выгодным продать устаревшее оборудование и заменить его новым. Таким образом, возникает задача определения оптимального срока эксплуатации оборудования, по истечении которого его следует заменить.

Предположим, что для данного вида оборудования известны зависимости следующих характеристик от времени  $t$  его эксплуатации: стоимости производимой за год продукции  $f(t)$

$t$ ); ежегодных затрат на эксплуатацию, включая ремонты  $r(t)$  ликвидной стоимости оборудования, т. е. стоимости, полученной в результате его продажи,  $\psi(t)$ . Известна также начальная стоимость оборудования  $p$ . Определим рациональный срок  $T^*$  службы оборудования, при котором средняя величина ежегодной прибыли от его эксплуатации будет максимальна. Решение этой задачи не составляет трудностей. Величина прибыли  $\Pi$  за  $T$  лет эксплуатации оборудования равна, очевидно,

$$\Pi = f(1) + f(2) + \dots + f(T) + \psi(T) - p - [r(1) + r(2) + \dots + r(T)]$$

где  $f(1), f(2), \dots$  - это стоимость продукции, произведенной в 1-й, 2-й, ...,  $n$ -й год его эксплуатации;  $\psi(T)$  - ликвидная стоимость при продаже оборудования по истечении  $T$  лет эксплуатации. Средняя величина ежегодной прибыли равна

$$\Pi_{cp} = \Pi / T$$

где  $\Pi$  определяется по формуле. Искомую величину  $T^*$  получим, взяв производную по  $T$  от выражения для  $\Pi_{cp}$  и приравняв ее нулю.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай. Пусть характеристики  $f(t)$  и  $\psi(t)$  не зависят от  $t$ , т. е.  $f(t) = f$ ;  $\psi(t) = \psi$ , а функция  $r(t)$  является линейной:  $r(t) = a + bt$ , где  $a$  и  $b$  - некоторые константы. Тогда выражение для средней ежегодной прибыли  $\Pi_{cp}$  с учетом примет вид

$$\Pi_{cp} = [Tf + \psi - p - aT - b(1 + 2 + \dots + T)] / T$$

Воспользовавшись формулой для суммы членов арифметической прогрессии, получим

$$\Pi_{cp} = f - a + \frac{\psi - p}{T} - b \frac{1 + T}{2}$$

Взяв производную по  $T$  от этого выражения и приравняв ее нулю, после простых преобразований найдем

$$T^* = \sqrt{2(p - \psi) / b}$$

При решении задач о замене оборудования часто приходится учитывать те или иные проявления технического прогресса. Так, со временем система технического обслуживания может улучшаться, что приведет к снижению уровня расходов на эксплуатацию; оборудование может заменяться не идентичным, а более совершенным и т. п. Задача в этом случае оказывается более сложной и формулируется несколько по-иному.

Рассмотрим достаточно большой промежуток времени из  $n$  лет, в течение которого оборудование заведомо будет неоднократно заменяться. Будем считать, что решение о замене или о продолжении эксплуатации оборудования может быть принято в начале любого  $i$ -го года,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Характеристики оборудования,  $f, \psi, r$ , зависят теперь уже не только от продолжительности  $t$  его эксплуатации, но и от года  $i$ , в котором эта эксплуатация производится, т. е.  $f = f_i(t)$ ;  $r = r_i(t)$ . Стоимость  $p$  оборудования также зависит от года  $i$ , в начале которого оно введено в эксплуатацию:  $p = p_i$ . Требуется определить, в какие именно годы внутри рассматриваемого промежутка в  $n$  лет следует заменять оборудование, руководствуясь критерием максимума суммарной прибыли, полученной за все это время. Очевидно, что теперь не следует ожидать одинаковых промежутков времени эксплуатации оборудования из-за изменения его характеристик. Одним из эффективных методов решения этой задачи является метод динамического программирования.

Пусть деление процесса на этапы совпадает с естественным делением рассматриваемого промежутка времени на годы. Всего, следовательно, имеем  $n$  этапов. Состояние системы в конце каждого  $i$ -го этапа (года) определяется единственной фазовой координатой  $x_i$ . В качестве  $x_i$  возьмем время  $t$ , прошедшее от начала эксплуатации оборудования, функционирующего в данный момент, до момента окончания  $i$ -го года:  $x_i = t$ . Пусть, например, на шестом году функционирования системы работает оборудование, установленное в начале четвертого года. Тогда  $x_6 = 3$ . Управление  $u_i$  на каждом шаге в данной задаче представляет собой не количественный, а качественный параметр и заключается в принятии одного из двух возможных решений: продолжать эксплуатацию имеющегося оборудования либо заменить его новым. Поэтому будем считать, что переменная  $u_i$  может принимать на каждом шаге одно из двух значений:  $u_i = u_0$ , что соответствует решению продолжать эксплуатацию оборудования, или  $u_i = u_{np}$ , означающее решение продать имеющееся оборудование и купить взамен новое.

Выведем теперь соотношения вида, определяющие переход системы в каждое последующее состояние. Очевидно, что при управлении  $u_i = u_0$  время эксплуатации оборудования к концу

$i$ -го года увеличится по сравнению с моментом окончания предыдущего года на один год, т. е.  $x_i = x_{i-1} + 1$ . Другой случай,  $u_i = u_{\text{пр}}$ , означает, что к началу  $i$ -го года будет установлено новое оборудование, которое к концу этого года проработает ровно год, поэтому  $x_i = 1$ . Таким образом,

$$x_i = \varphi(x_{i-1}) = \begin{cases} x_{i-1} & \text{при } u_i = u_3; \\ 1 & \text{при } u_i = u_{\text{пр}}. \end{cases}$$

Найдем выражение для целевой функции на  $i$ -м шаге  $\omega_i(x_{i-1}, u_i)$ , входящее в состав основного функционального уравнения (5.10). При  $u_i = u_3$  прибыль, полученная за  $i$ -й год, определяется как разность между стоимостью продукции, выработанной за этот год, и годовыми эксплуатационными затратами, т. е. будет равно

$$f_i(x_i) - r_i(x_i)$$

или, с учетом выражения,

$$\omega_i(x_{i-1}, u_i) = f_i(x_{i-1} + 1) - r_i(x_{i-1} + 1)$$

Если же  $u_i = u_{\text{пр}}$ , то в выражение для  $\omega_i$  войдут со знаком плюс, величина стоимости продукции за первый год работы нового оборудования, то есть  $f_i(1)$ , и ликвидная стоимость старого оборудования к моменту его замены  $\psi_{i-1}(x_{i-1})$  со знаком минус - стоимость нового оборудования  $\rho_i$  эксплуатационные затраты за первый год эксплуатации  $r_i(1)$ :

$$\omega_i(x_{i-1}, u_i) = \begin{cases} f_i(x_{i-1} + 1) - r_i(x_{i-1} + 1) & \text{при } u_i = u_3; \\ f_i(1) - \psi_{i-1}(x_{i-1}) - \rho_i - r_i(1) & \text{при } u_i = u_{\text{пр}} \end{cases}$$

Теперь определены все зависимости, входящие в основное функциональное уравнение, которое для данной задачи имеет вид

$$W_i^*(x_{i-1}) = \max\{\omega_i(x_{i-1}, u_i) + W_{i+1}^*\phi(x_{i-1})\}$$

Выражение для функции  $\omega_i(x_{i-1}, u_i)$  здесь определяется формулой, а для функции  $\phi(x_{i-1})$  формулой.

Осталось рассмотреть процедуру оптимизации последнего,  $n$ -го, шага. Предположим, что по окончании периода в  $n$  лет оборудование, которое работало на последней стадии процесса, продается, а его ликвидная стоимость добавляется к величине общей прибыли. Тогда

$$W_n^*(x_{n-1}) = \max \begin{cases} f_n(x_{n-1} + 1) - r_n(x_{n-1} + 1) + \psi_n(x_{n-1} + 1) & \text{при } u_i = u_3; \\ f_n(1) - \psi_{n-1}(x_{n-1}) - \rho_n - r_n(1) + \psi_n(1) & \text{при } u_i = u_{\text{пр}} \end{cases}$$

Представляет практический интерес и модификация рассмотренной задачи, в которой наряду с оптимальными сроками эксплуатации оборудования определяется и оптимальное время проведения его ремонтов. В этом случае предполагаются известными затраты на ремонт, а также характеристики оборудования после его проведения. Управление на каждом шаге теперь состоит в принятии одного из трех решений: 1) продолжать эксплуатацию оборудования; 2) отремонтировать его, после чего продолжить эксплуатацию; 3) заменить данное оборудование новым.

## Задачи оптимального управления в деревообработке

### Общие сведения и примеры задач оптимального управления

Постановка задачи оптимального управления была дана в п. применительно к дискретным задачам: предполагалось, что переменные управления принимают лишь дискретный набор значений. Ниже рассматриваются непрерывные задачи оптимального управления динамическими процессами, т. е. процессами функционирования которых рассматривается во времени. При этом объект исследования описывается дифференциальными уравнениями, а переменные управления являются функциями времени. В деревообработке это относится, например, к оптимальному управлению исполнительными механизмами деревообрабатывающих станков, управлению процессами сушки пиломатериалов, прессования ДСтП и ДВП. Для решения непрерывных задач оптимального управления также можно использовать идеи динамического программирования. Однако более эффективно в данном случае применение другого математического аппарата - **принципа максимума Понтрягина**.

Предварительно поясним на простейшем примере смысл понятия "управление" для непрерывных систем. Пусть управляемый объект - автомобиль. Рассмотрим случай его

прямолинейного движения. Состояние автомобиля как движущегося тела характеризуется в каждый момент времени двумя числами: пройденным расстоянием  $S$  и скоростью  $v$ . Каждая из этих величин меняется во времени, т. е.  $S$  и  $v$  - функции аргумента  $t$ :  $S = S(t)$ ;  $v = v(t)$ . Изменение параметров  $v$  и  $S$  не произвольно, а зависит от заданной водителем силы тяги двигателя  $F$ . Таким образом, имеем три параметра, характеризующие данный объект. Два из них,  $S$  и  $v$ , определяют состояние объекта и называются фазовыми координатами. Третий параметр,  $F$ , - параметр управления. Если рассматривать движение автомобиля не по прямой, а по плоскости, то фазовых координат будет уже четыре: две компоненты положения и две составляющие скорости. Параметров управления будет два; например, сила тяги  $F$  и угол поворота руля.

Рассмотрим несколько примеров постановки непрерывных задач оптимального управления в деревообработке.

## Математическая постановка задачи оптимального управления.

### Принцип максимума

Объект управления описывается системой  $n$  дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r), i = 1, \dots, n$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - фазовые переменные;  $u_1, \dots, u_r$  - управляющие воздействия. И те и другие являются функциями времени:  $x_i = x_i(t)$ ,  $u_j = u_j(t)$ . Введем вектор координат  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  и вектор управляющих воздействий  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_r)$  называемый **управлением**. Управляющие воздействия принадлежат ограниченной области  $\Omega$ :  $\bar{u}(t) \in \Omega$ . Будем считать, что вектор  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$  может находиться не только внутри области  $\Omega$ , но и на ее границе. Такая область называется **замкнутой**.

Предположим далее, что имеется техническая возможность мгновенно изменять положения органов управления. Следовательно, значения управляющих воздействий  $u_i(t)$  могут меняться скачком. В соответствии с этим будем рассматривать не только непрерывные управления  $\bar{u}(t)$ , но и управления, состоящие из конечного числа непрерывных кусков.

Такие **управления** называются **кусочно-непрерывными**.

Фазовые координаты принадлежат ограниченной и открытой области  $S$ . Даны начальное (при  $t = 0$ ) и конечное (при  $t = T$ ) значения вектора фазовых координат:  $\bar{x}_0$  где  $T$  - время процесса. Критерием оптимальности является достижение экстремума функционала

$$J = \int_0^T f_0(\bar{x}, \bar{u}) dt$$

Требуется из класса кусочно-непрерывных управлений выбрать такие  $u(t) \in \Omega$ , чтобы при переходе из начальной точки  $\bar{x}_0$  в конечную  $\bar{x}_k$  функционал  $J$  достигал экстремума (возможны различные варианты постановки этой задачи, когда начальная и конечная точки, а также время  $T$  не фиксированы).

Решение поставленной задачи основано на принципе максимума Понтрягина. Рассмотрим его для важного частного случая, когда решается задача о предельном быстродействии. Здесь требуется найти такое управление, при котором время перехода системы из начального состояния в конечное должно быть минимально. Соответствующий этому случаю функционал  $J$  можно записать в виде  $J = \int_0^T f_0(\bar{x}, \bar{u}) dt$ , причем время  $T$  не фиксировано.

Сущность **принципа максимума** для решения этой задачи состоит в следующем. Для управляемого объекта, описываемого системой уравнений, вводятся дополнительно функции времени  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ , и составляется новая функция  $H$  вида

$$H = \psi_1(t)f_1(\bar{x}, \bar{u}) + \psi_2(t)f_2(\bar{x}, \bar{u}) + \dots + \psi_n(t)f_n(\bar{x}, \bar{u})$$

С помощью функции  $H$  записывается следующая система дифференциальных уравнений для вспомогательных функций  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ :

$$d\psi_i/dt = -\partial H/\partial x_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Для отыскания оптимального управления  $\bar{u}(t)$  и соответствующей траектории  $\bar{x}(t)$  необходимо:

- 1) найти ненулевую совокупность функций  $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$  удовлетворяющих системе;
  - 2) чтобы функция  $H = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(\bar{x}, \bar{u})$  достигала максимума по  $\bar{u}$  при каждом значении  $0 < t < T$ ;
  - 3) чтобы при  $t = T$  выполнялось условие  $\max H(\psi(T), \bar{x}(T)) \geq 0$ .
- Оказывается, что при выполнении условий 1 и 2 функция  $\max H(t)$ , постоянна, так что достаточно проверить справедливость условия 3 для любого момента времени  $0 \leq t \leq T$ .

### Пример решения задачи оптимального управления

Обратимся к решению задачи оптимального управления фрезернообрезным станком. Рассмотрим систему описывающую данный объект, при следующих упрощающих предположениях: масса  $M$  равна 1; коэффициент вязкого трения  $H_v$  и сила трения в направляющих равны нулю. Управляющее воздействие  $F$  обозначим через  $u$ , а его максимальное значение через  $u_{max}$ . Тогда уравнения движения объекта примут следующий вид:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2; \quad dx_2/dt = u; \\ -u_{max} &\leq u(t) \leq u_{max} \end{aligned}$$

Требуется решить задачу о предельном быстродействии: переходе системы из начального состояния  $(x_1(0) = x_{1н}; x_2(0) = x_{2н} = 0)$  в конечное состояние  $(x_1(T) = x_{1к}; x_2(T) = x_{2к})$ . Это означает, что система из заданного начального положения  $x_{1н}$  с нулевой начальной скоростью  $(x_{2н})$

должна за минимальное время перейти в заданное положение  $x_{1к}$  и остановиться там  $(x_{2к} = 0)$ . Функция  $H$  в данном случае имеет вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$$

в соответствии с уравнениями. Согласно уравнению имеем следующую систему уравнений для вспомогательных функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$\begin{aligned} d\psi_1/dt &= -\partial H/\partial x_1 = 0; \\ d\psi_2/dt &= -\partial H/\partial x_2 = -\psi_1. \end{aligned}$$

Отсюда  $\psi_1 = c_1$ ;  $\psi_2 = c_2 - c_1 t$ , где  $c_1$  и  $c_2$  - постоянные интегрирования. Функция  $H$  равна  $H = c_1 x_2 + (c_2 - c_1 t) u$ . С учетом ограничения найдем, при каких управляющих воздействиях  $u(t)$  достигается максимум функции  $H$ . Из выражения видно, что следует принять  $u(t) = u_{max}$  при  $\psi_2(t) > 0$  и  $u(t) = -u_{max}$  при  $\psi_2(t) < 0$ , то есть

$$u(t) = -u_{max} \operatorname{sgn} \psi_2(t) = -u_{max} \operatorname{sgn}(c_2 - c_1 t)$$

Максимальное значение функции  $H$  равно

$$\max H(t) = c_1 x_1 + u_{max} (c_2 - c_1 t) \operatorname{sgn}(c_2 - c_1 t)$$

Проверим выполнение условия 3-го принципа максимума. Как отмечалось, справедливость его достаточно проверить для любого момента времени  $0 \leq t \leq T$ . Удобнее это сделать для  $t = 0$ :

$$\max H(0) = c_1 x_1(0) + u_{max} c_2 \operatorname{sgn} c_2 = u_{max} |c_2| > 0$$

Условие 3, следовательно, выполняется.

Таким образом, как видно из выражения, оптимальное управляющее воздействие в любой момент времени равно одному из двух своих предельных значений:  $+u_{max}$  или  $-u_{max}$ . Поскольку функция  $(c_2 - c_1 t)$  меняет знак не более одного раза, оптимальное управление состоит не более чем из двух интервалов, на каждом из которых оно постоянно.

**Методы имитационного моделирования. Исследования на имитационной модели.**

#### Общие сведения

В предыдущих главах книги основное внимание уделялось оптимизационным задачам деревообработки. Тем самым предполагалось, что при математической постановке задачи можно рассмотреть некоторый количественный показатель и сформулировать цель задачи в виде отыскания его максимума или минимума. Однако во многих практических случаях изучаемые объекты настолько сложны, что сформулировать единственный критерий оптимальности, всесторонне характеризующий систему и позволяющий оценивать и сравнивать с его помощью различные варианты решений, оказывается невозможным. Если же это все-таки удастся сделать, то существующие методы решения оптимизационных задач

по той же причине становятся неэффективными. В подобных случаях обращаются к методам имитационного моделирования.

**Имитационное моделирование** - это изучение объектов путем проведения экспериментов на их математических моделях, реализованных на ЭВМ.

Если аналитический вид модели известен исследователю (смысл, на - пример, различные модели объектов и оптимизационных задач, рассмотренные в гл. 1, 3 и 4), то моделирование на ЭВМ сводится к многократному просчету задачи при различных исходных данных. По-другому обстоит дело, если модель объекта задана в виде алгоритма его функционирования. В технологических исследованиях, где часто имеют дело с многостадийными процессами, сложными и громоздкими объектами, такой способ представления очень распространен. Алгоритм функционирования объекта может быть запрограммирован, и в этом случае исследование процесса выполняется на ЭВМ путем проигрывания на ней различных вариантов. Моделирование на ЭВМ позволяет при необходимости имитировать и воздействие случайных факторов на систему с помощью величин, обладающих одинаковыми с ними характеристиками.

Экспериментирование с моделью объекта, реализованной на ЭВМ, во многих отношениях предпочтительнее, чем исследования, проводимые на реальном объекте. Прежде всего, на реальных объектах зачастую нельзя обеспечить требуемые условия проведения эксперимента из-за нарушения установленного порядка или режимов работы системы. Иными словами, в реальных объектах исследуемые факторы часто неуправляемы. В экспериментах же на модели такие факторы могут быть включены в исследование и варьироваться как **управляемые переменные**. Это относится, например, к различным видам используемого оборудования, способам построения технологического процесса, размерным и качественным параметрам сырья; факторам, характеризующим условия работы, надежность и эксплуатационные характеристики существующего и проектируемого оборудования. Отмеченное свойство позволяет широко использовать в имитационном моделировании эффективные методы планирования эксперимента. Затраты времени и средств на машинное моделирование, как правило, значительно меньше, чем на исследование реального объекта. По этой причине, а также вследствие возможности рассматривать имитационное исследование как планируемый эксперимент с управляемыми переменными, в него можно включить десятки и даже сотни факторов, а обработка его результатов выполняется обычными методами математической статистики. Имитационное моделирование возможно там, где по соображениям безопасности, этики или каким-либо другим недопустимо участие людей. В имитационных исследованиях возможны эксперименты с прошлым, принципиально не воспроизводимые в природе, их можно легко прервать и возобновить в любой удобный момент. С другой стороны, разумеется, при имитационном моделировании неизбежно возникает вопрос о соответствии между моделью и реальным объектом. На него надо получить положительный ответ прежде, чем использовать результаты моделирования.

Совершенствование вычислительной техники существенно расширило возможности имитационного моделирования. Для анализа различных условий функционирования систем оказался удобен диалоговый режим работы с ЭВМ. Исследования на имитационной модели в этом режиме можно рассматривать как игру, благодаря чему модель стала к тому же эффективным средством обучения.

К настоящему времени методы имитационного моделирования широко используют для изучения объектов экономики, физики, техники и культуры. С их помощью изучают исторические и географические процессы, ход боевых действий и воздействие лекарств на организм человека. Известны имитационные модели таких сложных технических устройств, как прокатный стан, химический реактор, а также модели фирм, отраслей промышленности и даже глобальных процессов, происходящих в биосфере. В деревообработке применение этих методов эффективно для исследования практически всех сложных технологических процессов и решения задач организации и управления производством.

Приводимый ниже простой пример иллюстрирует идею имитационного моделирования объектов, имеющих вероятностный характер функционирования.

## Получение случайных чисел на ЭВМ

В практически используемых имитационных моделях случайные числа получают с помощью ЭВМ. В математическом обеспечении современных ЭВМ для этого имеются специальные программы генерирования случайных чисел с различными законами распределения. Рассмотрим идею построения таких программ, с тем, чтобы ими можно было осмысленно пользоваться, а при необходимости и составить такую программу самостоятельно.

Напомним прежде всего, что случайная величина  $X$  задается своей функцией распределения  $F(x)$ , которая имеет смысл вероятности того, что данная величина принимает значение, не превосходящее  $x$ , то есть

Рассмотрим сначала один из алгоритмов получения случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке  $[0,1]$ . Это означает, что функция распределения для такой случайной величины имеет вид

Описываемый алгоритм известен под названием мультипликативно-конгруэнтный метод и использует следующую итеративную процедуру. Пусть  $x_0$  - некоторое исходное число, а  $a$  и  $m$  - положительные целые константы. Число  $x_0$  умножается на  $a$ , результат умножения делится на  $m$ . Остаток от деления принимается за 1-е случайное число. Далее процедура повторяется: для получения  $(i + 1)$ -го случайного числа предыдущее случайное число  $x_i$ , умножается на  $a$ , полученное произведение делится на  $m$ , остаток от деления принимается за новое случайное число  $x_{i+1}$ . Для того чтобы из числа  $x_{i+1}$  получить случайное число  $r_{i+1}$  в диапазоне от нуля до единицы, число  $x_{i+1}$  делят на  $m$ :  $r_{i+1} = x_{i+1} / m$ . Ниже приведена программа на Фортране, реализующая этот алгоритм. Она пригодна для ЭВМ с 32-разрядными словами.

```
SUBROUTINE RAND (M, N, R)
```

```
1 N = 1220703125*M
```

```
2 IF (N) 3, 4, 4
```

```
3 N = N + 2147483647+1
```

```
4 R = N
```

```
R=R*0,4656613E-9
```

```
M=N
```

```
RETURN
```

```
END
```

В качестве  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  и  $r_i$ , - здесь соответственно приняты константы  $M$ ,  $N$  и  $R$ . В качестве  $a$  и  $m$  взяты числа  $a = 5^{13} = 1220703125$ ;  $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$ . Благодаря такому выбору констант при выполнении оператора 1 происходит переполнение разрядной сетки ЭВМ. Старшие разряды в полученном произведении отбрасываются, а младшие берутся в качестве очередного члена последовательности  $x_i$ . Операторы 2 и 3 обеспечивают положительный знак числа  $N$ .

Обращение к этой подпрограмме осуществляется оператором CALLRAND (M, N, R). Перед этим необходимо задать начальное значение для  $M$  в виде любого нечетного целого числа, содержащего не менее девяти десятичных знаков. Для получения каждого следующего случайного числа надо снова обратиться к подпрограмме RAND.

На основе только что описанной или аналогичных программ генерирования равномерно распределенных чисел получают или, как говорят, разыгрывают случайные числа с другими законами распределения. Основным используемым здесь методом является метод обратных функций.

Предположим, что случайная величина  $X$  непрерывна и имеет заданную непрерывную и строго монотонно возрастающую функцию распределения  $F(x)$  (рис. 8.1). Согласно методу обратных функций для получения значения этой случайной величины необходимо разыграть случайное число  $R$ , равномерно распределенное на отрезке  $(0,1)$ , и в качестве искомой величины  $x$  взять  $x = F^{-1}(R)$ , где  $F^{-1}$  - функция, обратная к функции  $F$ . На рис. 8.1 эта операция иллюстрируется с помощью стрелок.

Описанный метод удобнее применять, если легко построить обратную функцию  $F^{-1}$ . Например, для показательного распределения

$$y = F(x) = 1 - e^{-\mu x}. \text{ Тогда } F^{-1}(y) = -\frac{1}{\mu} \ln(1 - y)$$

Если же получение аналитического выражения для обратной функции вызывает затруднения, то можно аппроксимировать функцию  $F(x)$  отрезками прямых с заданной степенью точности. После этого легко вычислить обратную функцию для каждого линейного отрезка.

Для получения случайных чисел, подчиненных нормальному закону распределения, обычно используется другой метод, основанный на **центральной предельной теореме теории вероятностей**. Согласно этой теореме случайная величина  $X$  имеет распределение, близкое к нормальному, если она представляет собой сумму достаточно большого числа взаимно независимых случайных величин, сравнимых по своим дисперсиям.

Практически случайную величину с распределением, близким к нормальному, получают, просуммировав некоторое количество (обычно от 6 до 12) случайных чисел  $R_i$  равномерно распределенных на отрезке  $(0,1)$ .

Пусть складывают  $N$  таких величин:  $V = \sum_{i=1}^N R_i$ . Тогда, как нетрудно показать, полученная

случайная величина  $V$  будет иметь математическое ожидание  $M_v$ , равное  $N/2$ , и среднее квадратическое отклонение  $\sigma_v = \sqrt{N/12}$

Затем переходят к нормированной случайной величине  $Z$ , имеющей математическое ожидание, равное нулю, и среднее квадратическое отклонение, равное единице:  $M_z = 0$ ;  $\sigma_z = 1$ . Этот переход производится по формуле  $Z = (V - M_v)/\sigma_v$

Если теперь необходимо разыграть нормально распределенную случайную величину  $X$  с некоторым заданным значением математического ожидания  $M_x$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma_x$ , то ее значения вычисляют по формуле  $X = \sigma_x Z + M_x$

По существу, числа, получаемые с помощью описанных процедур, случайными не являются, так как их вычисляют по однозначным арифметическим формулам. Эти числа называют поэтому **псевдослучайными**. Однако статистические свойства псевдослучайных чисел совпадают со свойствами настоящих случайных чисел, благодаря чему и возможно их применение в этом качестве при имитационном моделировании.

Из описания способа получения случайных чисел на ЭВМ становится также понятно, что результаты имитационного эксперимента могут быть воспроизведены любое число раз в одинаковых или различных условиях и даже при одних и тех же значениях случайных факторов. Для этого достаточно повторить эксперимент, задав прежние начальные значения во всех используемых подпрограммах генерирования случайных чисел. Последнее свойство практически использовано, например, при исследованиях на разработанной статистической модели формирования и раскрытия пиловочного сырья (п. 11.4). Раскрой одного и того же бревна с присущими именно ему размерами и пороками - кривизной, количеством сучков и расположением каждого из них - имитировался несколько раз по различным поставкам и с различной ориентацией бревна относительно оси поставки.

Отметим, что именно центральная предельная теорема объясняет исключительную, доминирующую роль нормального распределения среди других статистических распределений в самых разнообразных процессах, происходящих в окружающей действительности. Как известно, стандартная схема постановки серии дублированных опытов предполагает стабилизацию, т. е. исключение влияния, по возможности, всех внешних воздействий на результат эксперимента. Это означает, что фактически влиять на него будут лишь многочисленные трудно устранимые случайные факторы. Они, как правило, соизмеримы по степени своего воздействия на объект и действуют независимо друг от друга. Мы находимся, таким образом, приближенно в условиях действия центральной предельной теоремы, что и позволяет выдвинуть гипотезу о нормальном распределении выходной величины.

Эта же теорема может иногда служить ключом к объяснению обнаруженных отклонений фактического распределения выходной величины от нормального. В такой ситуации надо прежде всего проанализировать условия постановки серии дублированных опытов с целью обнаружения фактора, который оказался не устраненным, но оказывает доминирующее



влияние на выходную величину по сравнению со всеми остальными случайными воздействиями.

Сказанное выше не снижает важности других статистических распределений, применение которых может быть наиболее обоснованно в тех или иных случаях. Так, при обсуждении методов теории массового обслуживания в главе 6 отмечалось использование распределения Пуассона для описания потока заявок, обладающего свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, а также использование показательного распределения для описания времени обслуживания одной заявки, если для него справедливы три перечисленные свойства. Этот же показательный закон распределения широко применяется в теории надежности.

### **Последовательность проведения и пример Имитационного исследования**

Основные этапы имитационного исследования по существу те же, что и при решении оптимизационных задач (см. введение и п. 2.1). На первом этапе формулируется цель исследования. Как правило, это оценка влияния некоторых параметров на функционирование системы. Здесь следует сформировать список вопросов, на которые в ходе исследования должны быть получены ответы. На этом и следующем этапах особенно важно привлечь к работе специалистов по исследуемому объекту. Если изучается технологический процесс, то это прежде всего технологи, а так-же специалисты в области физики явлений, характерных для данного процесса. В ходе данного этапа должны быть уточнены границы исследуемого объекта; например, стадии технологического процесса, подлежащие моделированию; продолжительность моделируемого отрезка времени, если моделируемый процесс разворачивается во времени; уровень детализации объекта при моделировании.

На втором этапе определяют параметры, которые должны войти в имитационную модель в качестве входных и выходных переменных, дается качественное описание их взаимосвязи, выявляется характер исследуемых параметров: случайные или детерминированные, управляемые или неуправляемые; решается вопрос о диапазонах варьирования количественных факторов и о значениях качественных параметров, для которых будет выполнено исследование. В частности, при имитационном моделировании технологического процесса определяют, какие именно варианты технологических схем будут анализироваться; какие будут рассмотрены типы взаимозаменяемого оборудования, виды сырья и способы его подготовки.

Следует установить, какая информация необходима для проведения исследования, обсудить возможности ее получения и форму представления. Например, производительность оборудования обычно можно определить из соответствующих нормативов или расчетным путем. Фактически же наблюдаются отклонения от этих данных в ту или иную сторону. Поэтому в имитационном эксперименте производительность часто считают случайной величиной, подчиненной, например, нормальному закону распределения. Ее математическое ожидание в этом случае может быть определено по результатам расчетов или из нормативов, а величина дисперсии вычисляется по данным статистической отчетности предприятия о фактической производительности оборудования или по результатам хронометража.

Для имитационного эксперимента может быть использована и введена в память ЭВМ информация в любой из форм ее представления: в виде функций, таблиц, графиков. Графическая информация при наличии соответствующего оборудования - графический дисплей, снабженный световым пером, - может быть введена в ЭВМ непосредственно. При отсутствии этой техники информацию в графической форме следует преобразовать в аналитическую. Здесь можно воспользоваться приближенной аппроксимацией с помощью метода наименьших квадратов или использовать одну из интерполяционных формул; например, формулы Лагранжа, Ньютона. В первом случае отыскивается функция, обеспечивающая наибольшую близость, но не совпадение выбранных точек исходного графика к соответствующим точкам графика функции (рис. 8.2, а). Точки 7, 2,3, 4 и 5 - точки

исходного графика  $f(x)$  - функция выбранного вида. Вид этой функции (например, многочлен некоторой степени) исследователь выбирает заранее. Данный способ предпочтительнее, когда исходная графическая информация получена на основе экспериментальных исследований и потому является приближенной. Использование интерполяционной формулы позволяет получить функцию известного класса, значения которой для определенных значений аргумента в точности совпадают с некоторыми заданными числами (рис. 8.2, б). Для этой же цели можно применить аппроксимацию сплайнами. **Сплайн** - это функция, «склеенная» из различных кусков многочленов и проходящая через выбранные точки графика.

Третий этап имитационного исследования - построение математической модели объекта.

Предположим, что объектом имитационного исследования является часть технологического процесса изготовления деталей мебели. Они вырабатываются из древесностружечных плит и облицовываются строганым шпоном. Исследованию подвергаются следующие стадии процесса: сортирование и раскрой шпона, ребросклеивание, раскрой ДСтП, облицовывание пластей и кромок (рис. 8.3). Цель имитационного эксперимента - исследование влияния ряда факторов на загрузку используемого оборудования, себестоимость продукции, производительность процесса и другие его технико-экономические показатели. В число исследуемых факторов вошли качество шпона; вид оборудования, используемого при его раскрое - гиль-отинные ножницы НГ-18, НГ-30 или бумагорезательные машины БРП-4М, 2БР-136; различные технологии ребросклеивания - клеевой нитью, клеевой лентой, непрерывным или точечным клеевым швом; различные виды оборудования, применяемого при раскрое плит; формат плит, спецификация заготовок и применяемые планы раскроя ДСтП, режимы работы оборудования облицовывания - автоматический или ручной режим работы линии ПЛМФ-1.

Рассмотрим часть соотношений, входящих в математическую модель и связывающих производительности трех смежных операций: ребросклеивания, раскроя плит и облицовывания.

Предположим, что за единицу времени при моделировании принят 1 ч. Обозначим через  $\Pi_{pc}$  производительность ребросклеивающего оборудования, измеряемую в  $m^2$  облицовок, изготовленных в течение 1 ч. При выбранной технологии ребросклеивания она зависит прежде всего от схемы набора облицовок и размеров составляющих их заготовок шпона.

Кроме этих детерминированных факторов, на производительность ребросклеивающего оборудования оказывают влияние и другие многочисленные факторы различной природы, которые можно рассматривать как случайные воздействия. По этим причинам производительность ребросклеивающего оборудования следует считать случайной величиной. Характер ее статистического распределения и параметры последнего можно получить из хронометража. Предположим, что в течение каждого из  $n$  часов фиксировались число и суммарная площадь изготовленных облицовок одного и того же типа. Обозначим полученные значения площади через  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . По этим данным, если  $n$  достаточно велико, можно вначале проверить гипотезу о том, что величина  $y$  распределена по нормальному закону, используя, например, критерий  $\chi^2$  Пирсона. Если оказалось возможным принять эту гипотезу, то по известным формулам вычисляют оценки математического ожидания и дисперсии величины  $y$ , соответственно:

$$\bar{y} = (y_1 + y_2 + \dots + y_n)/n; s^2 = [(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2]/(n - 1)$$

Если гипотезу о нормальности распределения пришлось отвергнуть, то подыскивается другое статистическое распределение, соответствующее данным хронометража.

Правдоподобно предположить, что вид распределения будет одним и тем же при изготовлении различных видов облицовок и, может быть, даже для различных видов ребросклеивающего оборудования. В этом случае для оценки производительности данной операции при другой схеме набора облицовок или другом применяемом оборудовании объем хронометража может быть уже невелик ( $n$  порядка, например, 30 ч), а цель его - только вычисление оценок для средней производительности  $\Pi_{pc} = \bar{y}$  и ее дисперсии  $s^2$  по приведенным выше формулам. Информацию, полученную для каждого вида оборудования, удобно представить в виде отдельной таблицы (табл. 8.2).

В первой графе пронумерованы виды облицовок, различающихся размерами входящих в них заготовок и (или) схемой набора.

Далее следует подобным же образом оценить производительность оборудования для раскроя плит. Здесь, как уже отмечалось, потребуется учесть типоразмеры заготовок, применяемые карты раскроя, режимы работы оборудования и случайные факторы. Аналогичным путем получают информацию о производительности  $\Pi_0$  оборудования для облицовывания пластей заготовок.

Начнем построение математической модели с записи соотношений, связывающих величины производительности оборудования на смежных операциях. Основой для этого служат балансовые соотношения вида (1.1) и (1.2). Напомним, что эти же соотношения использовались для построения математических моделей технологических объектов.

Рассмотрим подстойное место ПМ1 (см. рис. 8.3), т. е. стеллаж, на котором хранят готовые облицовки, полученные на ребросклеивающем оборудовании. Суммарная площадь облицовок, поступающих на него в течение 1 ч, - это и есть производительность  $\Pi_{pc}$  ребросклеивающего оборудования. В дальнейшем переменная  $\Pi_{pc}$  будет означать суммарную площадь облицовок, изготовленных в течение 1 ч, скорректированную в меньшую сторону на величину суммарной площади припусков - припуск на свесы.

Вид облицовки	Производительность оборудования	
	Среднее значение	Оценка дисперсии
1	2	3
1	$\bar{y}_1$	$s_1^2$
2	$\bar{y}_1$	$s_2^2$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Обозначим через  $\Pi'_{pc}$  суммарную площадь облицовок, которые в течение часа снимают со стеллажа и транспортируют непосредственно к рабочим местам пресса для облицовывания пластей. Пусть  $\Pi_0$  - производительность пресса, измеряемая в единицах площади,  $m^2$ , облицованных заготовок в течение 1 ч. При двухслойном облицовывании площадь требующихся для них облицовок будет вдвое больше, т. е. составляет  $2\Pi_0$ . Если считать, что облицовки перед прессом не накапливаются, то эта величина совпадает с величиной  $\Pi'_{pc}$

$$\Pi'_{pc} = 2\Pi_0$$

Обозначим через  $S_1$  суммарную площадь облицовок, хранящихся на подстойном месте ПМ1, а через  $\Delta S_1$  - приращение этой величины за 1 ч. В соответствии с балансовым соотношением (1.1) величина  $\Delta S_1$  равна

$$\Delta S_1 = \Pi_{pc} - \Pi'_{pc} = \Pi_{pc} - 2\Pi_0$$

Для построения имитационной модели эти соотношения следует представить в дискретной форме. Пусть  $i$  - номер моделируемого промежутка времени - в нашем случае 1 ч. Тогда для  $i$ -го часа равенство (8.1) примет вид

$$\Delta S_1^{(i)} = \Pi_{pc}^{(i)} + 2\Pi_0^{(i)}$$

Соотношение (8.1) для предыдущего  $(i - 1)$ -го часа выглядит следующим образом:

$$\Delta S_1^{(i-1)} = \Pi_{pc}^{(i-1)} + 2\Pi_0^{(i-1)}$$

Условимся, что переменная  $S_1^{(i)}$  означает величину  $S_1$  взятую к началу  $i$ -го часа. Тогда, очевидно, величина  $S_1^{(i)}$  отличается от этой же величины к началу предыдущего часа  $S_1^{(i-1)}$  на величину приращения площади облицовок за  $(i - 1)$ -й час, то есть

$$S_1^{(i)} = S_1^{(i-1)} + \Delta S_1^{(i-1)}$$

где  $\Delta S_1^{(i-1)}$  определяется из выражения (8.3).

Для того чтобы в течение  $i$ -го часа не было простоев облицовочного пресса из-за отсутствия облицовок на подстойном месте ПМ1, должно быть выполнено условие

$$S_1^{(i)} \geq 2\Pi_0^{(i)}$$

При раскросе плит на заготовки плиты, подлежащие раскросу, доставляют на подстопное место ПМ1, с которого они подаются на стол-каретку станка.

Пусть  $P_{\text{вх}}$  - суммарная площадь плит, поступивших в течение часа на это подстопное место;  $P_{\text{пл}}$  - производительность линии раскроса,  $\text{м}^2$ ,

плит, раскросенных в течение 1 ч;  $S_2$  - суммарная площадь плит, хранящихся на подстопном месте ПМ2;  $\Delta S_2$  - приращение этой величины. Выражения для  $\Delta S_2$  и  $S_2$  аналогичны формулам (8.3) и (8.4). Они понадобятся при раскросе для  $(i - 2)$ -го часа и будут иметь вид

$$\begin{aligned}\Delta S_2^{(i-2)} &= P_{\text{вх}}^{(i-2)} + P_{\text{пл}}^{(i-2)} \\ S_2^{(i-1)} &= S_2^{(i-2)} + \Delta S_2^{(i-2)}\end{aligned}$$

а условие того, что в течение  $(i - 1)$ -го часа не будет простоев оборудования по причине отсутствия плит, можно записать так:

$$S_2^{(i-1)} \geq P_{\text{пл}}^{(i-1)}$$

Обозначим через  $P_3$  производительность этого же оборудования,  $\text{м}^2$ , выработанных заготовок. В соответствии с балансовым соотношением (1.2)  $P_3 = P_{\text{пл}} - P_{\text{отх}}$ , или, в дискретной форме записи для  $(i-1)$ -го часа работы,

$$P_3^{(i-1)} = P_{\text{пл}}^{(i-1)} - P_{\text{отх}}^{(i-1)}$$

где  $P_{\text{отх}}$  - суммарная площадь всех видов отходов, полученных при раскросе плит в течение 1 ч.

Выработанные из плит заготовки поступают на подстопное место ПМ3. Отсюда их доставляют непосредственно на подстопное место перед клеенаносящими вальцами облицовочного оборудования. Следовательно, производительность этого потока заготовок равна производительности пресса  $P_0$ . Пусть  $S_3$  - суммарная площадь заготовок, хранящихся на подстопном месте ПМ3, а  $\Delta S_3$  - ее приращение. Тогда для  $(i - 1)$ -го часа имеем:

$$\begin{aligned}\Delta S_3^{(i-1)} &= P_3^{(i-1)} - P_0^{(i-1)} \\ S_3^{(i)} &= S_3^{(i-1)} + \Delta S_3^{(i-1)}\end{aligned}$$

Облицовочный пресс не будет простаивать по причине отсутствия заготовок, если (8. 12)

$$S_3^{(i)} \geq P_0^{(i)}$$

Аналогичным образом моделируется загрузка оборудования на остальных стадиях технологического процесса.

Важным показателем эффективности технологического процесса служит себестоимость продукции. Ее расчет при имитационном моделировании многостадийных процессов опирается на аддитивность этого показателя: себестоимость продукции определяется как сумма себестоимости сырья и составляющих себестоимости обработки по всем стадиям процесса. Если же при имитационном моделировании технологических объектов необходимо описание происходящих в нем физических процессов, то для построения математической модели потребуется применить соответствующие физические законы .

Следующий этап имитационного исследования - составление алгоритма моделирования процесса на основе построенной математической модели. Составим фрагмент алгоритма, соответствующий той части технологического процесса облицовывания, которая описывается уравнениями (8.3)-(8.12).

В дальнейшем будем различать расчетные и фактические значения и производительности рассматриваемого оборудования. Фактическая производительность будет совпадать с расчетной, только если оборудование обеспечено необходимым числом заготовок, т.е. если выполняются соотношения. В противном случае значение фактической производительности за данный час полагают равным нулю и фиксируют простой оборудования. Для расчетной производительности сохраним прежние обозначения,  $P_{\text{рс}}^{(i)}, P_{\text{пл}}^{(i)}, P_3^{(i)}, P_0^{(i)}$ , а фактическую будем обозначать буквой  $\tilde{P}$  с теми же индексами; например,  $P_{\text{рс}}^{(i)}$  - расчетная, а  $\tilde{P}_{\text{рс}}^{(i)}$  - фактическая производительность ребросклеивающего станка за  $i$ -й час.

Запись «сформировать  $P_{\text{рс}}^{(i)}$ » содержащаяся в блоке 1, предполагает выполнение следующих операций. Сначала определяются математическое ожидание и дисперсия величины  $P_{\text{рс}}^{(i-1)}$ , т. е. расчетной производительности ребросклеивающего оборудования на  $(i - 1)$ -м шаге. Для этого используют информацию, содержащуюся в одной из таблиц вида 8.2, где приведены значения названных показателей. Выбор той или иной таблицы определяется видом оборудования, работа на котором моделируется в данном имитационном эксперименте. В

зависимости от схемы набора и размеров облицовок в таблице выбирается нужная строка. На самом деле, разумеется, происходит обращение не к таблицам, а к соответствующей информации, записанной в памяти ЭВМ.

Далее вызывают подпрограмму генерирования случайных чисел, распределенных по нормальному закону, если именно это статистическое распределение соответствует опытным данным. Обращение к данной подпрограмме сопровождается указанием значений математического ожидания и дисперсии для производительности оборудования, которые были получены описанным выше способом. По результатам работы подпрограммы выдается случайное число, интерпретируемое как значение  $P_{pc}^{(i)}$ .

Затем проверяется наличие запаса заготовок на подстопном месте перед ребросклеивающим станком (эта операция находится за пределами разбираемого здесь фрагмента схемы). Если этот запас достаточен для работы оборудования в течение данного часа, то полагают

$$\tilde{P}_{pc}^{(i-1)} = P_{pc}^{(i)}$$

В противном случае величину  $\tilde{P}_{pc}^{(i-1)}$  считают равной нулю. Запись (8.13), использующая символ присваивания:  $=$ , означает следующее: величину фактической производительности  $\tilde{P}_{pc}^{(i-1)}$  положить равной расчетной производительности  $P_{pc}^{(i-1)}$ .

В блоке 2 вычисляется приращение запаса облицовок на подстопном месте ПМ1 для  $(i - 1)$ -го шага согласно формуле (8.3), причем значение  $\tilde{P}_{pc}^{(i-1)}$  получено по результатам работы предыдущей части алгоритма. Величина этого запаса к началу  $i$ -го шага вычислена в блоке 3 согласно формуле (8.4). Далее (блок 4) формируется величина  $P_0^{(i)}$  расчетной производительности облицовочного пресса на  $z$ -м шаге. Выполняемые при этом операции аналогичны описанным выше действиям при получении величины  $P_{pc}^{(i-1)}$ .

Рис. 8.4. Схема алгоритма моделирования процесса облицовывания

В блоке 5 проверяется условие (8.5). Невыполнение неравенства (8.5) означает, как уже отмечалось, простой облицовочного оборудования на  $i$ -м шаге из-за отсутствия облицовок. В этом случае фактическую производительность облицовочного оборудования полагают равной нулю.

Кроме того, с помощью блока 7 фиксируется число часов, которое данное оборудование простаивало по указанной причине. Переменная  $k$  в этом блоке может принимать целочисленные значения 0, 1, 2, 3, ..., которые истолковываются как суммарное число часов, которые простояло облицовочное оборудование из-за отсутствия облицовок за время, прошедшее от начала до  $(i - 1)$ -го часа работы. Как видно из блока 6, значение переменной  $k$  увеличивается на единицу каждый раз, когда такой простой зафиксирован.

Выполнение условия, записанного в блоке 5, еще не означает бесперебойной работы облицовочного оборудования в течение  $i$ -го часа, так как его простой может быть вызван отсутствием заготовок ДСтП. Поэтому далее анализируется процесс раскроя плит, начиная с формирования приращения их запаса на подстопном месте ПМ2 - блоки 8, 9 и соответствующие им формулы (8.6.) и (8.7).

Фактические значения производительности  $\tilde{P}_{вх}^{(i-2)}$  и  $\tilde{P}_{пл}^{(i-2)}$  для блока 8 берутся из расчетов на предыдущих шагах алгоритма. Согласно блоку 10 формируется величина  $P_{пл}^{(i-1)}$  расчетной производительности оборудования на участке раскроя плит для  $(i - 1)$ -го часа. Как и для ребросклеивающего оборудования, это тоже случайная величина. О вычислении ее математического ожидания уже говорилось выше.

В блоке 11 проверяется, достаточен ли запас плит для работы этого оборудования в течение  $(i - 1)$ -го часа. Если да, то фактическую величину его производительности за этот период полагают равной расчетной производительности  $P_{пл}^{(i-1)}$  (блок 15). В противном случае фиксируется простой оборудования (блок 12). Число часов простоя подсчитывается в блоке 13. Производительность линии раскроя по выработке заготовок определяется либо по формуле (8.9), если оборудование работало в течение  $(i - 1)$ -го часа, либо считается равной нулю в случае его простоя. Это отражено блоками 14 и 16. Далее в блоках 17 и 18 определяются полученное приращение запаса заготовок ДСтП и величина этого запаса к началу  $i$ -го часа работы согласно формулам (8.10) и (8.11). В блоке 19 проверяется условие (8.12). Простой оборудования, связанный с его нарушением, фиксируется блоками 20 и 21. Выполнение условия (8.12) еще не означает отсутствия простоя оборудования. Надо

дополнительно убедиться в достаточности запаса облицовок. Однако согласно предыдущей части алгоритма - блоки 5 и 6 - при недостатке облицовок значение производительности  $\tilde{\pi}_0^{(i)}$  полагают равным нулю. Поэтому теперь достаточно лишь проверить, получила ли переменная  $\tilde{\pi}_0^{(i)}$  нулевое значение (блок 22). Если да, то оно сохраняется; если нет, то фактическую производительность облицовочного оборудования полагают равной величине расчетной производительности  $\tilde{\pi}_0^{(i)}$ , вычисленной ранее - блок 4. Это последнее присваивание выполнено в блоке 23.

Мы рассматривали до сих пор лишь один вид простоев оборудования из-за отсутствия сырья или полуфабрикатов, подлежащих обработке. Значительный интерес представляет моделирование надежности и ремонта оборудования. Для этого надо знать функцию распределения интервала безотказной работы оборудования. С ее помощью получают значения моментов времени выхода его из строя. Далее моделируются продолжительность ремонта и, при необходимости, затраты на него или операции, связанные с заменой оборудования. Аналогичным образом можно моделировать качество продукции зная функцию распределения числа бракованных изделий, или исследовать эффективность функционирования объекта с помощью подходящего количественного показателя; например, ценностного выхода продукции для производства пиломатериалов.

После построения алгоритма моделирования приступают к составлению программы на ЭВМ, реализующей разработанный алгоритм. Для этого могут использоваться как универсальные языки программирования - Си, Паскаль, Бейсик и т. д., - так и специализированные языки имитационного моделирования типа ДИНАМО, СИМУ ДА, GPSS и др.

Модель, реализованная в виде компьютерной программы, подвергается проверке на соответствие ее реальному объекту. Если здесь получен удовлетворительный результат, то приступают к проведению исследований на модели. Как уже отмечалось, на этом этапе широко используются методы планирования многофакторных экспериментов, поэтому решаемый здесь круг задач и последовательность действий во многом сходны с планированием натуральных экспериментов. Это, в частности, выбор вида регрессионных зависимостей и экспериментального плана, определение объема выборки и т.д. Возникают и специфические проблемы, связанные именно с экспериментированием на ЭВМ, например использование методов уменьшения дисперсии, которые позволяют увеличить точность оценок при заданном объеме выборки или, наоборот, при заданной точности оценок уменьшить необходимый ее объем. Вопросы планирования эксперимента при имитационном моделировании освещены в [16].

### **Исследование загрузки накопителя брусьев методом имитационного моделирования**

Пример имитационного исследования, разобранный в п.8.3, предполагал рассмотрение состояний объекта - процесса облицовывания - через определенные промежутки времени одинаковой продолжительности. Величина этого промежутка была выбрана равной 1 ч. Приводимый ниже пример иллюстрирует иной способ задания времени при моделировании. Пусть требуется исследовать влияние разброса длин бревен, соотношения скоростей подачи лесопильных рам первого и второго ряда, а также времени межторцового разрыва на производительность лесопильного потока и загрузку накопителя брусьев.

Если к моменту окончания раскроя очередного бревна на лесопильной раме первого ряда рама второго ряда успела освободиться, распилив предыдущий брус, то вновь полученный брус через брусоперекладчик поступает на нее без задержки. Если же эта рама занята, то очередной брус, подлежащий распиливанию, задерживается на накопителе брусоперекладчика. Очевидно, что наименее благоприятная ситуация, с точки зрения задержки бруса в накопителе, возникает, когда вслед за длинным бревном на распиливание поступает значительно более короткое. В этом случае лесопильная рама второго ряда будет надолго занята распиливанием длинного бруса, полученного из первого бревна, а второй брус, как более короткий, будет быстро получен на раме первого ряда. Таким образом, среднее число бревен в накопителе, а следовательно, и производительность потока в целом

зависят от соотношения скоростей подачи лесопильных рам первого и второго ряда и, по-видимому, от разброса длин бревен.

Аналитическое исследование этих зависимостей достаточно сложно. В данном случае для достижения цели исследования целесообразно задаться некоторым набором длин определенного количества  $N$  бревен и последовательно проследить во времени прохождение каждого из них через лесопильные рамы первого и второго ряда. На основе анализа полученных данных можно установить интересующие нас зависимости. Длина бревен, поступающих на распиливание, - случайная величина. Для того чтобы воспроизвести ее значения на ЭВМ, следует высказать предположения о характере статистического распределения этой величины и его параметрах.

Будем считать, что значения длин бревен подчиняются нормальному закону распределения с заданным математическим ожиданием  $M$  и дисперсией  $\alpha^2$ .

На рис. 8.5 приведена схема алгоритма моделирования. Введем обозначения для характерных моментов времени функционирования системы.

Пусть  $t_1^{(i)}$  и  $t_2^{(i)}$  моменты начала и окончания распиливания  $i$ -го бревна на лесопильной раме первого ряда. Для 1-го бревна положим  $t_1^{(1)}$  равным нулю - блок 2. Значение переменной  $k$  в блоке 3 - это общее число брусьев, задержанных в накопителе, которое полагают равным нулю к моменту начала работы системы. Пусть  $l^{(i)}$  - длина  $i$ -го бревна, поступающего на распиливание,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Для формирования ее значения на ЭВМ в каждом случае обращаются к подпрограмме ПП1 - блок 4. Это подпрограмма генерирования случайных чисел, распределенных по нормальному закону с математическим ожиданием  $M$  и дисперсией  $\alpha^2$ . Величина  $t_2^{(i)}$  очевидно, больше, чем  $t_1^{(i)}$  на время распиливания данного бревна, которое равно  $\frac{l^{(i)}}{v_1}$ , где  $v_1$  - скорость подачи лесопильной рамы первого ряда. Поэтому, блок 5,

$$t_2^{(i)} = t_1^{(i)} + \frac{l^{(i)}}{v_1}$$

Брус из  $i$ -го бревна, выпиленный в момент  $t_2^{(i)}$ , через некоторый промежуток времени  $\Delta_1$  попадает в накопитель брусоперекладчика. Этот момент обозначим через  $t_3^{(i)}$ :  $t_3^{(i)} = t_2^{(i)} + \Delta_1$ , блок 7. Величина  $\Delta_1$  является случайной из-за возможных задержек при продольном и поперечном движении бруса. Она формируется подпрограммой ПП2 - блок 6.

Если рассматриваемый  $i$ -й брус является первым, то он без задержки покидает накопитель и перемещается к лесопильной раме второго ряда. Для проверки, является ли данный  $i$ -й брус первым, служит блок 8 проверки условия. В данном случае проверяется выполнение равенства  $i = 1$ . Если оно выполняется, то осуществляется переход по стрелке  $Da$ , т. е. к блоку 9, где выполняется присваивание  $t_4^{(i)} = t_3^{(i)}$ . Здесь - момент начала движения бруса из накопителя.

Через случайный промежуток времени  $\Delta_2$  в момент  $t_5^{(i)}$  начинается распиливание  $i$ -го бруса на раме второго ряда:  $t_5^{(i)} = t_4^{(i)} + \Delta_2$ , блок 11. Величина  $\Delta_2$  формируется подпрограммой ПП3, блок 10. Момент  $t_6^{(i)}$  окончания распиливания  $i$ -го бруса определяется выражением, аналогичным формуле (8.14) - блок 12, - где  $v_2$  - скорость подачи рамы второго ряда.

Далее печатается необходимая информация - блок 13: суммарное число  $k$  брусьев, задержанных в накопителе, и значения характерных моментов времени  $t_j^{(i)}$  для каждого бревна и бруса,  $j = 1, 2, \dots, 6$ .

Блоком 14 осуществляется переход к следующему бревну. В блоке 15 проверяется, не превосходит ли номер очередного бревна заданного числа  $N$  бревен, подлежащих распиливанию. Если  $i > N$ , то работа модели завершается. При  $i \leq N$  рассчитывается момент времени  $t_1^{(i)}$  подачи очередного бревна в лесопильную раму первого ряда - блоки 16 и 17. Бревна в нее поступают с некоторым межторцовым разрывом. Случайный интервал времени между окончанием раскроя  $(i-1)$ -го и началом раскроя  $i$ -го бревна на этой раме обозначим через  $\Delta_3$ . Тогда момент начала раскроя каждого из бревен, начиная со второго, определяется по формуле

$t_1^{(i)} = t_2^{(i-1)} + \Delta_3$ , блок 17. Значение  $\Delta_3$  формируется подпрограммой ПП4 - блок 16. Затем происходит возврат к блоку 4, в котором формируется значение длины очередного бревна, и т. д.

Обратимся вновь к блоку 8 и рассмотрим, как работает модель, если имитируется раскрой второго или одного из следующих бревен. В этом случае  $i \neq 1$ , поэтому вслед за блоком 8 выполняется операция по стрелке *Нет*, т. е. переход к блоку 18. Это блок проверки условия

$$t_3^{(i)} + \Delta_2 \geq t_6^{(i-1)}$$

В правой его части стоит момент окончания раскроя предыдущего,  $(i - 1)$ -го бруса на лесопильной раме второго ряда. Сумма в левой части - это момент времени, в который очередной,  $i$ -й, брус подойдет к этой раме, если он без задержки покинет накопитель. Выполнение неравенства (8.15) означает поэтому, что к данному моменту лесопильная рама успеет освободиться после распиливания предыдущего бруса. В этом случае очередной брус должен сразу покинуть накопитель - блоки 9, 10 и т. д. Невыполнение неравенства (8.15) означает, что в момент  $t_3^{(i)} + \Delta_2$  рама еще занята.

Следовательно, очередной брус должен быть задержан в накопителе до момента  $t_6^{(i-1)}$  освобождения с учетом времени  $\Delta_2$  на продвижение бруса к раме. Момент начала его перемещения к накопителю равен  $t_4^{(i)} = t_6^{(i-1)} - \Delta_2$ , блок 19. Факт задержки бруса в накопителе фиксируется увеличением на единицу значения переменной  $k$  - блок 20. Далее выполняется переход к уже рассмотренной части схемы - блоки 11, 12 и т. д.

Имитационная модель, практически реализованная на ЕС ЭВМ, несколько сложнее, чем описанная выше. Она позволяет дополнительно рассчитать максимальное число брусьев, одновременно находившихся в накопителе, а также общую длительность пребывания их там. Рассмотрим результаты моделирования раскроя 10 бревен, последовательно поступающих на распиливание. Предполагалось, что длина бревен - нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием  $M = 5,5$  м и дисперсией  $\sigma^2 = 1$ ; промежутки времени  $\Delta_1, \Delta_2$  и  $\Delta_3$  случайные величины, равномерно распределенные на отрезках  $6,5 \leq \Delta_1 \leq 17,5$ ;  $9,5 \leq \Delta_2 \leq 10,5$ ;  $0 \leq \Delta_3 \leq 1$ . Поэтому обращение к подпрограммам ПП2, ПП3 и ПП4 представляет собой фактически обращение к одной и той же подпрограмме генерирования равномерно распределенных случайных чисел, но при разных значениях параметров распределения. Скорости подачи лесопильных рам первого и второго ряда соответственно равны 13 и 14 м/мин.

Экспериментальные данные сведены в табл.8.3. В девятой графе приведено время  $\tau_{\Pi}$  простоя лесопильной рамы второго ряда перед раскроем очередного бруса, равное разности  $t_5^{(i)} - t_6^{(i-1)}$ . Графа 10 содержит данные о времени  $\tau_{\text{H}}$  пребывания каждого бруса в накопителе: Как видно, это время оказалось ненулевым для брусьев 2 и 6 вследствие того, что для каждого из них неравенство (8.15) не выполняется. Общая длительность пребывания всех брусьев в накопителе равна 2,19 с, причем одновременно в накопителе находилось не более одного бруса. Суммарная длительность раскроя всех бревен и брусьев составила 309,44 с. Она равна моменту окончания распиливания последнего, десятого, бруса.

На имитационной модели был поставлен многофакторный эксперимент согласно полному факторному плану  $2^4$ , содержащему 16 опытов. Варьировались следующие 4 фактора:  $X_1$  - среднее квадратическое отклонение длин бревен;  $X_2$  - скорость подачи лесопильной рамы первого ряда, м/мин;  $X_3$  - скорость подачи лесопильной рамы второго ряда, %, к величине  $X_2$ ;  $X_4$  - среднее значение времени межторцового разрыва  $X_4 = \Delta_3$ . Диапазоны варьирования факторов:  $0,85 \leq X_1, \text{ м}, \leq 1,15$ ;  $10 \leq X_2, \text{ м/мин}, \leq 16$ ;  $100 \leq X_3, \%, \leq 120$ ;  $0 \leq X_4, \text{ с}, \leq 3$ . Остальные условия эксперимента те же, что и в рассмотренной выше отдельной серии опытов. Каждый опыт состоял в имитации раскроя 20 бревен и брусьев. В качестве отклика фиксировалась общая длительность распиливания этих 20 бревен и брусьев, с.

Номер бревна	$t^{(i)}$	$t_1^{(i)}$	$t_2^{(i)}$	$t_3^{(i)}$	$t_4^{(i)}$	$t_5^{(i)}$	$t_6^{(i)}$	$\tau_{\Pi}$	$\tau_{\text{H}}$	$\Delta_3$	$\Delta_1$	$\Delta_2$



1	6,4	0,0	29,92	46,69	46,69	56,69	81,00	0,0	0,0	0,5	16,7	10,0
2	8	30,27	53,08	70,50	70,89	81,00	99,54	0,0	0,3	3	7	0
3	4,9	54,04	80,32	97,38	97,39	107,4	128,7	7,87	8	0,3	17,4	10,1
4	4	80,51	107,9	125,0	125,0	1	6	6,07	0,0	5	3	2
5		108,7	7	153,7	153,7	134,8	157,1	6,78	0,0	0,9	17,0	10,0
6	5,6	0	136,7	5	5	3	4	0,00	0,0	6	7	2
7	9	137,1	7	175,2	177,0	163,9	186,7	4,93	1,8	0,2	17,0	9,83
8	5,9	6	157,7	5	6	2	2	3,43	1	0	3	10,1
9	5	158,6	9	198,0	198,0	186,7	203,4	10,7	0,0	0,7	16,9	7
10	6,0	6	181,2	2	2	2	9	0	0,0	4	8	9,66
	8	182,0	3	220,2	220,2	208,4	226,7	6,60	0,0	0,3	17,4	10,4
	4,4	7	203,0	6	6	2	6		0,0	9	5	1
	7	203,6	1	247,8	247,8	230,1	247,2			0,8	16,7	9,93
	4,8	7	230,6	0	0	9	1			7	9	10,1
	9	231,1	3	276,1	276,1	257,9	279,8			0,8	17,2	1
	4,5	0	259,5	7	7	1	2			4	5	10,2
	4		5			286,4	309,5			0,6	17,1	5
	5,8					2	4			6	7	
	4									0,4	16,6	
	6,1									7	2	
	6											

По результатам статистической обработки экспериментальных данных оказалась адекватной линейная регрессионная зависимость отклика  $y$  от нормализованных факторов  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , которые связаны с натуральными факторами  $X_1, X_2, X_3, X_4$  следующими формулами:

$$x_1 = (X_1 - 1)/0,15; \quad x_2 = (X_2 - 13)/3;$$

$$x_3 = (X_3 - 100); \quad x_4 = (X_4 - 1,5)/1,5;$$

Эта зависимость имеет вид  $y = 607,8 - 129,9x_2 - 3,16x_3 + 2195x_4$ . Как и следовало ожидать, с ростом скорости подачи лесопильной рамы первого ряда - фактор  $X_2$  - продолжительность распиливания уменьшается,  $b_2 < 0$ , причем этот фактор оказывает доминирующее влияние на отклик по сравнению со всеми остальными: коэффициент  $b_2$  по абсолютной величине значительно больше всех остальных линейных коэффициентов регрессии. Вслед за ним по степени влияния идет фактор  $X_4$  - среднее время межторцового разрыва. С его увеличением отклик возрастает, что также легко объяснить.

Чем больше значение фактора  $X_3$ , тем быстрее распиливаются брусья на лесопильной раме второго ряда. Но общее время раскроя всех бревен и брусьев уменьшится под влиянием роста  $X_3$  только вследствие уменьшения времени распиливания тех брусьев, которые остались в накопителе к моменту завершения работы лесопильной рамы первого ряда. Диапазоны варьирования факторов  $X_3$  и  $X_1$  выбраны такими, что в любой момент в накопителе оказывается не более двух, а чаще один или ни одного бруса. Поэтому влияние фактора  $X_3$  невелико по сравнению с влиянием переменных  $X_2$  и  $X_4$ . С ростом значений фактора  $X_3$  среднее число брусьев в накопителе увеличивается. Однако, поскольку в данном случае это увеличение невелико, его влияние оказалось незначимым.

### Задание времени в имитационных моделях

Для задания времени в имитационных моделях используют два основных способа: 1) метод фиксированного шага; 2) метод переменного шага. Согласно методу фиксированного шага состояние всех элементов системы анализируется через постоянные, достаточно малые промежутки времени  $\Delta t$ . Иными словами, с интервалом  $\Delta t$ , величина которого выбирается заранее, пересчитываются значения всех показателей моделируемого объекта. В п.8.3, где этот метод использовался, величина  $\Delta t$  составляла один час.

При моделировании по методу переменного шага предполагается, что для функционирования системы существенны некоторые происходящие в ней события.

Состояние системы согласно данному методу анализируется только при наступлении очередного события независимо от интервалов между ними. Этот метод был использован в примере п.8.4, где существенными событиями были начало и окончание распиливания каждого бревна и бруса, а также моменты поступления брусьев в накопитель и выхода из него.

Вопрос о применении того или иного метода решается индивидуально для каждого конкретного исследования, в зависимости от его цели и назначения модели, характера объекта, требуемой точности результатов и ряда других факторов. Для моделей с фиксированным шагом нет возможности точно воспроизвести момент наступления очередного события, поэтому важен выбор шага  $\Delta t$ . Этот метод предпочтительнее, если в системе происходит большое число событий различной природы, что характерно, в частности, для многостадийных технологических процессов, если эти события появляются более или менее регулярно. Модели с фиксированным шагом часто используют для описания систем, представляемых непрерывными материальными потоками, либо потоками информации. При использовании метода переменного шага, в отличие от предыдущего метода, отсутствует погрешность в определении момента наступления существенного события. Этот метод часто применяют при неравномерном появлении событий во времени.

### 4.3. Лабораторные работы

Учебным планом не предусмотрено

### 4.4. Практические занятия

<i>№ п/п</i>	<i>Номер раздела дисциплины</i>	<i>Наименование тем практических занятий</i>	<i>Объем (час.)</i>	<i>Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)</i>
1	1.	Метод синтеза одномерных систем управления	3	-
2	1.	Исследование многомерных объектов управления	3	-
3	2.	Оптимизация производственного плана методом линейного программирования	4	Дискуссия (4 часа)
4	3.	Моделирование систем массового обслуживания.	2	-
<b>ИТОГО</b>			<b>12</b>	<b>4</b>

### 4.5. Контрольные мероприятия: курсовой проект (курсовая работа), контрольная работа, РГР, реферат.

Учебным планом не предусмотрено.

**5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

<i>№, наименование разделов дисциплины</i>	<i>Компетенции</i>	<i>Кол-во часов</i>	<i>Компетенции</i>			<i>Σ комп.</i>	<i>T<sub>ср</sub>, час</i>	<i>Вид учебных занятий</i>	<i>Оценка результатов</i>
			<i>ОПК</i>	<i>ПК</i>	<i>ПК</i>				
			<i>1</i>	<i>2</i>	<i>12</i>				
<b>1</b>		<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	
<b>1.</b> Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.		56	+	+	+	3	18,6	Лк, ПЗ, СР	экзамен
<b>2.</b> Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.		59	+	+	+	3	19,6	Лк, ПЗ, СР	экзамен
<b>3.</b> Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.		56	+	+	+	3	18,6	Лк, ПЗ, СР	экзамен
<i>всего часов</i>		<b>171</b>	<b>56,8</b>	<b>56,8</b>	<b>56,8</b>	<b>3</b>	<b>57</b>		

## 6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Пижурин А. А., Пижурин А.А., Моделирование и оптимизация процессов деревообработки: Учебник. – М.: МГУЛ, 2004. – 375 с.: ил.
2. Егоров В. А., Глушковский А.А., Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки. Методы моделирования: Учебное пособие. Л. ЛТА, 1988, - 80 с.
3. Моделирование процессов и систем управления : учебник / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 140 с. – Б. ц

## 7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№ п/п	Наименование издания	Вид занятия (Лк, ПЗ)	Количество экземпляров в библиотеке, шт.	Обеспеченность, (экз./ чел.)
1	2	3	4	5
<b>Основная литература</b>				
1.	Алпатов, Ю.Н. Моделирование процессов и систем управления : учебник / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 140 с.	Лк	24	1,0
2.	Алпатов, Ю.Н. Математическое моделирование производственных процессов учебное пособие для вузов / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 148 с.	ПЗ	23	1,0
<b>Дополнительная литература</b>				
3.	Егоров, В. А. Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки. Методы моделирования: Учебное пособие / Егоров В. А., Глушковский А.А., Л. ЛТА, 1988, - 80 с.	ПЗ	50	1,0
4.	Пижурин, А. А. Моделирование и оптимизация процессов деревообработки: Учебник / Пижурин А. А., Пижурин А.А. - М.: МГУЛ, 2004. – 375 с.	ПЗ	108	1,0
5.	Алпатов, Ю. Н. Математическое моделирование производственных процессов: Учебное пособие / Алпатов, Ю. Н. – 2-е изд., пераб и доп – Братск: БрГТУ, 2004. – 96 с.	ПЗ	110	1,0

## 8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО – ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Электронный каталог библиотеки БрГУ  
[http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r\\_15/cgiirbis\\_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=](http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r_15/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=)
2. Электронная библиотека БрГУ  
<http://ecat.brstu.ru/catalog> .
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» <http://biblioclub.ru> .
4. Электронно-библиотечная система «Издательство «Лань»  
<http://e.lanbook.com> .
5. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"  
<http://window.edu.ru> .
6. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru> .

7. Университетская информационная система РОССИЯ (УИС РОССИЯ) <https://uisrussia.msu.ru/>

8. Национальная электронная библиотека НЭБ

<http://xn--90ax2c.xn--p1ai/how-to-search/>.

## **9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

Изучение обучающимися учебной дисциплины «Моделирование и оптимизация процессов» рассчитано на один семестр.

### *Занятия лекционного типа*

В ходе лекций преподаватель излагает и разъясняет основные, наиболее сложные понятия темы, а также связанные с ней теоретические и практические проблемы, дает рекомендации на выполнение самостоятельной работы. В ходе лекций обучающимся рекомендуется:

- вести конспектирование учебного материала;
- обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации по их применению;
- задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В рабочих конспектах желательно оставлять поля, на которых во внеаудиторное время можно сделать пометки из учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся, дополняющего материал прослушанной лекции, а также пометки, подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Для успешного овладения курсом необходимо посещать все лекции, так как тематически отдельные темы курса взаимосвязаны между собой. В случаях пропуска занятия обучающемуся необходимо самостоятельно изучить материал и ответить на контрольные вопросы по пропущенной теме во время индивидуальных консультаций.

### *Практические занятия .*

При подготовке к практическим занятиям обучающемуся необходимо изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, подготовить конспект по методической литературе с учетом рекомендаций преподавателя. На практическом занятии главное – уяснить связь решаемых задач с теоретическими положениями. При решении предложенной задачи нужно стремиться не только получить правильный ответ, но и усвоить общий метод решения подобных задач. Рекомендуется использовать следующий порядок записи решения задачи:

- исходные данные для решения задачи;
- что требуется получить в результате решения;
- какие законы и положения должны быть применены;

- общий план (последовательность) решения;
- расчеты;
- полученный результат и его анализ.

Логическая связь лекций и практических занятий заключается в том, что информация, полученная на лекции, в процессе самостоятельной работы на практическом занятии осмысливается и перерабатывается, при помощи преподавателя анализируется до мельчайших подробностей, после чего прочно усваивается. Интерактив проводится в виде дискуссий.

*Самостоятельная работа. Подготовка к занятиям лекционного и семинарского типа*

Важной частью самостоятельной работы является умение выделить основополагающие, отправные точки в понимании материала. Особо важную роль в этом процессе необходимо уделить конспекту лекций, в котором преподаватель сформировал «скелет», структуру раздела дисциплины. Читанием учебной и научной литературы обучающийся углубляет и расширяет знания о предмете изучения. Основная функция учебников – ориентировать студента в системе знаний, умений и навыков, которые должны быть усвоены будущими специалистами по данной дисциплине. Подготовка к занятиям лекционного типа подразумевает приобретение обучающимся первичных знаний по теме лекции для подготовки к структуризации объекта изучения, которую преподаватель выполняет на лекции. Изучение материала по теме лекции имеет цель уточнения отдельных моментов. Перед практическим занятием следует изучить конспект лекции и рекомендованную преподавателем литературу, обращая внимание на практическое применение теории и на методику решения типовых задач.

*Самостоятельная работа. Подготовка к экзамену.*

Подготовка к экзамену предполагает:

- изучение основной и дополнительной литературы;
- изучение конспектов лекций;
- изучение конспектов практических занятий и отчетов по ним;

Перечень вопросов к экзамену представлен в приложении 2 п. 2. Баллы за зачет выставляются по критериям, представленным в приложении 2 п. 3.

## 9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению лабораторных работ/ практические работы

### Практическая работа №1 Метод синтеза одномерных систем управления

**Цель:** изучить методику структурного синтеза одномерных систем управления.

Проектирование системы управления рассматривают как структурно-параметрический синтез, при котором необходимо определить структуру и параметры звеньев системы. Следовательно, задачу синтеза системы можно сформулировать следующим образом.

Необходимо спроектировать систему, удовлетворяющую передаточной функции  $W_T(S)$ . Теоретически передаточная функция системы может быть определена по различным критериям. Из условий статического расчета или технической предопределенности часть структурных звеньев системы априорно определена. Следовательно, необходимо путем введения дополнительных звеньев в структуру системы получить оператор, удовлетворяющий условию  $W_n(S) = W_T(S)$ , где  $W_n(S)$  – передаточная функция синтезируемой системы. Необходимо определить  $W_3(S)$ .

Задание:

1. Определить параметры передаточных функций неизвестных компонент:  $N$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $M$ .
  2. Произвести декомпозицию передаточных функций  $D$  и  $M$  на звенья 1-го порядка.
  3. Произвести коррекцию динамических свойств передаточных функций  $D$  и  $M$ .
  4. Методом имитационного моделирования исследовать устойчивость скорректированных звеньев  $D$  и  $M$ .
- Исследования по пунктам 2, 3, 4 провести по методике, изложенной в главе 1, п. 1.4.

Порядок выполнения работы:

В общем виде структурная схема регулятора системы представлена на рис.1.13. Априорно известны компоненты системы регулирования  $A$ ,  $C$ ,  $L$ ,  $K$ ,  $P$ , а также требования к регулятору, который должен удовлетворять условию  $W_T$ . Необходимо найти параметры компонент:  $N$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $M$ .

По структурной схеме системы (рис.1.13) строим  $C$ -граф, представленный на рис. 1.14. поскольку необходимо определить четыре компоненты, а граф имеет только три узла 1-го рода, то произведем структурное преобразование над известной компонентой  $D$  и представим ее как

$$D_1 = D_2 = D/2.$$

На основе  $C$ -графа строим матрицу компонентов (1.22) и матрицу структуры (1.23).

#### Основная литература

1. Моделирование процессов и систем управления : учебник / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 140 с. – Б. ц.
2. Математическое моделирование производственных процессов учебное пособие для вузов / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 148 с. – Б. ц.

#### Дополнительная литература

1. Егоров В. А., Глушковский А.А., Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки. Методы моделирования: Учебное пособие. Л. ЛТА, 1988, - 80 с.
2. Пижурин А. А., Пижурин А.А., Моделирование и оптимизация процессов деревообработки: Учебник. – М.: МГУЛ, 2004. – 375 с.: ил.
3. Алпатов Ю. Н. Математическое моделирование производственных процессов: Учебное пособие. – 2-е изд., пераб и доп – Братск: БрГТУ, 2001. – 96 с.

Контрольные вопросы:

1. Дайте характеристику критериев исследования устойчивости систем.
2. Опишите способы коррекции динамических свойств систем управления.

## Практическая работа №2

### Исследование многомерных объектов управления

**Цель:** изучить методику исследования *взаимного* влияния отдельных координат объекта на качество управления и найти допустимый диапазон параметров отдельных координат управления.

В теории управления широкий класс охватывают многомерные объекты, синтез которых представляет значительные трудности.

Многомерность объекта характеризуется тонкой и глубокой функциональной зависимостью между отдельными фазовыми координатами. Проектирование таких систем не может быть достигнуто простой комбинацией исходных структурных элементов. Их взаимное объединение предопределяет необходимость проведения мероприятий, которые обеспечивают создание сложной системы.

#### Задание:

По результатам эксперимента построить графики в соответствии с данными табл. 1.5 и 1.6.

1. Для двумерной системы построить графики изменения функций  $K$ ,  $M$ ,  $X_{10}$  в интервале от нуля до установившегося режима (рис. 1.18).
2. Определить параметры функций  $K$  и  $M$  в установившемся режиме (стационарный процесс).
3. Определить значение функции в режиме многомерных однотипных систем управления (МОСАУ) (в точке  $t_0$ ).
4. Для трехмерной системы в соответствии с данными табл. 1.6 построить графики функций  $W_3$ ,  $W_4$ ,  $x_{12}$  (рис. 1.19).
5. Определить параметры функций  $W_3$  и  $W_4$  в стационарном режиме (точка  $t_1$ ).
6. Определить параметры третьей координаты  $W_3$  и сравнить со значением  $K$ ,  $M$  двумерной системы в точках  $t_0$  (см. рис. 1.18 и 1.19).
7. Определить значение  $W_4$  при  $t = t_0$  (см. рис. 1.18).

#### Порядок выполнения работы:

Провести исследование областей существования решения для двумерной и трехмерной систем управления при заданных входных и выходных параметрах управления.

Интервал исследования выбирается для двумерной системы равным  $t_1 = 3T_{10}$ , для трехмерной -  $t_1 = 3T_{12}$ , в зависимости от варианта задания. Результаты исследований выполнить для двумерной системы по формуле (1.35), для трехмерной – по (1.39) и свести в табл. 1.5 и 1.6.

#### Основная литература

1. Моделирование процессов и систем управления : учебник / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 140 с. – Б. ц.
2. Математическое моделирование производственных процессов учебное пособие для вузов / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 148 с. – Б. ц.

#### Дополнительная литература

1. Егоров В. А., Глушковский А.А., Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки. Методы моделирования: Учебное пособие. Л. ЛТА, 1988, - 80 с.
2. Пижурин А. А., Пижурин А.А., Моделирование и оптимизация процессов деревообработки: Учебник. – М.: МГУЛ, 2004. – 375 с.: ил.
3. Алпатов Ю. Н. Математическое моделирование производственных процессов: Учебное пособие. – 2-е изд., пераб и доп – Братск: БрГТУ, 2001. – 96 с.



### Контрольные вопросы:

1. Каким способом можно уменьшить величины отклонений параметров  $K$  и  $M$  от величины  $K_0$ ?
2. Какова причина значительной разницы параметров  $W_4$  и  $D$  в двумерной и трехмерной системах?
3. В чем причина связности объекта?
4. Какие параметры можно менять в многомерном объекте?
5. Определите границы существования оптимальных областей решения.

### **Практическая работа №3**

#### **Оптимизация производственного плана методом линейного программирования**

Цель: изучить и исследовать метод линейного программирования и исследовать производственный процесс.

Многочисленные задачи оптимального планирования и управления сводятся к моделям линейного программирования. *Линейное программирование* изучает задачи нахождения оптимального (максимального или минимального) значения линейной целевой функции при линейных ограничениях на параметры управления. В общем виде *задачу линейного программирования* (ЗЛП) можно сформулировать следующим образом: найти минимальное значение целевой функции.

#### Задание:

1. Ознакомиться с настоящей инструкцией и содержанием задания.
2. Подготовить исходные данные для решения полученного варианта задания об оптимальном использовании оборудования (табл.4.5). Сформулировать математическую постановку своего варианта задачи в виде (4.23)-(4.25). ввести исходные данные и симплекс-методом в системе Math Card решить задачу.
3. Записать решения задачи.

#### Порядок выполнения работы:

Поясним коротко симплекс-метод на примере решения задачи оптимального использования оборудования.

Столярный цех лесопромышленного комплекса выпускает три вида продукции: столы  $P_1$ , шкафы  $P_2$  и стулья  $P_3$ , которые производятся с использованием четырех видов оборудования:  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Цех имеет оборудование  $S_1$  в количестве 15 шт.,  $S_2$  - 10 шт.,  $S_3$  - 20 шт. и  $S_4$  - 15 шт.

Вид оборудования	Нормы затрат оборудования на 1000 шт. продукции в месяц		
	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$S_1$	3	1	1
$S_2$	1	2	1
$S_3$	2	0	2
$S_4$	0	5	1

Каждая тысяча штук продукции  $P_1$  дает прибыль 2000 руб.;  $P_2$  - 3000 руб.;  $P_3$  - 1000 руб. Требуется определить, какое количество продукции каждого вида должен производить цех на имеющемся оборудовании в планируемый период (месяц), чтобы получить максимальную прибыль. Критерием оптимальности при решении этой задачи будет максимум прибыли при ограничениях по оборудованию.

### Основная литература

1. Моделирование процессов и систем управления : учебник / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 140 с. – Б. ц.
2. Математическое моделирование производственных процессов учебное пособие для вузов / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 148 с. – Б. ц.

### Дополнительная литература

1. Егоров В. А., Глушковский А.А., Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки. Методы моделирования: Учебное пособие. Л. ЛТА, 1988, - 80 с.
2. Пижурин А. А., Пижурин А.А., Моделирование и оптимизация процессов деревообработки: Учебник. – М.: МГУЛ, 2004. – 375 с.: ил.
3. Алпатов Ю. Н. Математическое моделирование производственных процессов: Учебное пособие. – 2-е изд., пераб и доп – Братск: БрГТУ, 2001. – 96 с.

### Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте в общем виде ЗЛП.
2. В чем заключается суть симплексного метода?
3. Каким методом можно решить ЗЛП?

### **Практическая работа №4** **Моделирование систем массового обслуживания**

**Цель:** изучить методы организации планирования систем массового обслуживания и управления ими.

Существует большое число процессов, для которых характерна следующая общая структура (рис. 4.4). В совокупность пунктов, называемую **системой обслуживания**, поступают через некоторые промежутки времени объекты (**входящий поток**), которые подвергаются там соответствующим операциям (**обслуживанию**), и затем покидают систему (**выходящий поток**), освобождая место для следующих объектов.

Промежутки времени, через которые поступают объекты, и время обслуживания, как правило, носят случайный характер. При массовом поступлении объектов в системе обслуживания могут возникнуть **очереди**.

Процессы массового обслуживания типичны для связи (телефон), транспорта (воздушные, наземные и морские перевозки), культурно-бытовых (театры, магазины, городское сообщение, поликлиники) и производственных процессов (ремонт и обслуживание оборудования, сборочные линии).

Независимо от конкретной природы и характера объектов, поступающих в систему обслуживания, их называют **требованиями (или заявками)**.

Процессы массового обслуживания изучаются с целью их рациональной организации (обеспечение наибольшей пропускной способности при возможно меньших затратах времени и материальных ресурсов) или выявления закономерностей тех явлений природы, для которых характерны подобные процессы.

### Задание:

1. *Чистая система с ожиданием*, в которой требования не оставляют очереди, что соответствует неограниченному времени ожидания.

2. *Система с отказами* принимает требования на обслуживание только при наличии свободных каналов.

3. *Система с ограниченной длиной очереди* характеризуется тем, что поступившее требование становится в очередь только тогда, если число требований в ней не превышает заданного значения  $g=V$ .

### Порядок выполнения работы:

В стационарном режиме система меняет свои состояния случайным образом. Но вероятности их уже не зависят от времени. Каждая из них, являясь постоянной величиной, характеризует относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Присоединив к системе нормировочные условия, можно определить значение

вероятностей в установившемся режиме и получить ряд общих характеристик процесса.

#### Основная литература

1. Моделирование процессов и систем управления : учебник / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 140 с. – Б. ц.
2. Математическое моделирование производственных процессов учебное пособие для вузов / Ю. Н. Алпатов. – Братск : БрГУ, 2015. – 148 с. – Б. ц.

#### Дополнительная литература

1. Егоров В. А., Глушковский А.А., Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки. Методы моделирования: Учебное пособие. Л. ЛТА, 1988, - 80 с.
2. Пижурин А. А., Пижурин А.А., Моделирование и оптимизация процессов деревообработки: Учебник. – М.: МГУЛ, 2004. – 375 с.: ил.
3. Алпатов Ю. Н. Математическое моделирование производственных процессов: Учебное пособие. – 2-е изд., пераб и доп – Братск: БрГТУ, 2001. – 96 с.

#### Контрольные вопросы:

1. Сравните полученные результаты исследований с параметрами стационарного режима.
2. По каждой задаче проведите анализ результатов.
3. Разработайте комплекс мероприятий по обеспечению режима работы системы, близкому к стационарному.

### 10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Информационно-коммуникативные технологии (ИКТ) преподаватель использует для:

- получения информации при подготовке к занятиям;
- создания презентационного сопровождения лекционных занятий;
- работы в электронной информационной среде;
- ОС Windows 7 Professional;
- Microsoft Office 2007 Russian Academic OPEN No Level;
- Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Security.

### 11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

<i>Вид занятия (Лк, ПЗ, СР)</i>	<i>Наименование аудитории</i>	<i>Перечень основного оборудования</i>	<i>№ Лк, ПЗ</i>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
Лк	Механическое испытание древесины и древесных материалов	-	Лк № 1-8
ПЗ	Дисплейный класс. Кафедра воспроизводства и переработки лесных ресурсов.	Измерительные инструменты	ПЗ №1-3  ПЗ №4
СР	ЧЗ1	Оборудование 10-ПК i5-2500/H67/4Gb (монитор TFT19 Samsung); принтер HP LaserJet P2055D	ПЗ №1-4

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ  
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)**

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
ОПК-1	способность понимать научные основы технологических процессов в области лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств	<p><b>1.</b> Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.</p>	<p>1.1. Введение. Этапы оптимизационного исследования. Определение математических моделей. 1.2 Требования к математическим моделям. Классификация математических моделей. Общая постановка задачи исследования операций. 1.3 Критерий оптимальности. Многокритериальные задачи исследования операций. Методы свертки критериев.</p>	Экзаменационный билет
		<p><b>2.</b> Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.</p>	<p>2.1 Введение в линейное программирование. Задачи линейного программирования. 2.2 Графическое решение основной задачи линейного программирования методом перестановок. 2.3 Нахождение опорного и оптимального решения задачи линейного программирования. Формулировка двойственной задачи линейного программирования.</p>	Экзаменационный билет
		<p><b>3.</b> Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.</p>	<p>3.1 Формулировка транспортной задачи. Нахождение опорного плана. Улучшение плана перевозок. 3.2 Постановка задачи нелинейного программирования. Методы отыскания экстремума для функции одной переменной. Методы отыскания экстремума для функции нескольких переменных. 3.3 Методы имитационного моделирования.</p>	Экзаменационный билет

		<p><b>1.</b> Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.</p>	<p>1.1. Введение. Этапы оптимизационного исследования. Определение математических моделей. 1.2 Требования к математическим моделям. Классификация математических моделей. Общая постановка задачи исследования операций. 1.3 Критерий оптимальности. Многокритериальные задачи исследования операций. Методы свертки критериев.</p>	Экзаменационный билет
		<p><b>2.</b> Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.</p>	<p>2.1 Введение в линейное программирование. Задачи линейного программирования. 2.2 Графическое решение основной задачи линейного программирования методом перестановок. 2.3 Нахождение опорного и оптимального решения задачи линейного программирования. Формулировка двойственной задачи линейного программирования.</p>	Экзаменационный билет
		<p><b>3.</b> Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.</p>	<p>3.1 Формулировка транспортной задачи. Нахождение опорного плана. Улучшение плана перевозок. 3.2 Постановка задачи нелинейного программирования. Методы отыскания экстремума для функции одной переменной. Методы отыскания экстремума для функции нескольких переменных. 3.3 Методы имитационного моделирования.</p>	Экзаменационный билет
ПК-12	способность выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-	<p><b>1.</b> Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.</p>	<p>1.1 Определение математических моделей. 1.2 Общая постановка задачи исследования операций. 1.3 Многокритериальные задачи исследования операций. Методы свертки критериев.</p>	Экзаменационный билет

	химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.	2. Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.	2.1 Основная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация основной задачи линейного программирования. 2.2 Алгоритм преобразования стандартной таблицы в симплекс-методе. 2.3 Экономическая интерпретация прямой и двойственной задач линейного программирования.	Экзаменационный билет
		3. Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.	3.1 Решение транспортной задачи методом потенциалов. Транспортные задачи с неправильным балансом. 3.2 Методы отыскивания экстремума для функции нескольких переменных. 3.3 Исследования на имитационной модели.	Экзаменационный билет

## 2. Экзаменационные вопросы

№ п/п	Компетенции		ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ	№ наименование раздела
	Код	Определение		
1	2	3	4	5
1.		способность	1.1. Введение в математическое моделирование и основные понятия.	1. Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации. 2. Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования 3. Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.
			1.2. Требования к математическим моделям	
			2.1. Основная задача линейного программирования.	
			2.2. Допустимое решение задач линейного программирования.	
			2.3. Оптимальное решение задачи линейного программирования.	
			3.1. Задача о замене оборудования.	
			3.2. Задача о сортировке пиловочного сырья. 3.3. Задание времени в имитационных моделях.	
2.	ПК-2	способность понимать научные основы	1.3. Определение модели.	1. Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.
			1.4. Основные этапы оптимизационного исследования.	

		технологических процессов в области лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.	<p><b>2.4.</b> Этапы нахождения любой задачи линейного программирования.</p> <p><b>2.5.</b> Геометрическая интерпретация линейного программирования.</p> <p><b>3.4.</b> Метод золотого сечения.</p> <p><b>3.5.</b> Градиентный метод.</p>	<p><b>2.</b> Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования</p> <p><b>3.</b> Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.</p>	
2.	ПК-12	способность выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.	<b>1.5.</b> Критерии оптимальности.	<b>1.</b> Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.	
			<b>1.6.</b> Методы сверки критериев.		
			<b>1.7.</b> Улучшение плана перевозок циклами пересчета.		
			<b>2.6.</b> Отыскание опорного решения основы задач линейного программирования.	<b>2.</b> Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.	
			<b>2.6.</b> Основные свойства решений основы задач линейного программирования.		
			<b>2.8.</b> Симплекс-метод. Решения задачи линейного программирования.		
			<b>2.9.</b> Нахождение опорного плана транспортной задачи.		
			<b>2.10.</b> Прямая и двойственная задачи.		
			<b>3.7.</b> Метод покоординатного поиска.		<b>3.</b> Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.
			<b>3.8.</b> Метод наискорейшего подъема.		
			<b>3.9.</b> Метод дихотомии.		
<b>3.10.</b> Методы отыскания экстремума для функции одной переменной.					
<b>3.11.</b> Последовательность проведения и пример имитационного исследования.					

### 3 Описание показателей и критериев оценивания компетенций.

Показатели	Оценка	Критерии
<p><b>Знать</b> (ОПК-1):</p> <p>-методы получения математических моделей технологических процессов;</p> <p>-математические методы и программы ЭВМ для решения моделей.</p> <p>(ПК-2)</p> <p>-методы получения математических моделей технологических процессов;</p> <p>-математические методы и программы ЭВМ для решения моделей.</p>	<b>отлично</b>	<p>Обучающийся демонстрирует глубокое и прочное усвоение программного материала. Знает методы получения математических моделей; математические методы и программы. Умеет использовать математические методы, самостоятельно формулировать задачу. Владеет методами статистической обработки результатов эксперимента; организацией проведения</p>

<p>(ПК-12) -основные понятия и методы математического анализа</p> <p><b>Уметь</b></p>		научных исследований.
<p>(ОПК-1): -использовать математические методы в технических приложениях; -самостоятельно формулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения, организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения.</p>	<b>хорошо</b>	Обучающийся демонстрирует твердое знание материала. Излагает материал грамотно и по существу.
<p>(ПК-2) -использовать математические методы в технических приложениях; -самостоятельно формулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения, организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения.</p>	<b>удовлетворительно</b>	Обучающийся демонстрирует знания только основного материала. При изложении материала допускает неточности.
<p>(ПК-12) - использовать математические методы в технических приложениях;</p> <p><b>Владеть</b></p> <p>(ОПК-1): -математическими методами планирования эксперимента для получения математических моделей описания технологических процессов; -методами статистической обработки результатов эксперимента и проверки адекватности математической модели.</p> <p>(ПК-2) -математическими методами планирования эксперимента для получения математических моделей описания технологических процессов; методами статистической обработки результатов эксперимента и проверки адекватности математической модели.</p> <p>(ПК-12) -самостоятельно формулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения -организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения</p>	<b>неудовлетворительно</b>	Обучающийся демонстрирует отсутствие знания значительной части программного материала. При изложении материала допускает существенные ошибки.



#### **4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности**

Дисциплина «Моделирование и оптимизация процессов» направлена на приобретение у обучающихся теоретических знаний в области математической модели, моделировании и оптимизации в лесной промышленности и охватывает круг вопросов, относящихся к научно-исследовательской производственно-технологической деятельности бакалавра.

Изучение дисциплины «Моделирование и оптимизация процессов» предусматривает:

- лекции,
- практические занятия;
- экзамен.

С целью определения уровня овладения компетенциями, закрепленными за дисциплиной, в заданные преподавателем сроки проводится текущий контроль знаний, умений и навыков каждого обучающегося, аттестация по итогам освоения дисциплины. Текущий контроль проводится на аудиторных занятиях с целью определения качества усвоения материала по окончании изучения очередной учебной темы в следующих формах: письменный опрос, тестирование. Аттестация по итогам освоения дисциплины. Для контроля усвоения данной дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен. На экзамене обучающимся подготавливается ответ на 3 вопроса, список которых приведен в приложении 1 табл.2. На подготовку к ответу студентам выделяется от 30 до 40 минут. На все вопросы студент готовит письменный конспективный ответ, который затем докладывает преподавателю.

В процессе проведения практических занятий происходит закрепление знаний, формирование умений и навыков реализации представления о моделирование и оптимизации процессов в деревообработке.

Самостоятельную работу необходимо начинать с проработки теоретического материала по пройденной теме.

Работа с литературой является важнейшим элементом в получении знаний по дисциплине. Прежде всего, необходимо воспользоваться списком рекомендуемой по данной дисциплине литературой. Дополнительные сведения по изучаемым темам можно найти в периодической печати и Интернете.

## **АННОТАЦИЯ**

### **рабочей программы дисциплины**

### **Моделирование и оптимизация процессов**

#### **1. Цель и задачи дисциплины**

Целью изучения дисциплины является формирование у студентов осознанного интереса к будущей профессии, организация и управление производством с использованием современных математических методов и компьютерной техники.

Задача дисциплины является научить обучающихся использовать математические методы в технических приложениях; использовать возможности вычислительной техники и программного обеспечения; самостоятельно формулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения, организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения.

#### **2. Структура дисциплины**

2.1 Распределение трудоемкости по отдельным видам учебной работы, включая самостоятельную работу: лекции - 10 часов, , практические занятия - 12 часов, самостоятельная работа - 149 час.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 180 часов, 5 зачетных единиц

2.2 Основные разделы дисциплины:

1. Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.
2. Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.
3. Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.

#### **3. Планируемые результаты обучения (перечень компетенций)**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:  
ОПК-1 - способность понимать научные основы технологических процессов в области лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств;  
ПК-2-способность понимать научные основы технологических процессов в области лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств;  
ПК-12- способность выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.

**4. Вид промежуточной аттестации:** экзамен

*Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе  
на 20\_\_-20\_\_ учебный год*

1. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие дополнения:

---

---

2. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие изменения:

---

---

---

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.,  
(разработчик)

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись)

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО  
КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)**

<b>№ компетенции</b>	<b>Элемент компетенции</b>	<b>Раздел</b>	<b>Тема</b>	<b>ФОС</b>
ОПК-1	способность понимать научные основы технологических процессов в области лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств	<p><b>1.</b> Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.</p>	<p>1.1. Введение. Этапы оптимизационного исследования. Определение математических моделей. 1.2 Требования к математическим моделям. Классификация математических моделей. Общая постановка задачи исследования операций. 1.3 Критерий оптимальности. Многокритериальные задачи исследования операций. Методы свертки критериев.</p>	<p><i>отчет ЛР ПЗ Дискуссия</i></p>
		<p><b>2.</b> Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.</p>	<p>2.1 Введение в линейное программирование. Задачи линейного программирования. 2.2 Графическое решение основной задачи линейного программирования методом перестановок. 2.3 Нахождение опорного и оптимального решения задачи линейного программирования. Формулировка двойственной задачи линейного программирования.</p>	<p><i>Лк- Дискуссия отчет ЛР ПЗ Дискуссия</i></p>
		<p><b>3.</b> Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.</p>	<p>3.1 Формулировка транспортной задачи. Нахождение опорного плана. Улучшение плана перевозок. 3.2 Постановка задачи нелинейного программирования. Методы отыскания экстремума для функции одной переменной. Методы отыскания экстремума для функции нескольких переменных. 3.3 Методы имитационного моделирования.</p>	<p><i>Лк- Дискуссия отчет ЛР ПЗ Дискуссия</i></p>

ПК-2	способность использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования.	<p><b>1.</b> Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.</p>	<p>1.1. Введение. Этапы оптимизационного исследования. Определение математических моделей.</p> <p>1.2 Требования к математическим моделям. Классификация математических моделей. Общая постановка задачи исследования операций.</p> <p>1.3 Критерий оптимальности. Многокритериальные задачи исследования операций. Методы свертки критериев.</p>	<p><i>отчет ЛР</i> <i>ПЗ</i> <i>Дискуссия</i></p>
		<p><b>2.</b> Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.</p>	<p>2.1 Введение в линейное программирование. Задачи линейного программирования.</p> <p>2.2 Графическое решение основной задачи линейного программирования методом перестановок.</p> <p>2.3 Нахождение опорного и оптимального решения задачи линейного программирования. Формулировка двойственной задачи линейного программирования.</p>	<p><i>Лк-</i> <i>Дискуссия</i> <i>отчет ЛР</i> <i>ПЗ</i> <i>Дискуссия</i></p>
		<p><b>3.</b> Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.</p>	<p>3.1 Формулировка транспортной задачи. Нахождение опорного плана. Улучшение плана перевозок.</p> <p>3.2 Постановка задачи нелинейного программирования. Методы отыскания экстремума для функции одной переменной. Методы отыскания экстремума для функции нескольких переменных.</p> <p>3.3 Методы имитационного моделирования.</p>	<p><i>Лк-</i> <i>Дискуссия</i> <i>отчет ЛР</i> <i>ПЗ</i> <i>Дискуссия</i></p>
ПК-12	способность выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-	<p><b>1.</b> Введение в математическое моделирование и основные понятия. Задачи оптимизации.</p>	<p>1.1 Определение математических моделей.</p> <p>1.2 Общая постановка задачи исследования операций.</p> <p>1.3 Многокритериальные задачи исследования операций. Методы свертки критериев.</p>	<p><i>отчет ЛР</i> <i>ПЗ</i> <i>Дискуссия</i></p>

химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.	<p><b>2.</b> Основные понятия линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования.</p>	<p>2.1 Основная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация основной задачи линейного программирования.</p> <p>2.2 Алгоритм преобразования стандартной таблицы в симплекс-методе.</p> <p>2.3 Экономическая интерпретация прямой и двойственной задач линейного программирования.</p>	<p><i>Лк-Дискуссия отчет ЛР ПЗ Дискуссия</i></p>
	<p><b>3.</b> Транспортная задача. Нелинейное программирование. Методы имитационного моделирования.</p>	<p>3.1 Решение транспортной задачи методом потенциалов. Транспортные задачи с неправильным балансом.</p> <p>3.2 Методы отыскивания экстремума для функции нескольких переменных.</p> <p>3.3 Исследования на имитационной модели.</p>	<p><i>Лк-Дискуссия отчет ЛР ПЗ Дискуссия</i></p>

## 2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

Показатели	Оценка	Критерии
<p><b>Знать</b> (ОПК-1):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-методы получения математических моделей технологических процессов;</li> <li>-математические методы и программы ЭВМ для решения моделей.</li> </ul> <p>(ПК-2)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-методы получения математических моделей технологических процессов;</li> <li>-математические методы и программы ЭВМ для решения моделей.</li> </ul> <p>(ПК-12)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-основные понятия и методы математического анализа</li> </ul> <p><b>Уметь</b> (ОПК-1):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-использовать математические методы в технических приложениях;</li> <li>-самостоятельно фор-</li> </ul>	<p><b>зачтено</b></p>	<p>Обучающийся демонстрирует глубокое и прочное усвоение программного материала. Четко и последовательно излагает материал.</p>
	<p><b>не зачтено</b></p>	<p>Обучающийся демонстрирует отсутствие знания значительной части программного материала. При изложении материала допускает существенные ошибки.</p>

мулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения, организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения.

*(ПК-2)*

-использовать математические методы в технических приложениях;  
-самостоятельно формулировать задачу научного исследования, наметить пути ее решения, организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения.

*(ПК-12)*

- использовать математические методы в технических приложениях;

**Владеть**

*(ОПК-1):*

-математическими методами планирования эксперимента для получения математических моделей описания технологических процессов;

-методами статистической обработки результатов эксперимента и проверки адекватности математической модели.

*(ПК-2)*

-математическими методами планирования эксперимента для получения математических моделей описания технологических процессов;

методами статистической обработки результатов эксперимента и проверки адекватности математической модели.

*(ПК-12)*

-самостоятельно формулировать задачу на-

<p>учного исследования, наметить пути ее решения -организовать проведение научных исследований, делать выводы и обобщения</p>		
---	--	--



Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 35.03.02 Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств от «20» октября 2015 г. № 1164

**для набора 2015 года:** и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для заочной формы обучения от «04» декабря 2015г. № 770

**для набора 2016 года:** и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для заочной формы обучения от «06» июня 2016г. № 429

**Программу составил:**

Плотников Николай Павлович, доцент, к.т.н. \_\_\_\_\_

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры ВиПЛР от « 25 » декабря 2018 г., протокол № 8.

Заведующий кафедрой ВиПЛР \_\_\_\_\_ Иванов В.А.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий выпускающей кафедрой \_\_\_\_\_ Иванов В.А.

Директор библиотеки \_\_\_\_\_ Сотник Т.Ф.

Рабочая программа одобрена методической комиссией лесопромышленного факультета от « 27 » декабря 2018 г., протокол № 4.

Председатель методической комиссии факультета \_\_\_\_\_ Сыромаха С.М.

Начальник  
учебно-методического управления \_\_\_\_\_ Нежевец Г.П.

Регистрационный № \_\_\_\_\_

(методический отдел)