МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра воспроизводства и переработки лесных ресурсов

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе

__________ Е.И. Луковникова
«_____» декабря 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАСЧЕТАХ НА ЭВМ

Б1.В.ДВ.03.01

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ

35.03.02 Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств

ПРОФИЛЬ ПОДГОТОВКИ

Технологии и дизайн мебели

Программа академического бакалавриата

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ **Стр.**

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Вид деятельности выпускника

Дисциплина охватывает круг вопросов, относящихся к научно-исследовательскому и производственно-технологическому виду профессиональной деятельности выпускника в соответствии с компетенциями и видами деятельности, указанными в учебном плане

Цель дисциплины

Приобретение у обучающихся знаний в области решения математически сформулированных задач, необходимых в профессиональной деятельности, с помощью ЭВМ и специальных программ.

Задачи дисциплины

Основная задача дисциплины – формирование у обучающегося комплекса систематизированных знаний, умений и навыков, необходимых для самостоятельного решения практических вопросов о численных методах математики, их применимости при определенных условиях, о погрешностях вычислений, использовании вычислительной техники и программ при решении задач, необходимых в профессиональной деятельности.

Код компетенции	**Содержание компетенций**	**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине**
1	**2**	**3**
ОПК-4	способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий	**знать:** - источники и методы поиска, хранения, обработки и анализа информации из различных источников и баз данных; **уметь:** - осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных; - представлять информацию в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий; **владеть:** – навыками поиска, хранения, обработки и анализа информации из различных источников и баз данных; - способами представления информации в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий
ПК-2	способность использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования	**знать:** - пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования; **уметь:** - использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования; **- владеть:** - методами использования пакетов прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования

ПК-12	способность выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств	**знать:** - методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств; **уметь:** - выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств; **- владеть:** - методами моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.В.ДВ.03.01 Математические методы в расчетах на ЭВМ относится к элективной части.

Дисциплина Математические методы в расчетах на ЭВМ базируется на знаниях, полученных при изучении учебных дисциплин основных образовательных программ.

Основываясь на изучении перечисленных дисциплин, Математические методы в расчетах на ЭВМ представляет основу для изучения дисциплин: Методы и средства научных исследований, Моделирование и оптимизация процессов, Технология клееных материалов и древесных плит.

Такое системное междисциплинарное изучение направлено на достижение требуемого ФГОС уровня подготовки по квалификации бакалавр.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Распределение объема дисциплины по формам обучения

Форма обучения	*Курс*	*Семестр*	*Трудоемкость дисциплины в часах*						*Курсовая работа (проект), контрольная работа, реферат, РГР*	*Вид промежуточной аттестации*
			Всего часов	*Аудиторных часов*	*Лекции*	*Лабораторные работы*	*Практические занятия*	*Самостоятельная работа*		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Очная	3	5	108	51	17	34	-	57	-	зачет
Заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Заочная (ускоренное обучение)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Очно-заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

3.2. Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости

Вид учебных занятий	*Трудо-емкость (час.)*	*в т.ч. в интерактивной, активной, инно-вациионной формах, (час.)*	*Распределение по семестрам, час*
			5
1	**2**	**3**	**4**
I. Контактная работа обучающихся с преподавателем (всего)	51	15	51
Лекции (Лк)	17	5	17
Лабораторные работы (ЛР)	34	10	34
Групповые (индивидуальные) консультации	+	-	+
II.Самостоятельная работа обучающихся (СР)	57	-	57
Подготовка к лабораторным работам	37	-	37
Подготовка к зачету	20	-	20
III. Промежуточная аттестация зачет	+	-	+
Общая трудоемкость дисциплины час.	108	-	108
зач. ед.	3	-	3

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий
- для очной формы обучения:

№ раз-дела и темы	*Наименование раздела и тема дисциплины*	*Трудоем-кость, (час.)*	*Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)*		
			учебные занятия		*Самостоятель-ная работа обучающихся*
			лекции	*Лабораторные работы*	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1.	**Задачи линейной алгебры**	**18**	**2**	**8**	**8**
1.1.	Задачи линейной алгебры. Основные определения алгебры матриц. Решение систем линей-ных уравнений.	18	2	8	8
2.	**Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений**	**17**	**4**	**4**	**9**
2.1	Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. Методы решения нелинейных уравнений: дихотомии, хорд, касательных, комбинированный метод. Методы решения систем нелинейных уравнений: итерации, градиента, метод Ньютона. Оценка погрешностей методов	17	4	4	9
3.	**Аппроксимация функции**	**28**	**4**	**8**	**16**
3.1	Аппроксимация функции. Основ-ные понятия. Методы интерполи-рования. Использование многочле-нов, полином Ньютона, Лагранжа, интерполяция сплайнами.	14	2	4	8
3.2	Определение параметров эмпири-ческой зависимости: метод выбранных точек, метод средних. Метод наименьших квадратов. Локальное сглаживание данных.	14	2	4	8
4.	**Численные методы дифференци-рования**	**14**	**2**	**4**	**8**
4.1	Численные методы дифференциро-вания. Оценка точности методов. Использование интерполяционных формул. Аппроксимация производ-ных с помощью центральных разностей. Метод неопределенных коэффициентов	14	2	4	8
5.	**Численные методы интегрирова-ния**	**14**	**2**	**4**	**8**
5.1	Численные методы интегриро-вания. Методы прямоугольников, трапеции, Симпсона. Квадратур-ные формулы Чебышева, Гаусса. Вычисление интеграла с заданной точностью.	14	2	4	8

6.	**Численное решение дифференциальных уравнений**	**17**	**3**	**6**	**8**
6.1	Метод Эйлера, Рунге-Кутта, Адамса.	17	3	6	8
	ИТОГО	**108**	**17**	**34**	**57**

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам

Раздел 1. Задачи линейной алгебры

Тема 1.1. Задачи линейной алгебры. Основные определения алгебры матриц. Решение систем линейных уравнений.

Лекция проводится в интерактивной форме в виде лекции-презентации (2 часа).

1. Линейные системы. К решению систем линейных уравнений сводятся многочисленные практические задачи. Можно с полным основанием утверждать, что решение линейных систем является одной из самых распространенных и важных задач вычислительной математики. Запишем систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Совокупность коэффициентов этой системы запишем в виде таблицы:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

Данная таблица n^2 элементов, состоящая из n строк и n столбцов, называется квадратной матрицей порядка n. Если подобная таблица содержит mn элементов, расположенных в m строках и n столбцах, то она называется прямоугольной матрицей.

Используя понятие матрицы А, систему уравнений (2.1) можно записать в векторно-матричном виде:

$$Ax = b, \qquad (2)$$

где x и b — вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец правых частей соответственно:

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

В ряде случаев получаются системы уравнений с некоторыми специальными видами матриц. Вот некоторые примеры таких матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь:
А — симметрическая матрица (ее элементы расположены симметрично относительно главной диагонали (aij =dji));
В — верхняя треугольная матрица с равными нулю элементами, распо- расположенными ниже диагонали;
С — клеточная матрица (ее ненулевые элементы составляют отдельные группы (клетки));
F — ленточная матрица (ее ненулевые элементы составляют «ленту», параллельную диагонали (в данном случае ленточная матрица F одновременно является также трехдиагональной));
Е — единичная матрица (частный случай диагональной);
О — нулевая матрица.

Определителем (детерминантом) матрицы A n-го порядка называется число D, равное

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega}$$

Здесь индексы α, β, ... , ω пробегают все возможные $n!$ перестановок номеров 1,2,... , n; k – число инверсий в данной перестановке

Необходимым и достаточным условием существования единственного решения системы линейных уравнений является условие $D \neq 0$. В случае равенства нулю определителя системы матрица называется ***вырожденной***; при этом система линейных уравнений (1) либо не имеет решения, либо имеет их бесконечное множество.

2. О методах решения линейных систем. Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы — прямые и итерационные. Прямые методы используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. Они дают решение после выполнения заранее известного числа операций. Эти методы сравнительно просты и наиболее универсальны, т, е, пригодны для решения широкого класса линейных систем.

Вместе с тем прямые методы имеют и ряд недостатков. Как правило, они требуют хранения в оперативной памяти компьютера сразу всей матрицы, и при больших значениях n расходуется много места в памяти. Далее, прямые методы обычно не учитывают структуру матрицы при большом числе нулевых элементов в разреженных матрицах эти элементы занимают место в памяти машины, и над ними проводятся арифметические действия. Существенным недостатком прямых методов является также накапливание погрешностей в процессе решения, поскольку вычисления на любом этапе используют результаты предыдущих операций. Это особенно опасно для больших систем, когда резко возрастает общее число операций, а также для плохо обусловленных систем, весьма чувствительных к погрешностям. В связи с этим прямые методы используются обычно для не слишком больших (n < 1000) систем с плотно заполненной матрицей и не близким к нулю определителем.

Отметим еще, что прямые методы решения линейных систем иногда называют точными, поскольку решение выражается в виде точных формул через коэффициенты системы. Однако точное решение может быть получено лишь при точном выполнении вычислений (и, разумеется, при точных значениях коэффициентов системы). На практике же при использовании компьютеров вычисления проводятся с погрешностями. Поэтому неизбежны погрешности и в окончательных результатах.

Итерационные методы —это методы последовательных приближений. В них необходимо задать некоторое приближенное решение — начальное приближение. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый итерацией. В результате итерации находят новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с требуемой точностью. Алгоритмы решения линейных систем с использованием итерационных методов обычно более сложные по сравнению с прямыми методами. Объем вычислений заранее определить трудно.

Тем не менее итерационные методы в ряде случаев предпочтительнее. Погрешности окончательных результатов при использовании итерационных методов не накапливаются, поскольку точность вычислений в каждой итерации определяется лишь результатами предыдущей итерации и практически не зависит от ранее выполненных вычислений. Достоинства итерационных методов делают их особенно полезными в случае большого числа уравнений, а также плохо обусловленных систем. Следует отметить, что при этом сходимость итераций может быть очень медленной; поэтому ищутся эффективные пути ее ускорения.

Прямые методы

Способы решения системы линейных уравнений: правило Крамера, метод Гаусса, метод прогонки, схема Жордана, метод квадратных корней, , схема Халецкого, методы LU-разложения и QR-разложения, метод оптимального исключения, клеточные методы и т.д.

1. Правило Крамера. Одним из способов решения системы линейных уравнений является правило Крамера, согласно которому каждое неизвестное представляется в виде отношения определителей. Запишем его для системы

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Тогда

$$x = D_1/D, \quad y = D_2/D,$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Можно попытаться использовать это правило для решения систем уравнений произвольного порядка. Однако при большом числе уравнений потребуется выполнить огромное число арифметических операций, поскольку для вычислений $\boldsymbol{n}$ неизвестных необходимо найти значения определителей, число которых $\boldsymbol{n}$ + 1. Количество арифметических операций можно оценить, учитывая предположение, что определители вычисляются непосредственно — без использования экономичных методов, получим

$$N = (n + 1)(n \cdot n! - 1) + n.$$

Поэтому правило Крамера можно использовать лишь для решения систем, состоящих из нескольких уравнений.

Известен также метод решения линейной системы с использованием обратной матрицы. Система записывается в виде Ax = b. Тогда, умножая обе части этого векторного уравнения слева на обратную матрицу A^{-1}, получаем $x = A^{-1}$ b. Однако если не использовать экономичных схем для вычисления обратной матрицы, этот способ также непригоден для практического решения линейных систем при больших значениях ***n*** из-за большого объема вычислений.

Наиболее распространенными среди прямых методов являются метод исключения Гаусса и его модификации. Ниже рассматривается применение метода исключения для решения систем линейных уравнений, а также для вычисления определителя и нахождения обратной матрицы.

2. Метод Гаусса. Он основан на приведении матрицы системы к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы. Сначала с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается x_2 из третьего и всех последующих уравнений. Этот процесс, называемый прямым ходом метода Гаусса, продолжается до тех пор, пока в левой части последнего (n-го) уравнения не останется лишь один член с неизвестным x_n, т. е. матрица системы будет приведена к треугольному виду.

Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение, находим единственное в этом уравнении неизвестное x_n. Далее, используя это значение, из предыдущего уравнения вычисляем x_{n-1} и т. д. Последним найдем x_1 из первого уравнения.

Рассмотрим применение метода Гаусса для системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Для исключения x_1 из второго уравнения прибавим к нему первое, умноженное на $-a_{21}/a_{11}$. Затем, умножив первое уравнение на $-a_{31}/a_{11}$ и прибавив результат к третьему уравнению, также исключим из него x_1.

Получим равносильную систему уравнений вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$$
$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3$$
$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \quad i, j = 2,3$$
$$b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, \quad i = 2,3$$

Теперь из третьего уравнения системы нужно исключить x_2. Для этого умножим второе уравнение на $-a'_{32}/a'_{22}$ и прибавим результат к третьему. Получим

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$$
$$a''_{33}x_3 = b''_3$$
$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{23}, \quad b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}b'_2$$

На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса.

Заметим, что в процессе исключения неизвестных приходится выполнять операции деления на коэффициенты a_{11}, a'_{22} и т. д. Поэтому они должны быть отличны от нуля. В противном случае необходимо соответственным образом переставить уравнения системы. Перестановка уравнений должна быть предусмотрена в вычислительном алгоритме при его реализации на компьютере.

Обратный ход начинается с решения третьего уравнения системы:

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

Используя это значение, можно найти x_2 из второго уравнения, а затем x_1 из первого:

$$x_2 = \frac{1}{a'_{22}}\left(b'_2 - a'_{23}x_3\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right)$$

Аналогично строится вычислительный алгоритм для линейной системы с произвольным числом уравнений.

3. Определитель и обратная матрица. Ранее уже отмечалось, что непосредственное нахождение определителя требует большого объема вычислений. Вместе с тем легко вычисляется определитель треугольной матрицы: он равен произведению ее диагональных элементов.

Для приведения матрицы к треугольному виду может быть использован метод исключения, т. е. прямой ход метода Гаусса. В процессе исключения элементов величина определителя не меняется. Знак определителя меняется на противоположный при перестановке его столбцов или строк.

Следовательно, значение определителя после приведения матрицы А к треугольному виду вычисляется по формуле

$$\det A = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Здесь диагональные элементы ац берутся из преобразованной (а не исходной) матрицы. Через k обозначено число перестановок строк (или столбцов) матрицы при ее приведении к треугольному виду (для получения ненулевого или максимального по модулю ведущего элемента на каждом этапе исключения). Благодаря методу исключения можно вычислять определители 1000-го и большего порядков, и объем вычислений значительно меньший, чем в проведенных ранее оценках.

Итерационные методы

1. Способы решения системы линейных уравнений: уточнение решения, метод прямой итерации, метод Гаусса-Зейделя, метод ослабления, метод градиента.

2. Метод простой итерации. Этот метод широко используется для численного решения уравнений и их систем различных видов. Рассмотрим применение метода простой итерации к решению систем линейных уравнений.

Запишем исходную систему уравнений в векторно-матричном виде и выполним ряд тождественных преобразований:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad \mathbf{0} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} + \mathbf{x};$$
$$\mathbf{x} = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})\tau + \mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = (E - \tau A)\mathbf{x} + \tau\mathbf{b};$$
$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \tau\mathbf{b},$$

где $\tau \neq 0$ — некоторое число, Е — единичная матрица, $B = E - \tau A$.

Получившаяся система эквивалентна исходной системе и служит основой для построения метода простой итерации.

Выберем некоторое начальное приближение $x^{(0)}$ и подставим его в правую часть системы (4.25):

$$\mathbf{x}^{(1)} = B\mathbf{x}^{(0)} + \tau\mathbf{b}.$$

Поскольку $x^{(0)}$ не является решением системы, в левой части получится некоторый столбец $x^{(1)}$, в общем случае отличный от $x^{(0)}$ Полученный столбец $x^{(1)}$ будем рассматривать в качестве следующего (первого) приближения к решению. Аналогично, по известному k - му приближению можно найти (k + 1) - е приближение:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \tau\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Формула (4.26) и выражает собой метод простой итерации. Для ее применения нужно задать неопределенный пока параметр τ. От значения τ зависит, будет ли сходиться метод, а если будет, то какова будет скорость сходимости, т. е. как много итераций нужно совершить для достижения требуемой точности. В частности, справедлива следующая теорема.

Для некоторых типов матрицы A можно указать правило выбора τ, обеспечивающее сходимость метода и оптимальную скорость сходимости. В простейшем же случае τ можно положить равным некоторому постоянному числу, например, 1, 0.1 и т. д.

3. Метод Гаусса-Зейделя. Одним из самых распространенных итерационных методов, отличающийся простотой и легкостью, является метод Гаусса-Зейделя.

Проиллюстрируем сначала этот метод па примере решения системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Предположим, что диагональные элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} отличны от нуля (в противном случае можно переставить уравнения). Выразим неизвестные x_1, x_2 и x_3 соответственно из первого, второго и третьего уравнений системы :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right)$$

Зададим некоторые начальные (нулевые) приближения значений неизвестных: $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0$. Подставляя эти значения в правую часть выражения (4.28), получаем новое (первое) приближение для x_1:

$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0\right)$$

Используя это значение для x_1 и приближение x_3^0 для x_3, находим первое приближение для x_2:

$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0\right)$$

И наконец, используя вычисленные значения $x_1 = x_1^1, x_2 = x_2^1$ находим первое приближение для x_3:

$$x_3^1 = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1\right)$$

На этом заканчивается первая итерация решения системы. Используя теперь значения x_1^1, x_2^1, x_3^1 можно таким же способом провести вторую итерацию, в результате которой будут найдены вторые приближения к решению: $x_1 = x_1^2, x_2 = x_2^2, x_3 = x_3^2$ и т. д.

Приближение с номером k можно вычислить, зная приближение с номером k-1, как

$$x_1^k = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{k-1} - a_{13}x_3^{k-1}\right)$$

$$x_2^k = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^{k-1}\right)$$

$$x_3^k = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k\right)$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения x_1^k, x_2^k, x_3^k не станут близкими с заданной погрешностью к значениям $x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, x_3^{k-1}$.

Пример. Решить с помощью метода Гаусса-Зейделя следующую систему уравнений:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

Легко проверить, что решение данной системы следующее: $x_1=x_2=x_3=1$.

Решение. Выразим неизвестные x_1, x_2 и x_3 соответственно из первого, второго и третьего уравнений:

$$x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(7 - 2x_1 + x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2)$$

В качестве начального приближения (как это обычно делается) примем $x_1^0 = 0, x_2^0 = 0, x_3^0 = 0$. Найдем новые приближения неизвестных:

$$x_1^1 = \frac{1}{4}(4 + 0 - 0) = 1$$

$$x_2^1 = \frac{1}{6}(7 - 2 \cdot 1 + 0) = \frac{5}{6}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{3}\left(1 + 2 \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{8}{9}$$

Аналогично вычислим следующие приближения:

$$x_1^2 = \frac{1}{4}\left(4 + \frac{5}{6} - \frac{8}{9}\right) = \frac{71}{72}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{6}\left(7 - 2 \cdot \frac{71}{72} + \frac{8}{9}\right) = \frac{71}{72}$$

$$x_3^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{71}{72} + 2 \cdot \frac{71}{72}\right) = \frac{71}{72}$$

Итерационный процесс можно продолжать до получения малой разности между значениями неизвестных в двух последовательных итерациях.

Раздел 2 Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

Тема 2.1. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. Методы решения нелинейных уравнений: дихотомии, хорд, касательных, комбинированный метод. Методы решения систем нелинейных уравнений: итерации, градиента, метод Ньютона. Оценка погрешностей методов

Уравнения, в которых содержатся неизвестные функции, произведенные в степень больше единицы, называются нелинейными.

Например, y=ax+b – линейное уравнение, x^3 – 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0 – нелинейное (в общем виде записывается как F(x)=0).

Системой нелинейных уравнений считается одновременное решение нескольких нелинейных уравнений с одной или несколькими переменными.

Существует множество методов **решения нелинейных уравнений** и систем нелинейных уравнений, которые принято относить в 3 группы: численные, графические и аналитические. Аналитические методы позволяют определить точные значения решения уравнений. Графические методы наименее точны, но позволяют в сложных уравнениях определить наиболее приближенные значения, с которых в дальнейшем можно начинать находить более точные решения уравнений. Численное решение нелинейных уравнений предполагает прохождения двух этапов: отделение корня и его уточнение до определенно заданной точности. Отделение корней осуществляется различными способами: графически, при помощи различных специализированных компьютерных программ и др.

Рассмотрим несколько методов уточнения корней с определенно заданной точностью.

Методы численного решения нелинейных уравнений

Метод половинного деления.

Суть метода половинного деления заключается в делении интервала [a,b] пополам (c=(a+b)/2) и отбрасывании той части интервала, в которой отсутствует корень, т.е. условие F(a)xF(b)<0 не выполняется. Оставшаяся часть является новым отрезком, и деление пополам продолжается до тех пор, пока оставшийся отрезок не будет сравним с заданным параметром точности e, т.е. (b-a)

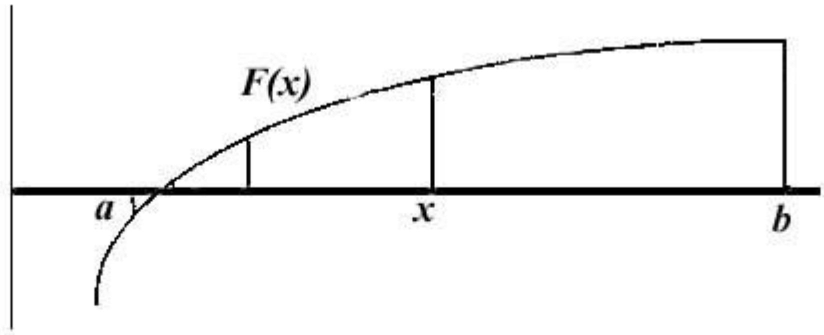


Рис.1. Использование метода половинного деления при решении нелинейных уравнений.

Рассмотрим пример. Необходимо решить уравнение $x^3 – 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$ с точностью до e<0,001 на отрезке [-1,0]. Обозначим начальную и конечную точки отрезка символами a и b соответственно.

В общем виде уравнение имеет вид: $F(x)= x^3 – 0,2x^2 + 0,5x + 1,5$

Разделим отрезок на 2 части: (a-b)/2 = (-1+0)/2=-0,5. Если произведение F(a)*F(x)>0, то начала отрезка a переносится в x (a=x), иначе, конец отрезка b переносится в точку x (b=x). Полученный отрезок делим опять пополам и т.д. Весь произведенный расчет отражен ниже в таблице.

Таблица результатов вычислений

a	b	x	F(a)	F(x)	F(a)*F(x)
-1,0000	0,0000	-0,5000	-0,2000	1,0750	-0,2150
-1,0000	-0,5000	-0,7500	-0,2000	0,5906	-0,1181250
-1,0000	-0,7500	-0,87500	-0,2000	0,2395	-0,0478906
-1,0000	-0,8750	-0,93750	-0,2000	-0,315	-0,0062988
-1,0000	-0,9375	-0,96875	-0,2000	-0,0812	0,0162439
-0,9688	-0,9375	-0,95313	-0,0812	-0,0241	0,0019587
0,9531	0,93750	-0,94531	-0,0241	0,0039	-0,0000934
-0,9531	-0,945313	-0,94922	-0,0241	-0,0101	0,0002429
-0,9492	-0,945313	-0,94727	-0,0101	-0,0031	0,0000311
-0,9473	-0945313	-0,94629	-0,0031	0,0004	-0,0000012
-0,9473	-0,946289	-0,94678	-0,0031	-0,0013	0,0000042

В результате вычислений получаем значение с учетом требуемой точности, равной x=-0,946

Метод хорд.

При использовании метода хорд, задается отрезок [a,b], в котором есть только один корень с установленной точностью e. Через точки в отрезке a и b, которые имеют координаты (x(F(a);y(F(b)), проводится линия (хорда). Далее определяются точки пересечения этой линии с осью абсцисс (точка z).

Если F(a)xF(z)<0, то правая часть отрезка переноситься в точку z (b=z), иначе переносится левая граница отрезка (a=z). Данное действие продолжается до достижения параметра точности e, т.е. F(z)< e.

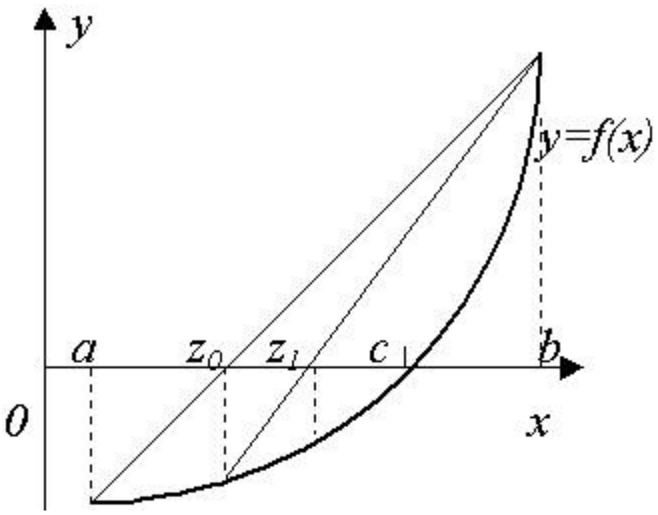


Рис.2. Использование метода хорд при решении нелинейных уравнений.

Рассмотрим пример. Необходимо решить уравнение x^3 – 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0 с точностью до e<0,001 на отрезке [-1,0]. Обозначим начальную и конечную точки отрезка символами a и b соответственно.

В общем виде уравнение имеет вид: F(x)= x^3 – 0,2x^2 + 0,5x + 1,5

Найдем значения F(x) на концах отрезка [a,b]:

F(-1) = - 0,2>0;

F(0) = 1,5>0.

Определим вторую производную F’’(x) = 6x-0,4.

F’’(-1)=-6,4<0;

F’’(0)=-0,4<0.

На концах отрезка условие F(-1)F’’(-1)>0 соблюдается, поэтому для определения корня уравнения воспользуемся формулой:

$$x_{i+1} = a + \frac{F(a)}{F(a) - F(x_i)}(x_i - a)$$

,

где x0=b, F(a)=F(-1)=-0,2

Весь произведенный расчет отражен ниже в таблице.

Таблица результатов вычислений

i	x_i	$F(x_i)$	X_i-a
0	0	1,5	1
1	-0,882	0,2173	0,118
2	-0,943	0,0121	0,057
3	-0,946	0,0014	0,054
4	-0,946		

В результате вычислений получаем значение с учетом требуемой точности, равной x=-0,946

Метод касательных (Ньютона)

Данный метод основывается на построении касательных к графику, которые проводятся на одном из концов интервала [a,b]. В точке пересечения с осью X (z1) строится новая касательная. Данная процедура продолжается до тех пор, пока полученное значение не будет сравним с нужным параметром точности e (F(zi)

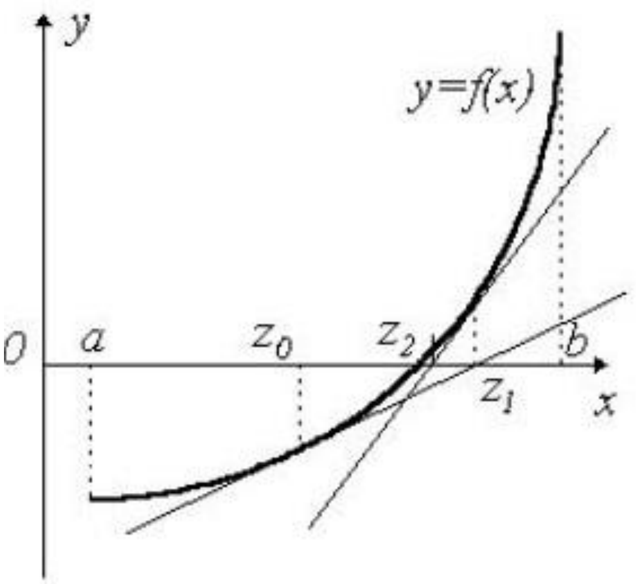


Рис.3. Использование метода касательных (Ньютона) при решении нелинейных уравнений.

Рассмотрим пример. Необходимо решить уравнение x^3 – 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0 с точностью до e<0,001 на отрезке [-1,0]. Обозначим начальную и конечную точки отрезка символами a и b соответственно.

В общем виде уравнение имеет вид: F(x)= x^3 – 0,2x^2 + 0,5x + 1,5

Определим первую и вторую производные: F'(x)=3x^2-0,4x+0,5, F''(x)=6x-0,4;

F''(-1)=-6-0,4=-6,4<0;

F''(0)=-0,4<0.

Условие F(-1)F''(-1)>0 выполняется, поэтому расчеты производим по формуле:

$$x_{i+1} = x - \frac{F(x_i)}{F'(x_0)}$$,

где x0=b, F(a)=F(-1)=-0,2

Весь произведенный расчет отражен ниже в таблице.

Таблица результатов вычислений

i	x_i	$F(x_i)$
0	-1	-0,200
1	-0,9487	-0,0083
2	-0,9466	-0,007
3	-0,9464	-0,0001

В результате вычислений получаем значение с учетом требуемой точности, равной x=-0,946

Раздел 3 Аппроксимация функции

Тема 3.1. Аппроксимация функции. Основные понятия. Методы интерполирования. Использование многочленов, полином Ньютона, Лагранжа, интерполяция сплайнами.

Понятие о приближении функций

1. Постановка задачи. Пусть величина у является функцией аргумента х. Это означает, что любому значению х из области определения поставлено в соответствие значение у. Вместе с тем на практике часто неизвестна явная связь между у и х, т. е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$.Иногда даже известная зависимость $y = f(x)$ оказывается настолько громоздкой (например, содержит трудно вычисляемые выражения, сложные интегралы и т. п.), что ее использование в практических расчетах требует слишком много времени.

Наиболее распространенным и практически важным случаем, когда вид связи между параметрами х и у неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы $\{x_i, y_i\}$. Это означает, что дискретному множеству значений аргумента $\{x_i\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}$ ($i = 0,1,..., n$). Эти значения — либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике нам могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x_i. Однако получить эти значения можно лишь путем очень сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов.

Таким образом, с точки зрения экономии времени и средств мы приходим к необходимости использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра x, поскольку точная связь $y=f(x)$ не известна (либо нам нецелесообразно ею пользоваться).

Этой цели и служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение (в некотором смысле) $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(x)$ при этом называется аппроксимирующей.

Аппроксимация рассмотренного выше типа, при которой приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, называется *точечной*. К ней относятся интерполирование, среднеквадратичное приближение и др. При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке) аппроксимация называется *непрерывной* (или интегральной). К непрерывной аппроксимации относится, например, равномерное приближение.

Для практики весьма важен случай аппроксимации функции многочленом:

$$\varphi(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \qquad (1)$$

В дальнейшем будем чаще всего рассматривать аппроксимацию такого рода. При этом коэффициенты a_j будут подбираться так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от данной функции.

2. Точечная аппроксимация. Одним из основных типов точечной аппроксимации является интерполирование. Оно состоит в следующем: для
данной функции $y = f(x)$ строим интерполирующую функцию $\varphi(x)$ (например, многочлен (1)), принимающую в заданных точках x_i, те же значения y_i, что и функция $f(x)$, т. е.

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n. \qquad (2)$$

При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых, т. е. $x_i \neq x_k$ *при* $i \neq k$. Точки x_i называются узлами интерполяции.

Таким образом, близость интерполирующей функции (рис. 1, сплошная линия) к заданной функции состоит в том, что их значения совпадают на заданной системе точек.

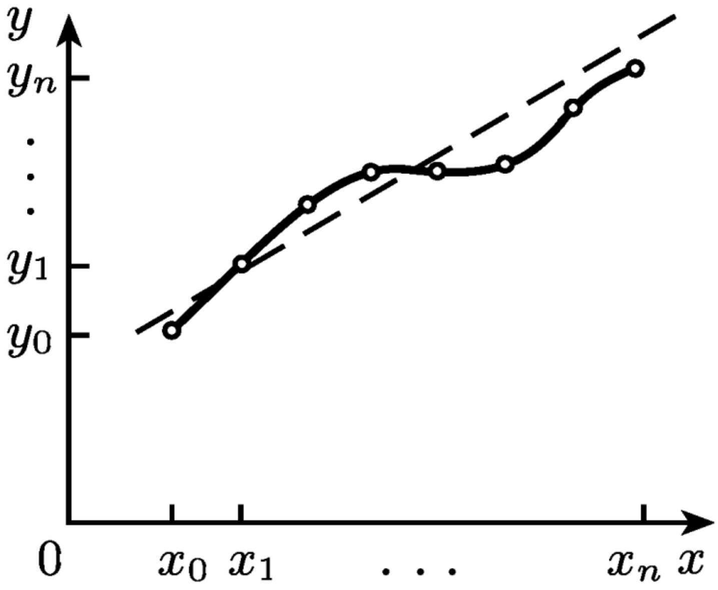


Рис. 1. Интерполяция и аппроксимация

Интерполирующая функция $\varphi(x)$ может строиться сразу для всего рассматриваемого интервала изменения x или отдельно для разных частей этого интервала. В первом случае говорят о *глобальной интерполяции*, во втором — о *кусочной (или локальной)* интерполяции.

Как правило, интерполирование используется для аппроксимации функции в промежуточных точках между крайними узлами интерполяции, т. е. при $x_0 < x < x_n$. Однако иногда оно применяется и для приближенного вычисления функции вне рассматриваемого отрезка ($x < x_0$, $x > x_n$). Это приближение называют *экстраполяцией*.

Рассмотрим использование в качестве функции $\varphi(x)$ многочлена (1), называемого интерполяционным многочленом. При глобальной интерполяции, т. е. при построении одного многочлена для всего рассматриваемого интервала изменения x, для нахождения коэффициентов многочлена необходимо использовать все уравнения системы (2). Данная система содержит $n+1$ уравнение, следовательно, с ее помощью можно определить $n+1$ коэффициент. Поэтому максимальная степень интерполяционного многочлена $m=n$, и многочлен принимает вид

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (3)$$

Система уравнений (2) при использовании в качестве φ(x) многочлена (3) является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_0 , a_1 ,..., a_n и имеет вид

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{array} \qquad (4)$$

Определитель такой системы в линейной алгебре называется определителем Вандермонда. Можно показать, что определитель Вандермонда отличен от нуля, если $x_i \neq x_k$ *при* $i \neq k$, т. е. если среди узлов интерполяции нет совпадающих. Следовательно, в этом случае система (4) имеет единственное решение. Решив систему (4), можно построить интерполяционный многочлен. Такой метод построения интерполяционного многочлена называется методом неопределенных коэффициентов. Заметим вместе с тем, что этот метод требует значительного объема вычислений, особенно при большом числе узлов. Существуют более простые алгоритмы построения интерполяционных многочленов, которые рассмотрим далее.

Как видим, при интерполировании основным условием является прохождение графика интерполирующей функции через данные значения функции в узлах интерполяции. Однако в ряде случаев выполнение этого условия затруднительно или даже нецелесообразно.

Например, при большом количестве узлов интерполяции в случае глобальной интерполяции получается высокая степень многочлена (3). Кроме того, табличные данные могли быть получены путем измерений и содержать ошибки. Построение аппроксимирующей функции с условием обязательного прохождения ее графика через эти экспериментальные точки означало бы тщательное повторение допущенных при измерениях ошибок. Выход из этого положения может быть найден выбором такой функции, график которой проходит близко от данных точек (см. рис. 1, штриховая линия).

Одним из таких видов является среднеквадратичное приближение. Если при этом используется многочлен (1), то $m \le n$; случай $m=n$ соответствует глобальной интерполяции. На практике стараются подобрать аппроксимирующую функцию как можно более простого вида, например, многочлен степени m = 1, 2, 3.

Мерой отклонения функции ($\varphi(x)$ от заданной функции $f(x)$ на множестве точек (x_i,y_i) (i = $0,1,...,n$) при среднеквадратичном приближении является величина S, равная сумме квадратов разностей между значениями аппроксимирующей и заданной функции в данных точках:

$$S=\sum_{i=0}^{n}\left[\varphi(x_i)-y_i\right]^2$$

Аппроксимирующую функцию нужно подобрать так, чтобы величина S была наименьшей. В этом состоит метод наименьших квадратов

3. Непрерывная аппроксимация. Равномерное приближение. Во многих случаях, особенно при обработке экспериментальных данных, среднеквадратичное приближение вполне приемлемо, поскольку оно сглаживает некоторые неточности функции $f(x)$ и дает достаточно правильное представление о ней. Иногда, однако, при построении приближения ставится более жесткое условие: требуется, чтобы во всех точках некоторого отрезка [a,b] отклонение аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ было по абсолютной величине меньшим заданной величины ε>0:

$$\left|f(x)-\varphi(x)\right|<\varepsilon, \quad a \le x \le b$$

В этом случае говорят, что функция $\varphi(x)$ равномерно приближает (аппроксимирует) функцию $f(x)$ с точностью ε на отрезке [a,b].

Понятие равномерного приближения предполагает сравнение заданной и аппроксимирующей функций на непрерывном множестве — отрезке [a,b]. Поэтому равномерное приближение относится к непрерывной аппроксимации.

Введем понятие *абсолютного отклонения* Δ функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ на отрезке [a,b]. Оно равно максимальному значению абсолютной величины разности между ними на данном отрезке:

$$\Delta=\max_{a\le x\le u}\left|f(x)-\varphi(x)\right| \tag{5}$$

По аналогии можно ввести понятие *среднеквадратичного отклонения* $\overline{\Delta}=\sqrt{S/n}$ при среднеквадратичном приближении функций. На рис. 2 показано принципиальное различие двух рассматриваемых приближений.

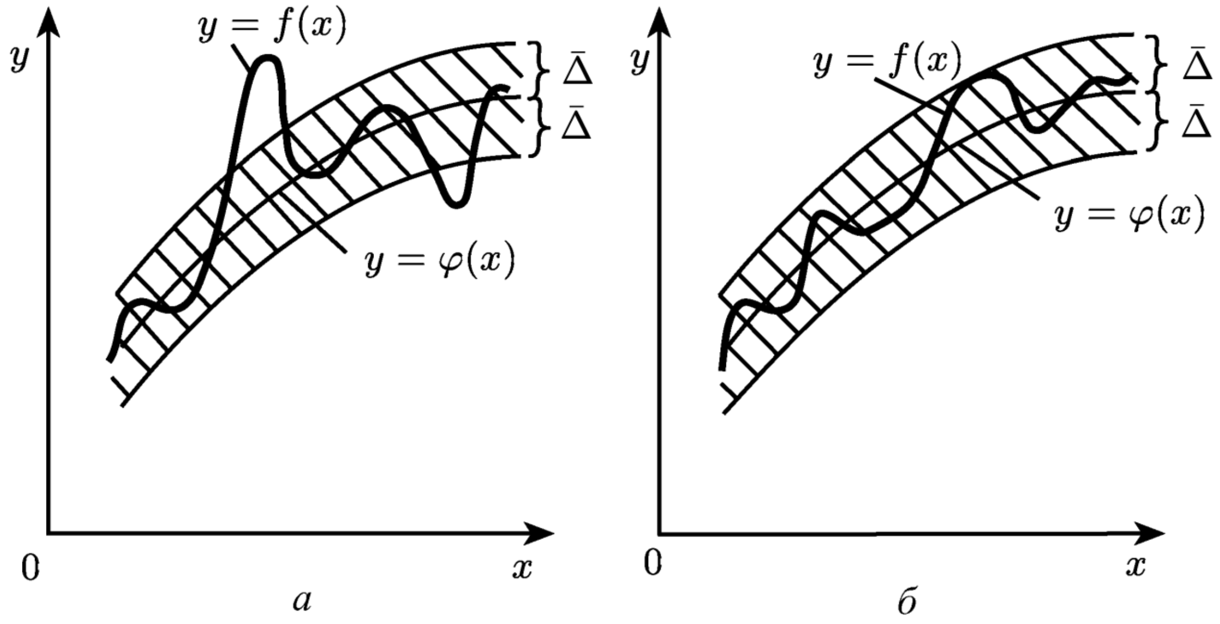


Рис. 2. Приближения: среднеквадратичное (а); равномерное (б)

Возможность построения многочлена, равномерно приближающего данную функцию, следует из *теоремы Вейерштрасса* об аппроксимации.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для любого $\varepsilon>0$ существует многочлен $P_m(x)$ степени $m=m(\varepsilon)$, абсолютное отклонение которого от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ меньше ε.

В частности, если функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ разлагается в равномерно сходящийся степенной ряд, то в качестве аппроксимирующего многочлена можно взять частичную сумму этого ряда. Такой подход широко используется, например, при вычислении на компьютере значений элементарных функций.

4. Вычисление многочленов. При аппроксимации функций, а также в некоторых других задачах приходится вычислять значения многочленов вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (6)$$

Если проводить вычисления «в лоб», т. е. находить значения каждого члена и суммировать их, то при больших n потребуется выполнить большое число операций ($(n^2 + n)/2$ умножений и n сложений). Кроме того, это может привести к потере точности за счет погрешностей округления. В некоторых частных случаях удается выразить каждый последующий член через предыдущий и таким образом значительно сократить объем вычислений.

Анализ многочлена (6) в общем случае приводит к тому, что для исключения возведения x в степень в каждом члене многочлен целесообразно переписать в виде

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + a_n x)\ldots)) \qquad (7)$$

Прием, с помощью которого многочлен представляется в таком виде, называется *схемой Горнера*. Этот метод требует n умножений и n сложений. Использование схемы Горнера для вычисления значений многочленов не только экономит машинное время, но и повышает точность вычислений за счет уменьшения погрешностей округления.

При вычислении значении элементарных функции на компьютере используются разложения этих функции в степенные ряды, например $sin(x)$ вычисляется с помощью ряда:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Интерполирование

1. Линейная и квадратичная интерполяции. Простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции является *линейная* (или *кусочно линейная*) интерполяция. Она состоит в том, что заданные точки (x_i,y_i) $(i = 0,1,..., n)$ соединяются прямолинейными отрезками, и функция $f(x)$ приближается ломаной с вершинами в данных точках.

Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные. Поскольку имеется n интервалов (x_{i-1},x_i), то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного многочлена используется уравнение прямой, проходящей через две точки. В частности, для i-го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1},y_{i-1}) и (x_i,y_i), в виде

$$\frac{y-y_{i-1}}{y_i-y_{i-1}}=\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$$

Отсюда

$$y=a_i x+b, \qquad x_{i-1}\le x\le x_i$$

$$a_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, \qquad b_i=y_{i-1}-a_i x_{i-1} \tag{8}$$

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента x, а затем подставить его в формулу (2.28) и найти приближенное значение функции в этой точке. Данный алгоритм представлен на рис. 4.7. Попытайтесь разобраться, будет ли работать этот алгоритм, если окажется, что $x < x_0$ или $x > x_n$, и при необходимости модифицировать его.

Рассмотрим теперь случай квадратичной интерполяции. В качестве интерполяционной функции на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ принимается квадратный трехчлен. Такую интерполяцию называют также параболической.

Уравнение квадратного трехчлена

$$y=a_i x^2+b_i x+c_i, \qquad x_{i-1}\le x_i\le x_{i+1} \tag{9}$$

содержит три неизвестных коэффициента a_i, b_i, c_i для определения которых необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы (4.9) через три точки (x_{i-1},y_{i-1}), (x_i,y_i), (x_{i+1},y_{i+1}). Эти условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} &a_i x_{i-1}^2+b_i x_{i-1}+c_i=y_{i-1},\\ &a_i x_i^2+b_i x_i+c_i=y_i,\\ &a_i x_{i+1}^2+b_i x_{i+1}+c_i=y_{i+1}, \end{aligned} \tag{10}$$

Решая эту систему находим значения a_i, b_i, c_i.

2. Многочлен Лагранжа. Перейдем к случаю глобальной интерполяции, т. е. к построению интерполяционного многочлена, единого для всего отрезка $[x_0, x_n]$.

Будем искать интерполяционный многочлен в виде линейной комбинации многочленов степени n:

$$L(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+\ldots+y_n l_n(x) \tag{11}$$

При этом потребуем, чтобы каждый многочлен $l_i(x)$ обращался в нуль во всех узлах интерполяции, за исключением одного (i -го), где он должен равняться единице. Легко проверить, что этим условиям при i=0 отвечает многочлен вида

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \tag{12}$$

Действительно, $l_0(x_0)$=1. При $x = x_1, x_2, \ldots , x_n$ числитель выражения обращается в нуль. По аналогии получим

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)},$$

....

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}, \qquad (13)$$

....

$$l_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})},$$

Подставляя в (4.11) выражения (4.12), (4.13), находим

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} \qquad (14)$$

Эта формула определяет ***интерполяционный многочлен Лагранжа.***

Из формулы (4.14) можно получить выражения для линейной ($n = 1$) и квадратичной ($n = 2$) интерполяций:

$$L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \quad при\ n = 1$$

$$L(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \quad при\ n = 2$$

Существует несколько обобщений интерполяционного многочлена Лагранжа. Например, довольно широко используются интерполяционные многочлены Эрмита. Здесь наряду со значениями функции yi в узлах xi задаются значения ее производной yi`. Задача состоит в том, чтобы найти многочлен φ(x) степени 2n + 1, значения которого и значения его производной в узлах xi удовлетворяют соответственно соотношениям

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad \varphi'(x_i) = y_i', \quad i = 0,1,\ldots,n$$

В этом случае также существует единственное решение, если все xi различны.

5. Сплайны. Сейчас широкое распространение для интерполяции получило использование кубических сплайн-функций — специальным образом построенных многочленов третьей степени. Они представляют собой некоторую математическую модель гибкого тонкого стержня из упругого материала. Если закрепить его в двух соседних узлах интерполяции с заданными углами наклонов α и β (рис. 3), то между точками закрепления этот стержень (механический сплайн) примет некоторую форму, минимизирующую его потенциальную энергию.

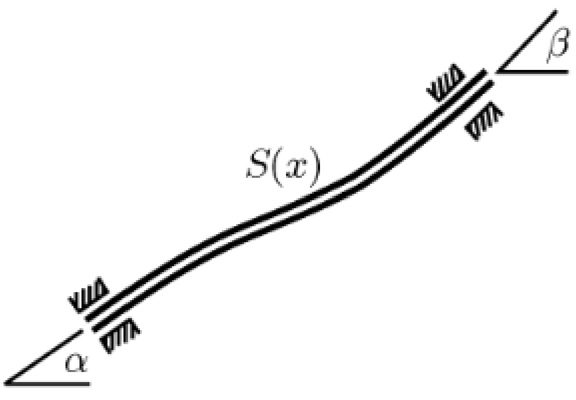


Рис. 3. Механический сплайн

Пусть форма этого стержня определяется функцией *y=S(x)*. Из курса сопротивления материалов известно, что уравнение свободного равновесия имеет вид $S^{IV}(x)=0$. Отсюда следует, что между каждой парой соседних узлов интерполяции функция *S(x)* является многочленом степени не выше третьей. Запишем ее в виде

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$$

где $x_{i-1} \le x \le x_i$

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i на всех n элементарных отрезках необходимо получить $4n$ уравнений. Часть из них вытекает из условий прохождения графика функции $S(x)$ через заданные точки, т. е. $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $S_i(x_i) = y_i$. Эти условия можно записать в виде

$$S_i(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1} \tag{14}$$

$$S_i(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \tag{15}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1,2,3,\ldots,n$

Эта система содержит $2n$ уравнений. Для получения недостающих уравнений зададим условия непрерывности первых и вторых производных во внутренних узлах интерполяции, т. е. условия гладкости второго порядка кривой во всех точках:

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i), \quad S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i), \quad i = 1,2,\ldots,n-1 \tag{16}$$

Вычислим производные многочлена (13):

$$\begin{aligned} S_i(x) &= b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 \\ S_i''(x) &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя эти выражения в (16), получаем $2n — 2$ уравнений

$$b_{i+1} = b_i + 2h_i c_i + 3h_i^2 d_i \tag{18}$$

$$c_{i+1} = 2c_i + 6h_i d_i \tag{19}$$

$$i = 1,2,3,\ldots,n-1$$

Недостающие два уравнения получаются из условий закрепления концов сплайна. Обычно эти условия представляют собой соотношения, в которые входят значения первой и второй производных функции $S(x)$ в точках x_0 и x_n . Поэтому указанные значения должны входить в рассматриваемую систему уравнений. Из (17) следует, что $S_i'(x_{i-1}) = b_i$, $S_i''(x_{i-1}) = 2c_i$. Отсюда $S_i'(x_0) = b_1$, $S_i''(x_0) = 2c_1$, т. е. значения производных в точке x_0 присутствуют в системе. Значения же производных в точке x_n в системе отсутствуют. Введем их в систему с помощью дополнительных неизвестных b_{n+1} и c_{n+i}:

$$S_i'(x_n) = b_{n+1}, \quad S_i''(x_n) = 2c_{n+1}$$

Из условий непрерывности производных в точке хп следует, что

$$b_{n+1} = b_n + 2h_n c_n + 3h_n^2 d_n, \qquad c_{n+1} = 2c_n + 6h_n d_n$$

Таким образом, соотношения (18), (19) можно рассматривать для диапазона индексов

$$i = 1,2,3,\ldots,n \tag{20}$$

Система (14), (15), (18), (19) с учетом (20) содержит $4n+2$ неизвестных и $4n$ уравнений и может быть дополнена, например, следующими условиями закрепления концов сплайна:

$$S_i'(x_0) = b_1 = k_1, \qquad S_i'(x_n) = b_{n+1} = k_2 \tag{21}$$

$$S_i''(x_0) = 2c_1 = m_1, \qquad S_i''(x_n) = 2c_{n+1} = m_2 \tag{22}$$

где k_1, k_2, m_1, m_2 – заданные числа.

В частности, при заданных углах наклона α и β (см. рис. 3)

$$k_1 = tg\alpha, \quad k_2 = tg\beta$$

При свободном закреплении концов можно приравнять нулю кривизну линии в точках закрепления. Получаемая таким образом функция называется свободным кубическим сплайном. Из условия нулевой кривизны на концах следуют равенства нулю вторых производных в этих точках. Отсюда

$$m_1 = m_2 = 0$$

Соотношения (14), (15), (18), (19), а также (21) или (22) составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_i, d_i *(i=1, 2,…,n) и* a_i, b_i, c_i, d_i *(i=1, 2,…,n+1)*. Ее можно решить одним из методов, изложенных в гл. 4.

Однако с целью экономии памяти компьютера и машинного времени эту систему можно привести к более удобному виду. Из условия (14) сразу можно найти все коэффициенты a_i. Далее, из (19) получим

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{23}$$

Подставим эти соотношения, а также значения $a_i = y_{i-1}$ в (4.15) и найдем отсюда коэффициенты

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{24}$$

Учитывая выражения (4.23) и (4.24), исключаем из уравнения (4.18) коэффициенты d_i и b_i. Окончательно получим следующую систему уравнений только для коэффициентов c_i:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \quad i = 2,3,\ldots,n \tag{25}$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = k_1, \quad \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{h_n}{3}(2c_{n+1} + c_n) = k_2 \tag{26}$$

Или

$$c_1 = \frac{m_1}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{m_2}{2}$$

Здесь уравнения (26) используются при применении условий (21), а уравнения (27) — при применении условий (22).

Матрица системы (25) трехдиагональная, т. е. ненулевые элементы находятся лишь на главной и двух соседних с ней диагоналях, расположенных сверху и снизу. Для ее решения целесообразно использовать метод прогонки. По найденным из системы (25), (26) или (27) коэффициентам c_i легко вычислить коэффициенты b_i, d_i.

Заметим, что кубическая сплайн-функция, удовлетворяющая условиям (21) или (22), обладает наименьшей (в некотором смысле) кривизной среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[x_0, x_n]$ с заданными значениями в узлах интерполяции.

Тема 3.2. Определение параметров эмпирической зависимости: метод выбранных точек, метод средних. Метод наименьших квадратов. Локальное сглаживание данных.

Определение параметров эмпирической зависимости. Будем считать, что тип эмпирической формулы выбран, и ее можно представить в виде

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, \cdots, a_m) \tag{1}$$

где φ — известная функция, $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — неизвестные постоянные параметры. Задача состоит в том, чтобы определить такие значения этих параметров, при которых эмпирическая формула дает хорошее приближение данной функции, значения которой в точках x_i равны y_i $(i = 0,1,\ldots,n)$.

Как уже отмечалось выше, здесь не ставится условие (как в случае интерполяции) совпадения опытных данных y_i со значениями эмпирической функции (1) в точках x_i. Разность между этими значениями (отклонения) обозначим через ε_i. Тогда

$$\varepsilon_i = \varphi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{2}$$

Задача нахождения наилучших значений параметров $a_0, a_1, \ldots, a_m$ сводится к некоторой минимизации отклонений ε_i. Существует несколько способов решения этой задачи.

Простейшим из них является метод выбранных точек. Он состоит в следующем. По заданным экспериментальным значениям на координатной плоскости OXY наносится система точек. Затем проводится простейшая плавная линия (например, прямая), которая наиболее близко примыкает к данным точкам. На этой линии выбираются точки, которые, вообще говоря, не принадлежат исходной системе точек. Число выбранных точек должно быть равным количеству искомых параметров эмпирической зависимости. Координаты этих точек (x_j^0, y_j^0) тщательно измеряются и используются для записи условия прохождения графика эмпирической функции (1) через выбранные точки:

$$\varphi\left(x_j^0, a_0, a_1, \ldots, a_m\right) = y_j^0 \quad j = 1,2,\ldots,m \tag{3}$$

Из этой системы уравнений находятся значения параметров $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

В частности, если в качестве эмпирической формулы принята линейная зависимость $y = ax+b$, то на этой прямой выбираются точки $\left(x_0^0, y_0^0\right)$ и $\left(x_1^0, y_1^0\right)$, и уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} ax_0^0 + b &= y_0^0 \\ ax_1^0 + b &= y_1^0 \end{aligned} \tag{4}$$

Можно также сразу записать уравнение прямой, проходящей через эти выбранные точки. В этом случае не нужно решать систему (4).

Рассмотрим еще один способ определения параметров эмпирической формулы — метод средних. Он состоит в том, что параметры $a_0, a_1, \ldots, a_m$ зависимости (3) определяются с использованием условия равенства нулю суммы отклонений (4.4) во всех точках x_i:

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=0}^{n} \left[\varphi\left(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m\right) - y_i\right] = 0$$

Полученное уравнение служит для определения параметров $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Ясно, что из одного уравнения нельзя однозначно определить все $m + 1$ параметров. Однако, поскольку других условий нет, равенство (4.4) путем группировки отклонений ε_i, разбивается на систему, состоящую из $m + 1$ уравнений. Например,

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0 \\ &\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 = 0 \\ &\ldots\ldots \\ &\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = 0 \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, можно найти неизвестные параметры.

Методы аппроксимации: среднеквадратичное приближение, равномерное приближение, метод наименьших квадратов.

Рассмотрим метод наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов. Запишем сумму квадратов отклонений (2) для всех точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[\varphi\left(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m\right) - y_i\right]^2 \tag{5}$$

Параметры $a_0, a_1, \ldots, a_m$ эмпирической формулы (3) будем находить из условия минимума функции $S = S(a_0, a_1, \ldots, a_m)$. В этом состоит метод наименьших квадратов.

Поскольку здесь параметры $a_0, a_1, \ldots, a_m$ выступают в роли независимых переменных функции S, то ее минимум найдем, приравнивая нулю частные производные по этим переменным:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0 \tag{6}$$

Полученные соотношения – система уравнений для определения $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для широко используемого на практике частного случая, когда функция φ является линейной по неизвестным параметрам $a_0, a_1, \ldots, a_m$:

$$\varphi(x, a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x),$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ – известные функции x. Формула (6) для определения суммы квадратов отклонений S примет вид

$$S = \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) - y_i\right]^2$$

Продифференцируем S по переменным a_k ($k = 0,1,\ldots ,m$) и приравнивая найденные производные нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^{n}\varphi_k(x_i)\left[\sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) - y_i\right] = 0, \qquad k = 0,1,\ldots,m \qquad (7)$$

Система (7) является системой линейных алгебраических уравнений, ее можно записать в наглядном векторно-матричном виде. Для этого введем векторы опытных данных y и неизвестных параметров a, а также матрицу Φ следующим образом

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_m(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}$$

Здесь векторы y и a имеют размерности $n + 1$ и $m + 1$ соответственно, а матрица Ф имеет размерность $(n + 1)x(m + 1)$. Для ее элементов справедливо выражение

$$\Phi_{ij} = \varphi_j(x_i)$$

Нетрудно убедиться, что выражение, стоящее в квадратных скобках в (7), является *i-й* компонентой вектора $\Phi a - y$, а каждое уравнение (4.7) представляет собой равенство нулю *k-й* компоненты вектора $\Phi^T(\Phi a - y)$, где Φ^T — транспонированная матрица. Таким образом, систему (7) можно записать в виде

$$\Phi^T(\Phi a - y) = 0$$

или

$$(\Phi^T \Phi)\, a = \Phi^T y$$

Матрица этой системы $\Phi^T\Phi$ имеет размерность $(m + 1)x(m + 1)$, вектор a является искомым.

Пример. Используя метод наименьших квадратов, вывести эмпирическую формулу для функции $y = f(x)$, заданной в табличном виде:

x	0.75	1.5	2.25	3.0	3.75
y	2.5	1.2	1.12	2.25	4.28

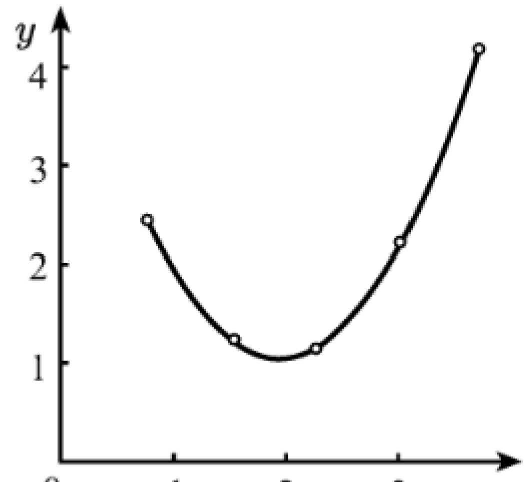


Рис. 1

Решение. Если изобразить данные табличные значения на графике (рис. 1), то легко убедиться, что в качестве эмпирической формулы для аппроксимации функции $y = f(x)$ можно принять квадратный трехчлен, графиком которого является парабола:

$y \approx \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

В данном случае имеем

$m = 2, \quad n = 4, \quad \varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2$

$$y = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.2 \\ 1.12 \\ 2.25 \\ 4.28 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0.75^2 \\ 1 & 1.5 & 1.5^2 \\ 1 & 2.25 & 2.25^2 \\ 1 & 3.0 & 3.0^2 \\ 1 & 3.75 & 3.75^2 \end{pmatrix}$$

После вычисления матрицы $\Phi^T\Phi$ и вектора $\Phi^T y$ (приведены округленные значения)

$$\Phi^{\mathrm{T}}\Phi = \begin{pmatrix} 5 & 11.25 & 30.94 \\ 11.25 & 30.94 & 94.92 \\ 30.94 & 94.92 & 309.76 \end{pmatrix}, \quad \Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 11.35 \\ 29.00 \\ 90.21 \end{pmatrix}$$

система уравнений (4.7) принимает вид

$5a_0 + 11.25a_1 + 30.94a_2 = 11.35$

$11.25a_0 + 30.94a_1 + 94.92a_2 = 29.00$

$30.94a_0 + 94.92a_1 + 309.76a_2 = 90.21$

Отсюда находим значения параметров эмпирической формулы: $a_0=4.82$, $a_1=-3.88$, $a_2=1.00$.

Таким образом, получаем следующую аппроксимацию функции, заданной в табличном виде:

$y \approx 4{,}82 - 3{,}88x + x^2$

Раздел 4 Численные методы дифференцирования

Тема 4.1. Численные методы дифференцирования. Оценка точности методов. Использование интерполяционных формул. Аппроксимация производных с помощью центральных разностей. Метод неопределенных коэффициентов

Численное дифференцирование

1. Аппроксимация производных. Напомним, что производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (5.1)$$

Обычно для вычисления производных используют готовые формулы (таблицу производных) и к выражению (3.1) не прибегают. Однако в численных расчетах на компьютере использование этих формул не всегда удобно и возможно. В частности, функция $y = f(x)$ может быть задана в виде таблицы значений (полученных, например, в результате численного расчета). В таких случаях производную можно найти, опираясь на формулу (3.1). Значение шага Δx полагают равным некоторому конечному числу, и для вычисления значения производной получают приближенное равенство

$$y' \approx \Delta y / \Delta x \qquad (5.2)$$

Это соотношение называется аппроксимацией (приближением) производной с помощью отношения конечных разностей (значения Δy, Δx в формуле (5.2) конечные в отличие от их бесконечно малых значений в (5.1).

Рассмотрим аппроксимацию производной для функции $y = f(x)$, заданной в табличном виде: $y = y_0, y_1, \ldots$, в узлах $x = x_0, x_1, \ldots$. Пусть шаг — разность между соседними значениями аргумента — постоянный и равен h. Запишем выражения для производной y_1' в узле $x = x_1$, который слева отмечен крестиком. Используемые при этом узлы (шаблон) отмечены кружочками. В зависимости от способа вычисления конечных разностей получаем разные формулы для вычисления производной в одной и той же точке:

$$O\otimes \qquad \Delta y_1 = y_1 - y_0, \qquad \Delta x = h, \qquad y_1' \approx \frac{y_1 - y_0}{h} \tag{5.3}$$

с помощью *левых разностей*;

$$\otimes O \qquad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \qquad \Delta x = h, \qquad y_1' \approx \frac{y_2 - y_1}{h} \tag{5.4}$$

с помощью *правых разностей*;

$$O\times O \qquad \Delta y_1 = y_2 - y_0, \qquad \Delta x = 2h, \qquad y_1' \approx \frac{y_2 - y_0}{2h} \tag{5.5}$$

с помощью *центральных разностей*.

Можно найти также выражения для старших производных. Например,

$$O\otimes O \qquad y_1'' = (y_1')' \approx \frac{y_2' - y_1'}{h} \approx \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{h} - \dfrac{y_1 - y_0}{h}}{h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \tag{5.6}$$

Таким образом, используя формулу (5.2), можно найти приближенные значения производных любого порядка. Однако при этом остается открытым вопрос о точности полученных значений. Кроме того, как будет показано ниже, для хорошей аппроксимации производной нужно использовать значения функции во многих узлах, а в формуле (5.2) это не предусмотрено.

2. Погрешность численного дифференцирования. Один из источников погрешности численного дифференцирования — погрешность аппроксимации (ее также называют погрешностью усечения). Она определяется величиной остаточного члена.

Анализ остаточного члена нетривиален, отметим, лишь, что погрешность аппроксимации при уменьшении шага h, как правило, уменьшается.

Погрешности, возникающие при численном дифференцировании, определяются также неточными значениями функции y_i в узлах и погрешностями округлений при проведении расчетов на компьютере. Обусловленные этими причинами погрешности, в отличие от погрешности аппроксимации, возрастают с уменьшением шага h. Действительно, если при вычислении значений функции $y = f(x)$ абсолютная погрешность составляет d, то при вычислении дробей в (5.3) и (5.4) она составит $2d/h$. Поэтому суммарная погрешность численного дифференцирования может убывать при уменьшении шага лишь до некоторого предельного значения, после чего дальнейшее уменьшение шага не повысит точности результатов.

Потеря точности аппроксимации производных может быть предотвращена за счет регуляризации процедуры численного дифференцирования.

Простейшим способом регуляризации является такой выбор шага h, при котором справедливо неравенство $|f(x+h) - f(x)| > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ —некоторое малое число. При вычислении производной это исключает вычитание очень близких по величине чисел, которое обычно приводит к увеличению погрешности. Это тем более опасно при последующем делении приращения функции на малое число h. Другой способ регуляризации заключается в оценке суммарной погрешности численного дифференцирования и выборе такого шага h, который минимизировал бы эту суммарную погрешность. Возможен и еще один подход — сглаживание табличных значений функции подбором некоторой гладкой аппроксимирующей функции, например, многочлена.

3. Использование интерполяционных формул. Предположим, что функция $f(x)$, заданная в виде таблицы с постоянным шагом $h = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, может быть аппроксимирована интерполяционным многочленом Ньютона (2.39):

$$y \approx N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad t = \frac{x - x_0}{h}$$

Дифференцируя этот многочлен по переменной x с учетом правила дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dN}{dt},$$

можно получить формулы для вычисления производных любого порядка:

$$y' \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4t^3-18t^2+22t+6}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{5t^4-40t^3+105t^2-100t+24}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots\right)$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{20t^3-120t^2+210t-100}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots\right)$$

Число слагаемых в этих формулах зависит от количества узлов, используемых для вычисления производных. Как и при построении многочлена Ньютона, добавление к шаблону нового узла означает добавление к сумме одного слагаемого.

Интерполяционные многочлены Ньютона дают выражения для производных через разности $\Delta^k y$ *(k = 1,2,...)*. Однако на практике часто выгоднее выражать значения производных не через разности, а непосредственно через значения функции в узлах. Для получения таких формул удобно воспользоваться формулой Лагранжа с равномерным расположением узлов *($x_i - x_{i-1} = h = const$, i = 1, 2,..., n)*.

Запишем интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$ и его остаточный член $R_L(x)$ для случая трех узлов интерполяции *(n = 2)* и найдем их производные:

$$L(x) = \frac{1}{2h^2}\left[(x-x_1)(x-x_2)y_0 - 2(x-x_0)(x-x_2)y_1 + (x-x_0)(x-x_1)y_2\right]$$

$$R_L(x) = \frac{y'''_*}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$L'(x) = \frac{1}{2h^2}\left[(2x-x_1-x_2)y_0 - 2(2x-x_0-x_2)y_1 + (2x-x_0-x_1)y_2\right]$$

$$R'_L(x) = \frac{y'''_*}{3!}\left[(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)\right]$$

Здесь y'''_* — значение производной третьего порядка в некоторой внутренней точке $x_* \in [x_0, x_n]$.

Запишем выражение для производной y'_0 при $x = x_0$:

$$\begin{aligned} y'_0 &= L'(x_0) + R'_L(x_0) = \\ &= \frac{1}{2h^2}\left[(2x_0 - x_1 - x_2)y_0 - 2(2x_0 - x_0 - x_2)y_1 + (2x_0 - x_0 - x_1)y_2\right] + \\ &+ \frac{y'''_*}{3!}\left[(x_0-x_1)(x_0-x_2) + (x_0-x_0)(x_0-x_2) + (x_0-x_0)(x_0-x_1)\right] = \\ &= \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}y'''_*. \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения можно получить и для значений y'_1 и y'_2 при
$x = x_1, x_2$:

$$y'_1 = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0) - \frac{h^2}{6}y'''_*, \qquad y'_2 = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3}y'''_*.$$

3. Метод неопределенных коэффициентов. Аналогичные формулы можно получить и для случая произвольного расположения узлов. Использование многочлена Лагранжа в этом случае приводит к вычислению громоздких выражений, поэтому удобнее применять метод неопределенных коэффициентов. Он заключается в следующем. Искомое выражение для производной *k*-то порядка в некоторой точке $x = x_i$ представляется в виде линейной комбинации заданных значений функции в узлах $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$y_i^k \approx c_0 y_0 + c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \qquad (5.10)$$

Предполагается, что это соотношение выполняется точно, если функция y является многочленом степени не выше п, т. е. может быть представлена в виде

$$y = b_0 + b_1 (x - x_0) + \ldots + b_n (x - x_0)^n$$

Отсюда следует, что соотношение (5.10), в частности, должно выполняться точно для многочленов $y=1$, $y=x - x_0$, ... , $y=(x - x_o)^n$. Подставляя последовательно эти выражения в (5.10) и требуя выполнения точного равенства, получаем систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_n$.

Пример. Найти выражение для производной y_1' в случае четырех равноотстоящих узлов $(n = 3)$.

Приближение (5.10) запишется в виде

$$y_1' \approx c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \qquad (5.11)$$

Используем следующие многочлены:

$$y = 1, \quad y = x - x_0, \quad y = (x - x_0)^2, \quad y = (x - x_0)^3 \qquad (5.12)$$

Вычислим их производные:

$$y' = 0, \quad y' = 1, \quad y' = 2(x - x_0), \quad y' = 3(x - x_0)^2 \qquad (5.13)$$

Подставляем последовательно соотношения (5.12) и (5.13) соответственно в правую и левую части (5.11) при $x=x_1$, требуя выполнения точного равенства:

$$0 = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1$$

$$1 = c_0 (x_0 - x_0) + c_1 (x_1 - x_0) + c_2 (x_2 - x_0) + c_3 (x_3 - x_0)$$

$$2(x_1 - x_0) = c_0 (x_0 - x_0)^2 + c_1 (x_1 - x_0)^2 + c_2 (x_2 - x_0)^2 + c_3 (x_3 - x_0)^2$$

$$3(x_1 - x_0)^2 = c_0 (x_0 - x_0)^3 + c_1 (x_1 - x_0)^3 + c_2 (x_2 - x_0)^3 + c_3 (x_3 - x_0)^3$$

Получаем окончательно систему уравнений в виде

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$hc_1 + 2hc_2 + 3hc_3 = 1$$

$$hc_1 + 4hc_2 + 9hc_3 = 2$$

$$hc_1 + 8hc_2 + 27hc_3 = 3$$

Решая эту систему, получаем

$$c_0 = -\frac{1}{3h}, \quad c_1 = -\frac{1}{2h}, \quad c_2 = \frac{1}{h}, \quad c_3 = -\frac{1}{6h}$$

Подставляя эти значения в (5.11), находим выражение для производной:

$$y_1' \approx \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3)$$

4. Улучшение аппроксимации. Как видно из конечно-разностных соотношений для аппроксимаций производных (см. п. 3), порядок их точности возрастает с увеличением числа узлов, используемых при аппроксимации. Однако при большом числе узлов эти соотношения становятся весьма громоздкими, что приводит к существенному возрастанию объема вычислений. Усложняется также оценка точности получаемых результатов. Вместе с тем существует простой и эффективный способ уточнения решения при фиксированном числе узлов, используемых в аппроксимирующих конечно-разностных соотношениях. Это метод Рунге-Ромберга. Изложим вкратце его сущность.

Пусть $F(x)$ – производная, которая подлежит аппроксимации; $f(x, h)$ – конечно-разностная аппроксимация этой производной на равномерной сетке с шагом h; R – погрешность (остаточный член) аппроксимации, главный член которой можно записать в виде $h^p \varphi(x)$. Подставляя найденное выражение в равенство (3.14), получаем *формулу Рунге*

$$F(x) = f(x, h) + \frac{f(x, h) - f(x, kh)}{k^p - 1} + O(h^{p+1})$$

Эта формула позволяет по результатам двух расчетов значений производной $f(x, h)$ и $f(x, kh)$ (с шагами h и kh) с порядком точности p найти ее уточненное значение с порядком точности $p+1$.

Пример. Вычислить производную функции $y = x^3$ в точке $x=1$. Очевидно, что $y'=3x^2$; поэтому $y'(1)=3$. Найдем теперь эту производную численно. Составим таблицу значений функции:

x	0.8	0.9	1.0
y	0.512	0.729	1.0

Воспользуемся аппроксимацией производной с помощью левых разностей, имеющей первый порядок $(p = 1)$. Примем шаг равным 0.1 и 0.2, т. е. $k = 2$. Получим

$$f(x,h) = y'(1,0.1) = \frac{f(1)-f(0.9)}{0.1} = \frac{1-0.729}{0.1} = 2.71$$

$$f(x,h) = y'(1,0.2) = \frac{f(1)-f(0.8)}{0.2} = \frac{1-0.512}{0.2} = 2.44$$

По формуле Рунге найдем уточненное значение производной:

$$F(x) = y'(1) \approx 2.71 + \frac{2.71-2.44}{2^1-1} = 2.98$$

Раздел 5 Численные методы интегрирования

Тема 5.1. Численные методы интегрирования. Методы прямоугольников, трапеции, Симпсона. Квадратурные формулы Чебышева, Гаусса. Вычисление интеграла с заданной точностью.

1. Вводные замечания. Напомним некоторые понятия, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y=f(x)$. С помощью точек $x_0,x_1,\dots,x_n$ разобьем отрезок $[a,b]$ на n элементарных отрезков $[x_{i-1},x_i]$ ($n = 1, 2,\dots ,n$), причем $x_0=a$, $x_n=b$. На каждом из этих отрезков выберем произвольную точку ξ_i ($x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$) и найдем произведение s_i значения функции в этой точке $f(\xi_i)$ на длину элементарного отрезка $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$:

$$s_i = f(\xi_i)\Delta x_i \tag{6.1}$$

Составим сумму всех таких произведений:

$$S_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{6.2}$$

Сумма Sn называется *интегральной суммой*. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы при таком неограниченном увеличении числа точек разбиения, при котором длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{6.3}$$

Теорема (существования определенного интеграла). *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на элементарные отрезки, ни от выбора точек ξ_i.*

Геометрический смысл введенных понятий для случая $f(x) > 0$ проиллюстрирован на рис. 3.1. Абсциссами точек M_i являются значения ξ_i, ординатами — значения $f(\xi_i)$. Выражения (6.1) при $n = 1, 2,\dots ,n$ описывают площади элементарных прямоугольников (штриховые линии), интегральная сумма (6.2) — площадь ступенчатой фигуры, образуемой этими прямоугольниками. При неограниченном увеличении числа точек деления и стремлении к нулю всех элементов Δx_i верхняя граница фигуры (ломаная) переходит в линию $y = f(x)$. Площадь полученной фигуры, которую называют криволинейной трапецией, равна определенному интегралу (6.3).

Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, определенный интеграл удается вычислить непосредственно с помощью неопределенного интеграла (вернее, первообразной) по формуле Ньютона—Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен приращению первообразной $F(x)$ на отрезке интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (6.4)$$

Однако на практике этой формулой часто нельзя воспользоваться по двум основным причинам:

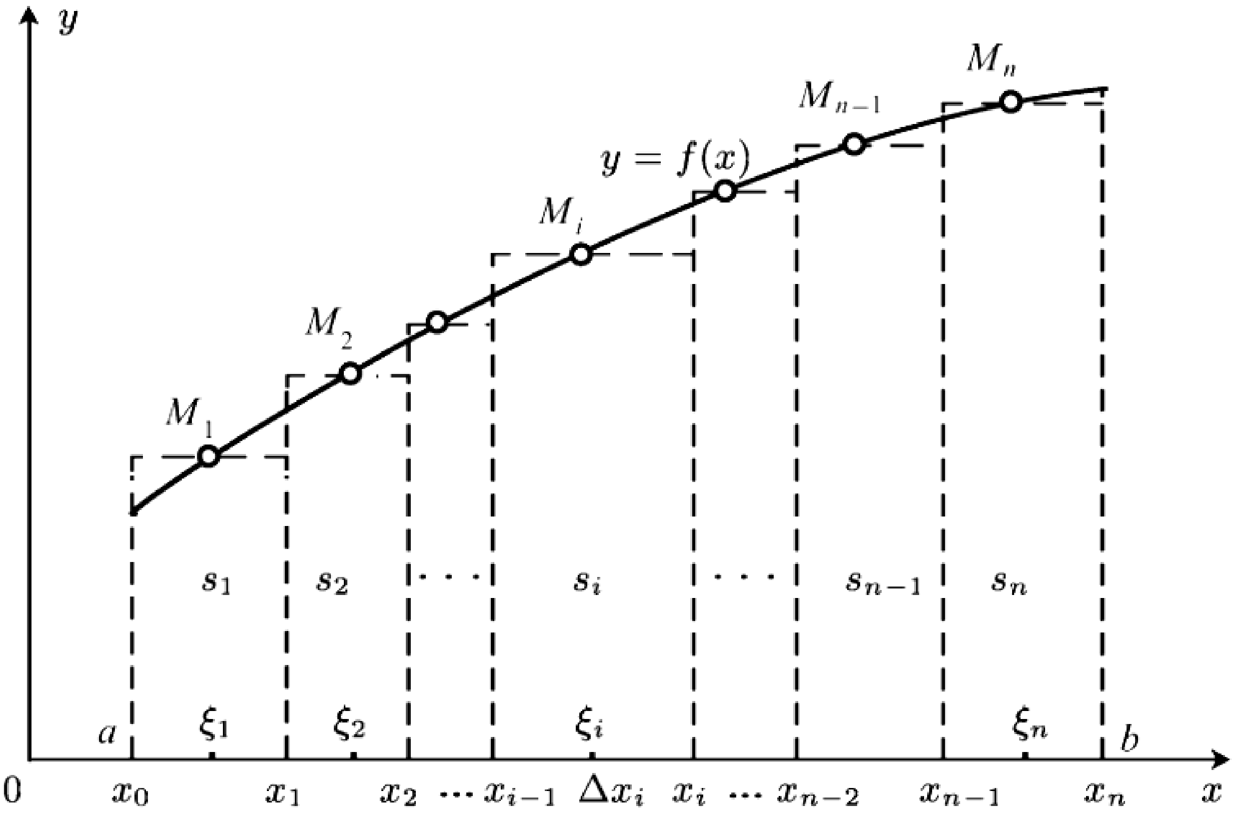


Рис. 6.1 Геометрический смысл

1) вид функции *f(x)* не допускает непосредственного интегрирования, т. е. первообразную нельзя выразить в элементарных функциях;

2) значения функции *f(x)* заданы только на фиксированном конечном множестве точек x_i, т. е. функция задана в виде таблицы.

В этих случаях используются приближенные методы интегрирования. Они основаны на аппроксимации подынтегральной функции некоторыми более простыми выражениями, например многочленами.

Одним из таких способов, который может быть использован для вычисления интегралов в первом случае, является представление подынтегральной функции в виде степенного ряда (ряда Тейлора). Это позволяет свести вычисление интеграла от сложной функции к интегрированию многочлена, представляющего первые несколько членов ряда.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 e^{-x^2}dx$ с погрешностью 10^{-4}. Воспользуемся разложением экспоненты в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Используя последнее выражение и заменяя x на $-x^2$, записываем интеграл в виде

$$I = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \dots\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \dots \approx 0.7468$$

Более универсальными методами, которые пригодны для обоих случаев, являются *методы численного интегрирования*, основанные на аппроксимации подынтегральной функции с помощью интерполяционных многочленов. Такая аппроксимация позволяет приближенно заменить определенный интеграл конечной суммой

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i \qquad (6.5)$$

где y_i — значения функции в узлах интерполяции, α_i — числовые коэффициенты. Соотношение (6.5) называется *квадратурной формулой*, а его правая часть — *квадратурной суммой*. В зависимости от способа ее вычисления получаются разные методы численного интегрирования (квадратурные формулы) — методы прямоугольников, трапеций, парабол, сплайнов и др.

Квадратурную сумму можно вычислить по аналогии с интегральной суммой (6.2)

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$$

где σ_i – приближенное значение площади элементарной криволинейной трапеции, соответствующей элементарному отрезку $[x_{i-1},x_i]$. Например, можно положить $\sigma_i = s_i$ при некотором выборе точки ξ_i в (6.1). В дальнейшем при вычислении квадратурной суммы будем аппроксимировать подынтегральную функцию, используя кусочную (локальную) интерполяцию.

Следует отметить, что к вычислению определенного интеграла сводятся многие практические задачи: вычисление площади фигур, определение работы переменной силы и т. д. Решение задач с использованием кратных интегралов также обычно может быть в конечном итоге сведено к вычислению определенных интегралов.

2. Методы прямоугольников и трапеций. Простейшим методом численного интегрирования является метод прямоугольников. Он непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной суммой (3.20). В качестве точек ξ_i могут выбираться левые ($\xi_i = x_{i-1}$) или правые ($\xi_i = x_i$) границы элементарных отрезков. Обозначая $f(x_i) = y_i$, $\Delta x_i = h_i$, получаем следующие формулы метода прямоугольников соответственно для этих двух случаев:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \ldots + h_n y_{n-1} \qquad (6.6)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \ldots + h_n y_n \qquad (6.7)$$

Широко распространенным и более точным является вид формулы прямоугольников, использующий значения функции в средних точках элементарных отрезков (в полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_{i-1/2}) \qquad (6.8)$$

$$x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2 = x_{i-1} + h_i/2 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

В дальнейшем под методом прямоугольников будем понимать последний алгоритм (он еще называется *методом средних*).

В рассмотренных методах прямоугольников используется *кусочно постоянная* интерполяция: на каждом элементарном отрезке функция $f(x)$ приближается функцией, принимающей постоянные значения (константой). При этом площадь всей фигуры (криволинейной трапеции) приближенно складывается из площадей элементарных прямоугольников. На рис. 6.2 верхняя, средняя и нижняя горизонтальные штриховые линии относятся к элементарным прямоугольникам, которые соответствуют формулам (6.), (3.26) и (3.24).

<u>Метод трапеций</u> использует линейную интерполяцию, т. е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющей точки (x_i,y_i).В этом случае площадь всей фигуры приближенно складывается из площадей элементарных прямолинейных трапеций (рис. 6.2). Площадь каждой такой трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$\sigma_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

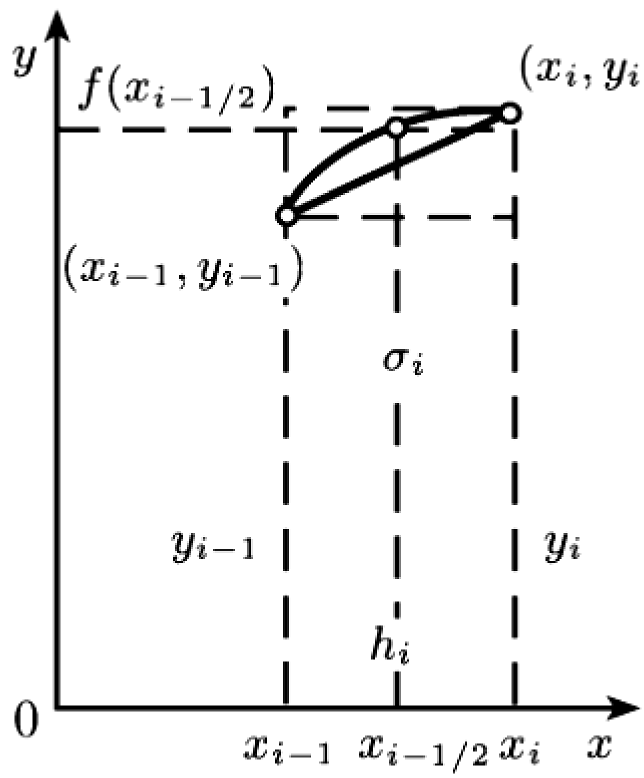


Рис. 6.2. Вычисление в методах прямоугольников и трапеции

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i) \qquad (6.9)$$

Важным частным случаем рассмотренных формул является их применение при численном интегрировании с постоянным шагом $h_i=h=const$ $(i = 1, 2,\dots ,n)$. Формулы прямоугольников и трапеций в этом случае принимают соответственно вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i)$$

3. Метод Симпсона. Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на четное число n равных частей с шагом h. На каждом отрезке $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$,..., $[x_{i-1},x_{i+1}]$,..., $[x_{n-2},x_n]$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменим интерполяционным многочленом второй степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \qquad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$$

Коэффициенты этих квадратных трехчленов могут быть найдены из условий равенства многочлена в точках x_i соответствующим табличным данным y_i. В качестве $\varphi_i(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через точки $M_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1})$, $M_i(x_i,y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1})$:

$$\varphi_i(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} y_{i+1}$$

Сумма элементарных площадей σ_i и σ_{i+1} (рис. 3.3) может быть вычислена с помощью определенного интеграла. Учитывая равенства $x_{i+1}-x_i=x_i-x_{i-1}=h$, получаем.

$$\sigma_i + \sigma_{i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \frac{1}{2h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[(x - x_i)(x - x_{i+1})y_{i-1} - (x - x_{i-1})(x - x_{i+1})y_{i-1} + (x - x_{i-1})(x - x_i)y_{i+1}\right]dx =$$

$$= \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$$

Проведя такие вычисления для каждого элементарного отреза $[x_{i-1},x_{i+1}]$ просуммируем полученные выражения:

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Данное выражение для S принимается в качестве значения определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right) + y_n\right] \qquad (6.10)$$

4. О других методах. Кроме рассмотренных выше методов численного интегрирования существует ряд других. Дадим краткий обзор некоторых из них.

Интегрирование с использованием сплайнов. Одним из методов численного интегрирования, особенно эффективным при строго ограниченном числе узлов, является метод сплайнов, использующий интерполяцию сплайнами.

Формулы Ньютона - Котеса получаются путем замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа с разбиением отрезка интегрирования на *n* равных частей. Получающиеся формулы используют значения подынтегральной функции в узлах интерполяции и являются точными для всех многочленов некоторой степени зависящей от числа узлов. Точность формул растет с увеличением степени интерполяционного многочлена.

Метод Гаусса не предполагает разбиения отрезка интегрирования на равные промежутки. Формулы численного интегрирования интерполяционного типа ищутся такими, чтобы они обладали наивысшим порядком точности при заданном числе узлов. Узлы и коэффициенты формул численного интегрирования находятся из условий обращения в нуль их остаточных членов для всех многочленов максимально высокой степени.

Формула Эрмита, являющаяся частным случаем формул Гаусса, использует многочлены Чебышева для вычисления интегралов вида

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Метод Маркова состоит в том, что при выводе формул Гаусса вводятся дополнительные предположения о совпадении точек разбиения отрезка по крайней мере с одним из его концов.

Формула Эйлера использует не только значения подынтегральной функции в точках разбиения, но и значения ее производных до некоторого порядка на границах отрезка.

<u>5. Рассмотрим особые случаи</u> численного интегрирования.

а) подынтегральная функция разрывна на отрезке интегрирования;

б) несобственные интегралы.

а) В ряде случаев подынтегральная функция *f(x)* или ее производные в некоторых внутренних точках c_k (*k = 1,2,...*) отрезка интегрирования [*a,b*] терпят разрыв. В этом случае интеграл вычисляют численно для каждого участка непрерывности и результаты складывают. Например, в случае одной точки разрыва *x=c (a<c<b*) имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Для вычисления каждого из стоящих в правой части интегралов можно использовать рассмотренные выше методы.

б) Не так просто обстоит дело с вычислением несобственных интегралов. Напомним, что к такому типу относятся интегралы, которые имеют хотя бы одну бесконечную границу интегрирования или подынтегральную функцию, обращающуюся в бесконечность хотя бы в одной точке отрезка интегрирования.

Рассмотрим сначала интеграл с бесконечной границей интегрирования, например интеграл вида

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Существует несколько приемов вычисления таких интегралов.

Можно попытаться ввести замену переменных $x=a/(1-t)$, которая превращает промежуток интегрирования $[0,+\infty)$ в отрезок $[0,1]$. При этом подынтегральная функция и первые ее производные до некоторого порядка должны оставаться ограниченными.

Еще один прием состоит в том, что бесконечная граница заменяется некоторым достаточно большим числом A так, чтобы принятое значение интеграла отличалось от исходного на некоторый малый остаток, т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{A} f(x)\,dx + R, \qquad R = \int_A^{+\infty} f(x)\,dx$$

6. Кратные интегралы. Численные методы используются также для вычисления кратных интегралов. Ограничимся здесь рассмотрением двойных интегралов вида

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy \tag{6.11}$$

Одним из простейших способов вычисления этого интеграла является метод ячеек. Рассмотрим сначала случай, когда областью интегрирования G является прямоугольник: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. По теореме о среднем найдем среднее значение функции $f(x,y)$:

$$\bar{f}(x,y) = \frac{1}{S}\iint_G f(x,y)\,dxdy, \qquad S = (b-a)(d-c) \tag{6.12}$$

Будем считать, что среднее значение приближенно равно значению функции в центре прямоугольника, т.е. $\bar{f}(x,y) = f(\bar{x},\bar{y})$. Тогда из (6.12) получим выражение для приближенного вычисления двойного интеграла:

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy \approx Sf(\bar{x},\bar{y}), \qquad \bar{x} = \frac{a+b}{2},\ \ \bar{y} = \frac{c+d}{2} \tag{6.13}$$

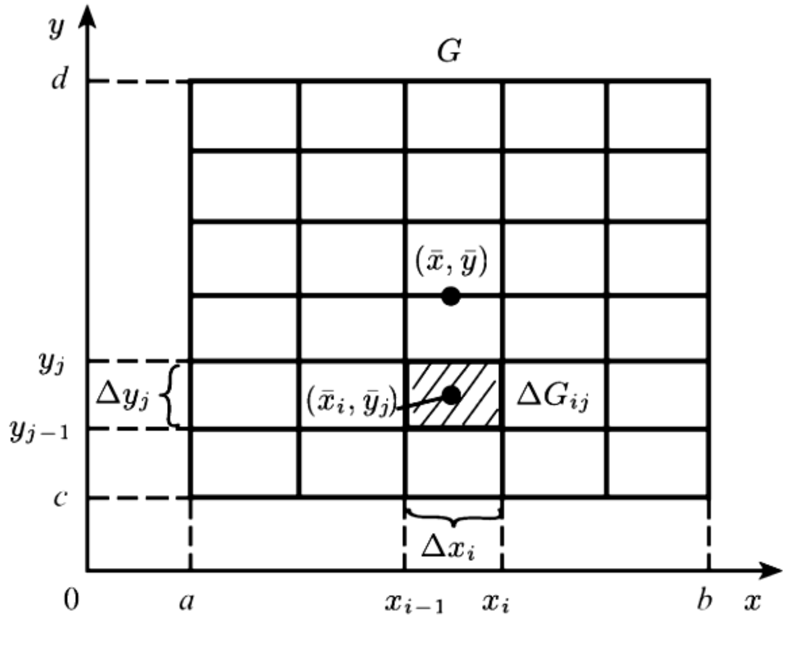
Точность этой формулы можно повысить, если разбить область G на прямоугольные ячейки ΔG_{ij} (рис. 3.5): $x_{i-1} \le x \le x_i$ $(i = 1, 2,..., M)$, $y_{i-1} \le y \le y_i$ $(j = 1, 2,..., N)$. Применяя к каждой ячейке формулу (3.53), получаем

$$\iint_{\Delta G_{ij}} f(x,y)\,dxdy \approx f(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\,\Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

Суммируя эти выражения по всем ячейкам, находим значение двойного интеграла:

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy \approx \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} f(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\,\Delta x_i \cdot \Delta y_j \tag{6.14}$$

В правой части стоит интегральная сумма; поэтому при неограниченном уменьшении периметров ячеек (или стягивании их в точки) эта сумма стремится к значению интеграла для любой непрерывной функции $f(x,y)$.



Если область *G* непрямоугольная, то в ряде случаев ее целесообразно привести к прямоугольному виду путем соответствующей замены переменных. Например, пусть область задана в виде криволинейного четырехугольника: $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le x \le \varphi_2(x)$. Данную область можно привести к прямоугольному виду с помощью замены

$$t = \frac{y - \varphi_1(x)}{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}, \qquad 0 \le t \le 1$$

Кроме того, формула (6.14) может быть обобщена и на случай более сложных областей.

Другим довольно распространенным методом вычисления кратных интегралов является их сведение к последовательному вычислению определенных интегралов. Интеграл (6.11) для прямоугольной области можно записать в виде

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx, \qquad F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

Для вычисления обоих определенных интегралов могут быть использованы рассмотренные ранее численные методы.

Если область *G* имеет более сложную структуру, то она либо приводится к прямоугольному виду с помощью замены переменных, либо разбивается на простые элементы.

Для вычисления кратных интегралов используется также *метод замены подынтегральной функции многомерным интерполяционным многочленом*. Вычисление коэффициентов этих многочленов для простых областей обычно не вызывает затруднений.

Существует ряд других численных методов вычисления кратных интегралов. Среди них особое место занимает метод статистических испытаний, который мы вкратце изложим.

7. Метод Монте-Карло. Во многих задачах исходные данные носят случайный характер, поэтому для их решения должен применяться статистико-вероятностный подход. На основе таких подходов построен ряд численных методов, которые учитывают случайный характер вычисляемых или измеряемых величин, К ним принадлежит и *метод статистических испытаний*, называемый также *методом Монте-Карло* который применяется к решению некоторых задач вычислительной математики, в том числе и для вычисления интегралов.

Раздел 6 Численное решение дифференциальных уравнени й

Тема 6.1.. Метод Эйлера, Рунге-Кутта, Адамса.

Лекция проводится в интерактивной форме в виде лекции-презентации (3 часа).

Многие задачи науки и техники сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). ОДУ называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции. В общем виде ОДУ можно записать следующим образом:
$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где x – независимая переменная, $y^{(i)}$ - i-ая производная от искомой функции. n - порядок уравнения. Общее решение ОДУ n–го порядка содержит n произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_n$, т.е. общее решение имеет вид $y = \varphi(x, c_1, \ldots, c_n)$.
Для выделения единственного решения необходимо задать n дополнительных условий. В зависимости от способа задания дополнительных условий существуют два различных типа задач: задача Коши и краевая задача. Если дополнительные условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задаче Коши называются начальными условиями. Если же дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т.е. при различных значениях независимой переменной, то такая задача называется краевой. Сами дополнительные условия называются краевыми или граничными.
Ясно, что при n=1 можно говорить только о задачи Коши.

Примеры постановки задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = x^2y^3, \quad y(1) = 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + xy^2, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 0$$

Примеры краевых задач:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - y = \sin(x), \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x + x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 0,\ y(3) = 2$$

Решить такие задачи аналитически удается лишь для некоторых специальных типов уравнений.

Численные методы решения задачи Коши для ОДУ первого порядка

Постановка задачи. Найти решение ОДУ первого порядка

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ при условии $y(x_0) = y_0$

При нахождении приближенного решения будем считать, что вычисления проводятся с расчетным шагом $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, расчетными узлами служат точки $x_i = x_0 + ih,\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ промежутка $[x_0, x_n]$.

Целью является построение таблицы

x_i	x_0	x_1	…	x_n
y_i	y_0	y_1	…	y_n

т.е. ищутся приближенные значения y в узлах сетки.

Интегрируя уравнение на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, получим

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx$$

Вполне естественным (но не единственным) путем получения численного решения является замена в нем интеграла какой–либо квадратурной формулой численного интегрирования. Если воспользоваться простейшей формулой левых прямоугольников первого порядка

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx = hf(x_i, y_i),$$

то получим **явную формулу Эйлера**:

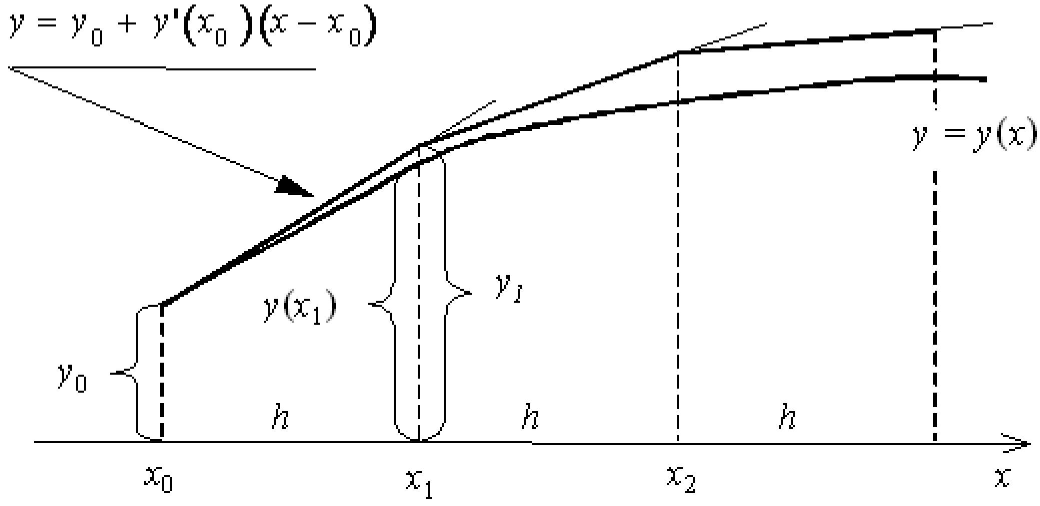
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Порядок расчетов:

Зная $x_0, y_0, f(x_0, y_0)$, находим $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, затем $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ т.д.

Геометрическая интерпретация метода Эйлера:

Пользуясь тем, что в точке x_0 известно решение $y(x_0) = y_0$ и значение его производной $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, можно записать уравнение касательной к графику искомой функции $y = y(x)$ в точке (x_0, y_0): $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$. При достаточно малом шаге h ордината $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ этой касательной, полученная подстановкой в правую часть значения $x_1 = x_0 + h$, должна мало отличаться от ординаты $y(x_1)$ решения $y(x)$ задачи Коши. Следовательно, точка $(x_1; y_1)$ пересечения касательной с прямой $x = x_1$ может быть приближенно принята за новую начальную точку. Через эту точку снова проведем прямую $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$, которая приближенно отражает поведение касательной к $y = y(x)$ в точке $(x_1; y(x_1))$. Подставляя сюда $x_2 = x_1 + h$ (т.е. пересечение с прямой $x = x_2$), получим приближенное значение $y(x)$ в точке x_2: $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ и т.д. В итоге для i–й точки получим формулу Эйлера.



Явный метод Эйлера имеет первый порядок точности или аппроксимации.

Если использовать формулу правых прямоугольников: $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx = hf(x_{i+1}, y_{i+1})$, то придем к методу

$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Этот метод называют **неявным методом Эйлера**, поскольку для вычисления неизвестного значения $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ по известному значению $y_i \approx y(x_i)$ требуется решать уравнение, в общем случае нелинейное.

Неявный метод Эйлера имеет первый порядок точности или аппроксимации.

Модифицированный метод Эйлера: в данном методе вычисление y_{i+1} состоит из двух этапов:

$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right]$

Данная схема называется еще методом предиктор – корректор (предсказывающее – исправляющее). На первом этапе приближенное значение предсказывается с невысокой точностью (h), а на втором этапе это предсказание исправляется, так что результирующее значение имеет второй порядок точности.

Методы Рунге – Кутта: идея построения явных методов Рунге–Кутты p–го порядка заключается в получении приближений к значениям $y(x_{i+1})$ по формуле вида

$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h)$,

где

$\varphi(x_i, y_i, h) = \sum\limits_{n=1}^{q} c_n k_n^i(h)$

$k_1^i(h) = f(x_i, y_i)$

$k_2^i(h) = f\left(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} k_1^i(h)\right)$

$k_3^i(h) = f\left(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31} k_1^i(h) + \beta_{32} k_2^i(h)\right)$

………………………………………………

$k_q^i(h) = f\left(x_i + \alpha_q h, y_i + \beta_{q1} k_1^i(h) + \ldots + \beta_{q,q-1} k_{q-1}^i(h)\right)$.

Здесь a_n, b_{nj}, p_n, $0 < j < n \le q$ – некоторые фиксированные числа (параметры).

При построения методов Рунге–Кутты параметры функции $\varphi(x_i, y_i, h)$ (a_n, b_{nj}, p_n) подбирают таким образом, чтобы получить нужный порядок аппроксимации.

Схема Рунге – Кутта четвертого порядка точности:

$$k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2), k_3 = f(x_x + h/2, y_i + hk_2/2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0,1,2,...$$

Пример. Решить задачу Коши:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x^2 + y), \quad y(0) = 1 \text{ на отрезке } [0,1] \text{ с шагом } h = 0.1$$

.

Рассмотреть три метода: явный метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера, метод Рунге – Кутта.

Точное решение: $y(x) = 1.5e^{2x} - x^2 - x - 0.5$

Расчетные формулы по явному методу Эйлера для данного примера:

$$y_0 = 1, \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot 2 \cdot (x_i^2 + y_i), \quad x_i = i \cdot h, i = 0,...10$$

Расчетные формулы модифицированного метода Эйлера:

$$y_0 = 1,$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot 2 \cdot (x_i^2 + y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[2 \cdot (x_i^2 + y_i) + 2 \cdot (x_{i+1}^2 + \tilde{y}_{i+1})\right], x_i = i \cdot h, i = 0,..,10$$

Расчетные формулы метода Рунге – Кутта:

$$y_0 = 1, \quad k_1 = 2 \cdot (x_i^2 + y_i), k_2 = 2 \cdot ((x_i + h/2)^2 + y_i + hk_1/2),$$

$$k_3 = 2 \cdot ((x_i + h/2)^2 + y_i + hk_2/2), \quad k_4 = 2 \cdot ((x_i + h)^2 + y_i + hk_2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0,1,2,...$$

$$x_i = ih$$

x	y1	y2	y3	точное
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.2000	1.2210	1.2221	1.2221
0.2	1.4420	1.4923	1.4977	1.4977
0.3	1.7384	1.8284	1.8432	1.8432
0.4	2.1041	2.2466	2.2783	2.2783
0.5	2.5569	2.7680	2.8274	2.8274
0.6	3.1183	3.4176	3.5201	3.5202
0.7	3.8139	4.2257	4.3927	4.3928
0.8	4.6747	5.2288	5.4894	5.4895
0.9	5.7377	6.4704	6.8643	6.8645
1	7.0472	8.0032	8.5834	8.5836

y1 – метод Эйлера, y2 – модифицированный метод Эйлера, y3 – метод Рунге Кутта.

Видно, что самым точным является метод Рунге – Кутта.

Численные методы решения систем ОДУ первого порядка
Рассмотренные методы могут быть использованы также для решения систем дифференциальных уравнений первого порядка.
Покажем это для случая системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y,z)$$

$$\frac{dz}{dx}=\psi(x,y,z)$$

$$y(x_o)=y_0,\ z(x_0)=z_0$$

Явный метод Эйлера:

$$y_{i+1}=y_i+h\varphi(x_i,y_i,z_i)$$

$$z_{i+1}=z_i+h\psi(x_i,y_i,z_i)$$

Модифицированный метод Эйлера:

$$\tilde{y}_{i+1}=y_i+h\varphi(x_i,y_i,z_i)$$

$$\tilde{z}_{i+1}=z_i+h\psi(x_i,y_i,z_i)$$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left(\varphi(x_i,y_i,z_i)+\varphi(x_{i+1},\tilde{y}_{i+1},\tilde{z}_{i+1})\right)$$

$$z_{i+1}=z_i+\frac{h}{2}\left(\psi(x_i,y_i,z_i)+\psi(x_{i+1},\tilde{y}_{i+1},\tilde{z}_{i+1})\right)$$

Схема Рунге – Кутта четвертого порядка точности:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

$$z_{i+1}=z_i+\frac{h}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4)$$

$$k_1=\varphi(x_i,y_i,z_i),\ l_1=\psi(x_i,y_i,z_i)$$

$$k_2=\varphi(x_i+h/2,y_i+hk_1/2,z_i+hl_1/2),\ l_2=\psi(x_i+h/2,y_i+hk_1/2,z_i+hl_1/2),$$

$$k_3=\varphi(x_i+h/2,y_i+hk_2/2,z_i+hl_2/2),\ l_3=\psi(x_i+h/2,y_i+hk_2/2,z_i+hl_2/2),$$

$$k_4=\varphi(x_i+h,y_i+hk_3,z_i+hl_3),\ l_4=\psi(x_i+h,y_i+hk_3,z_i+hl_3)$$

К решению систем уравнений ОДУ сводятся также задачи Коши для уравнений высших порядков. Например, рассмотрим **задачу Коши для уравнения второго порядка**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right),\ y(x_0)=y_0,\ \frac{dy}{dx}(x_0)=z_0$$

Введем вторую неизвестную функцию $z(x)=\frac{dy}{dx}$. Тогда задача Коши заменяется следующей:

$$\frac{dy}{dx}=z,$$

$$\frac{dz}{dx}=f(x,y,z),\ y(x_0)=y_0,\ z(x_0)=z_0$$

Т.е. в терминах предыдущей задачи: $\varphi(x,y,z)=z,\ \psi(x,y,z)=f(x,y,z)$.

Пример. Найти решение задачи Коши:

$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y(x)=x,\ y(0)=1,\frac{dy}{dx}(0)=0$ на отрезке [0,1].

Точное решение: $y(x)=3e^{-x}+2xe^{-x}+x-2$

Действительно:

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x} - 2xe^{-x} + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^{-x} + 2xe^{-x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y(x) = -e^{-x} + 2xe^{-x} + 2\left(-e^{-x} - 2xe^{-x} + 1\right) + 3e^{-x} + 2xe^{-x} + x - 2 = x$$

$$y(0) = 1,\ \frac{dy}{dx}(0) = 0$$

Решим задачу явным методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и Рунге – Кутта с шагом h=0.2.

Введем функцию $z(x) = \frac{dy}{dx}$.

Тогда получим следующую задачу Коши для системы двух ОДУ первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = z,$$

$$\frac{dz}{dx} = -2z - y + x,\quad y(0) = 1, z(0) = 0$$

Явный метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hz_i$$

$$z_{i+1} = z_i + h(-2z_i - y_i + x_i),\ y_0 = 1,\ z_0 = 0$$

Модифицированный метод Эйлера:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hz_i$$

$$\tilde{z}_{i+1} = z_i + h(-2z_i - y_i + x_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(z_i + \tilde{z}_i\right)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}\left((-2z_i - y_i + x_i) + (-2\tilde{z}_i - \tilde{y}_i + x_{i+1})\right),\ x_{i+1} = x_i + h$$

Метод Рунге – Кутта:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}\left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right)$$

$$k_1 = z_i,\ l_1 = (-2z_i - y_i + x_i),$$

$$k_2 = z_i + hl_1/2,\ l_2 = (-2(z_i + hl_1/2) - (y_i + hk_1/2) + x_i + h/2),$$

$$k_3 = z_i + hl_2/2,\ l_3 = (-2(z_i + hl_2/2) - (y_i + hk_2/2) + x_i + h/2),$$

$$k_4 = z_i + hl_3,\ l_4 = (-2(z_i + hl_3) - (y_i + hk_3) + x_i + h)$$

Схема Эйлера:

X	y	z	y теор	z теор	y-y теор
0	1	0	1	0	0
0.2	1	-0.2	0.983685	-0.14622	0.016315
0.4	0.96	-0.28	0.947216	-0.20658	0.012784
0.6	0.904	-0.28	0.905009	-0.20739	0.001009
0.8	0.848	-0.2288	0.866913	-0.16826	0.018913
1	0.80224	-0.14688	0.839397	-0.10364	0.037157

Модифицированный метод Эйлера:

X	ycv	zcv	y	z	y теор	z теор	y-y теор
0	1	0	1	0	1	0	0
0.2	1	-0.2	1	-0.18	0.983685	-0.14622	0.016315
0.4	0.96	-0.28	0.962	-0.244	0.947216	-0.20658	0.014784
0.6	0.904	-0.28	0.9096	-0.2314	0.905009	-0.20739	0.004591
0.8	0.848	-0.2288	0.85846	-0.17048	0.866913	-0.16826	0.008453
1	0.80224	-0.14688	0.818532	-0.08127	0.839397	-0.10364	0.020865

Схема Рунге - Кутта:

x	Y	z	k1	l1	k2	l2	k3	l3	k4	l4
0	1	0	0	-1	-0.1	-0.7	-0.07	-0.75	-0.15	-0.486
0.2	0.983667	-0.1462	-0.1462	-0.49127	-0.19533	-0.27839	-0.17404	-0.31606	-0.20941	-0.13004
0.4	0.947189	-0.20654	-0.20654	-0.13411	-0.21995	0.013367	-0.2052	-0.01479	-0.2095	0.112847
0.6	0.904977	-0.20734	-0.20734	0.10971	-0.19637	0.208502	-0.18649	0.187647	-0.16981	0.27195
0.8	0.866881	-0.16821	-0.16821	0.269542	-0.14126	0.332455	-0.13497	0.317177	-0.10478	0.369665
1	0.839366	-0.1036	-0.1036	0.367825	-0.06681	0.40462	-0.06313	0.393583	-0.02488	0.423019

Max(y-y теор)=$4*10^{-5}$

Метод конечных разностей решения краевых задач для ОДУ

Постановка задачи: найти решение линейного дифференциального уравнения

$u'' + q(x)u' - e(x)u = z(x),\ x \in [a,b]$, (1)

удовлетворяющего краевым условиям: $u(a) = \varphi,\ u(b) = \psi$. (2)

Теорема. Пусть $q(x), e(x), z(x) \in C_2[a,b];\ e(x) \geq 0$. Тогда существует единственное решение поставленной задачи.

К данной задаче сводится, например, задача об определении прогибов балки, которая на концах опирается шарнирно.

Основные этапы метода конечных разностей:

1) область непрерывного изменения аргумента ([a,b]) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами: $x_i = a + hi,\ i = 0,..,n,\ n = (b-a)/h$.

2) Искомая функция непрерывного аргумента x, приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке, т.е. $u(x) \rightarrow u_h = (u_0, \dots, u_n)$. Функция u_h называется сеточной.

3) Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. Такая замена называется разностной аппроксимацией.

Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки, которые находятся из решения алгебраических уравнений.

4.3. Лабораторные работы

№ п/п	*Номер раздела дисциплины*	*Наименование лабораторных работ*	*Объем в часах*	*Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)*
1	**1.**	Знакомство с пакетами программ Matlab, Mathcad. Основные возможности.	2	-
2	**1.**	Нахождение определителей, миноров матриц. Решение систем линейных уравнений	2	Дискуссия (2 часа)
3	**2.**	Решение нелинейных уравнений	4	Дискуссия (4 часа)
4	**2.**	Решение систем нелинейных уравнений	4	Дискуссия (4 часа)
5	**3.**	Методы интерполирования. Нахождение интерполяционных функции: линейной, квадратичной, многочлен Лагранжа	4	-
6	**3.**	Аппроксимация функции. Метод наименьших квадратов, метод разностей.	4	-
7	**4.**	Дифференцирование функции	4	-
8	**5.**	Численное интегрирование. Метод прямоугольников, метод трапеции, интегрирование с использованием сплайн - функций	4	-
9	**6.**	Решение дифференциальных уравнений	6	-
		ИТОГО	**34**	**10**

4.4. Практические занятия

Учебным планом не предусмотрены

4.5. Контрольные мероприятия: курсовой проект (курсовая работа), контрольная работа, РГР, реферат.

Учебным планом не предусмотрены

МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫМ, ОБЩЕКУЛЬТУРНЫМ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Компетенции / ***Разделы дисциплины***	***Кол-во часов***	***Компетенции***			***Σ комп.***	***tср, час***	***Вид учебной работы***	***Оценка результатов***
		ОПК	***ПК***					
		4	***2***	***12***				
1	**2**	**3**	**6**	**7**	**11**	**12**	**13**	**14**
1. Задачи линейной алгебры.	14	+	+	+	3	4,6	Лк, ЛР, СРС	Зачет
2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.	22	+	+	+	3	7,3	Лк, ЛР, СРС	Зачет
3. Аппроксимация функции.	22	+	+	+	3	7,3	Лк, ЛР, СРС	Зачет
4. Численные методы дифференцирования.	16	+	+	+	3	5,3	Лк, ЛР, СРС	Зачет
5. Численные методы интегрирования.	16	+	+	+	3	5,3	Лк, ЛР, СРС	Зачет
6. Численное решение дифференциальных уравнений.	18	+	+	+	3	6	Лк, ЛР, СРС	Зачет
всего часов	**108**	**35,8**	**35,8**	**35,8**	**3**	**36**		

6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Исаков, В.Н. Элементы численных методов : учебное пособие / В. Н. Исаков. - Москва : Академия, 2003. - 188 с.. с. 45 – 134.

7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№	*Наименование издания*	*Вид занятия* (*Лк, ЛР*)	*Количество экземпляров в библиотеке,* **шт.**	*Обеспеченность,* **(экз./ чел.)**
1	2	3	4	5
	Основная литература			
1.	Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Геврасева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.	Лк, ЛР	16	1,0
2.	Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#	Лк, ЛР	ЭР	1,0
3.	Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на базе MatLab/Simulink : учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск : НГТУ, 2015. - 48 с http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455	Лк, ЛР	ЭР	1,0
	Дополнительная литература			
2.	Исаков, В.Н. Элементы численных методов : учебное пособие / В. Н. Исаков. - Москва : Академия, 2003. - 188 с.	Лк	30	1,0
3.	Мартынов, Н.Н. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.	Лк, ЛР	50	1,0
4.	Кудрявцев, Е.М. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.	Лк, ЛР	16	1,0
5.	Кудрявцев, Е.М. Начальное знакомство с компьютерными системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.	Лк, ЛР	25	1,0
6.	Методические указания к лабораторным работам по математической статистике с применением ЭВМ. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001, 66 с. http://window.edu.ru/resource/932/23932	СР	ЭР	1,0
7.	Вычислительные методы линейной алгебры: лабораторный практикум в системе MATLAB. – Пенза: ПГУ, 2010. – 93 с. http://window.edu.ru/resource/657/72657	СР	ЭР	1,0

8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО – ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.Электронный каталог библиотеки БрГУ http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r_15/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=
2. Электронная библиотека БрГУ http://ecat.brstu.ru/catalog .
3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru .
4. Электронно-библиотечная система «Издательство «Лань» http://e.lanbook.com .
5. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" http://window.edu.ru .
6. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU http://elibrary.ru .
7. Университетская информационная система РОССИЯ (УИС РОССИЯ) https://uisrussia.msu.ru/ .
8. Национальная электронная библиотека НЭБ http://xn--90ax2c.xn--p1ai/how-to-search /.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучение обучающимися учебной дисциплины рассчитано на один семестр.

Занятия лекционного типа

В ходе лекций преподаватель излагает и разъясняет основные, наиболее сложные понятия темы, а также связанные с ней теоретические и практические проблемы, дает рекомендации на выполнение самостоятельной работы. В ходе лекций обучающимся рекомендуется:

- вести конспектирование учебного материала;
- обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации по их применению;
- задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В рабочих конспектах желательно оставлять поля, на которых во внеаудиторное время можно сделать пометки из учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся, дополняющего материал прослушанной лекции, а также пометки, подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Для успешного овладения курсом необходимо посещать все лекции, так как тематически отдельные темы курса взаимосвязаны между собой. В случаях пропуска занятия обучающемуся необходимо самостоятельно изучить материал и ответить на контрольные вопросы по пропущенной теме во время индивидуальных консультаций.

Лабораторные работы

При подготовке к лабораторным работам обучающийся подготавливает заготовку отчета, выполняя конспект теоретического материала по методической литературе с учетом рекомендаций преподавателя.

Перед выполнением лабораторных работ следует изучить теоретическую часть методических указаний к данной лабораторной работе, на основании чего получить допуск к ее выполнению. Во время лабораторных работ выполнять учебные задания с максимальной степенью активности. Выполнение лабораторных работ заканчивается составлением отчета с выводами, характеризующими полученный результат и защитой работы перед преподавателем.

Зашита отчета по лабораторной работе заключается в предъявлении преподавателю полученных результатов в виде файлов и напечатанного отчета и демонстрации полученных навыков в ответах на вопросы преподавателя. При сдаче отчета преподаватель может сделать устные и письменные замечания, задать дополнительные вопросы, попросить выполнить отдельные задания, часть работы или всю работу целиком. Лабораторная работа считается полностью выполненной после ее защиты. После приема преподавателем отчет хранится на кафедре воспроизводства и переработки лесных ресурсов и обучающемуся не выдается.

Отчет по лабораторной работе должен быть оформлен на основании СТП и состоять из следующих структурных элементов:

1. титульный лист;
2. цель работы;
3. описание задачи
4. Теоретическая часть.
5. Практическая часть.
6. анализ результатов работы;
7. выводы.

Объем отчета должен быть оптимальным для понимания того, что и как сделал студент, выполняя работу. Обязательные требования к отчету включают общую и специальную грамотность изложения, а также аккуратность оформления. Незачем копировать целиком или частично методическое пособие (описание) лабораторной работы или разделы учебника. На основе обобщения выполненных работ, представленных в практической части, в выводах кратко излагаются результаты работы. Выводы по работе каждый студент делает самостоятельно. Выводы не должны быть простым перечислением того, что сделано. Здесь важно отметить, к чему привело обсуждение результатов, насколько выполнена заявленная цель работы, что нового узнал обучающийся при выполнении работы. В выводах также отмечаются все недоработки, по какой-либо причине имеющие место, предложения и рекомендации по дальнейшему исследованию поставленной в работе проблемы и т. п. Возможно, получены дополнительные формулы, данные, предложены оригинальные методики, - это должно быть отражено в выводах.

Самостоятельная работа. Подготовка к занятиям лекционного и семинарского типа

Важной частью самостоятельной работы является умение выделить основополагающие, отправные точки в понимании материала. Особо важную роль в этом процессе необходимо уделить конспекту лекций, в котором преподаватель сформировал «скелет», структуру раздела дисциплины. Чтением учебной и научной литературы обучающийся углубляет и расширяет знания о предмете изучения. Основная функция учебников – ориентировать студента в системе знаний, умений и навыков, которые должны быть усвоены будущими специалистами по данной дисциплине. Подготовка к занятиям лекционного типа подразумевает приобретение обучающимся первичных знаний по теме лекции для подготовки к структуризации объекта изучения, которую преподаватель выполняет на лекции. Изучение материала по теме лекции имеет цель уточнения отдельных моментов. Перед практическим занятием следует изучить конспект лекции и рекомендованную преподавателем литературу, обращая внимание на практическое применение теории и на методику решения типовых задач. Перед лабораторной работой обучающийся подготавливает заготовку отчета, выполняя конспект теоретического материала по методической литературе с учетом рекомендаций преподавателя.

Самостоятельная работа. Подготовка к зачету

Подготовка к зачету предполагает:

- изучение основной и дополнительной литературы;
- изучение конспектов лекций;
- изучение конспектов практических занятий и отчетов по ним;

Перечень вопросов к зачету представлен в приложении 2 п. 2. Баллы за зачет выставляются по критериям, представленным в приложении 2 п. 3.

9.1. Методические указания для обучающихся по лабораторных работ

Лабораторная работа №1

Знакомство с пакетами программ Matlab, Mathcad. Основные возможности.

Цель работы: знакомство с пакетами программ Matlab, Mathcad.

Задание: изучить программы Matlab, Mathcad

Порядок выполнения работы
1. Изучить теоретический материал
2. Разработать решение в программе
3. Сделать выводы

Контрольные вопросы для самопроверки

Matlab. Функционал

Основные возможности программных продуктов

Основная литература

1. Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Геврасева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.
2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#
3. Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на базе MatLab/Simulink : учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск : НГТУ, 2015. - 48 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455

Дополнительная литература

1. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.
2. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.
3. Начальное знакомство с компьютерным системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.

Лабораторная работа №2

Нахождение определителей, миноров матриц. Решение систем линейных уравнений

Цель работы: нахождение определителей, миноров матриц. Решение систем линейных уравнений

Задание: изучить программы Matlab, Mathcad

Порядок выполнения работы
1. Изучить теоретический материал
2. Разработать решение в программе
3. Сделать выводы

Контрольные вопросы для самопроверки

Matlab. Функционал

Основные возможности программных продуктов

Основная литература

1. Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Геврасева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.
2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#
3. Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на базе MatLab/Simulink : учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск : НГТУ, 2015. - 48 с.http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455

Дополнительная литература

1. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.
2. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.
3. Начальное знакомство с компьютерным системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.

Лабораторная работа №3

Решение нелинейных уравнений

Цель работы: Решение нелинейных уравнений

Задание: изучить программы Matlab, Mathcad

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретический материал
2. Разработать решение в программе
3. Сделать выводы

Контрольные вопросы для самопроверки

Matlab. Функционал

Основные возможности программных продуктов

Основная литература

1. Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Геврасева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.
2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#
3. Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на б MatLab/Simulink : учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образовани науки Российской Федерации, Новосибирский государственный технический университет Новосибирск : НГТУ, 2015. - 48 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455

Дополнительная литература

1. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.
2. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.
3. Начальное знакомство с компьютерным системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.

Лабораторная работа №4

Решение систем нелинейных уравнений

Цель работы: Решение систем нелинейных уравнений

Задание: изучить программы Matlab, Mathcad

Порядок выполнения работы
1. Изучить теоретический материал
2. Разработать решение в программе
3. Сделать выводы

Контрольные вопросы для самопроверки

Matlab. Функционал

Основные возможности программных продуктов

Основная литература

1. Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Геврасева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.
2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#
3. Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на базе MatLab/Simul учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образования и науки Россий Федерации, Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск : НГТУ, 20 48 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455

Дополнительная литература

1. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.
2. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.
3. Начальное знакомство с компьютерным системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.

Лабораторная работа №5

Решение систем нелинейных уравнений

Цель работы: Решение систем нелинейных уравнений

Задание: изучить программы Matlab, Mathcad

Порядок выполнения работы
1. Изучить теоретический материал

2. Разработать решение в программе
3. Сделать выводы

Контрольные вопросы для самопроверки

Matlab. Функционал

Основные возможности программных продуктов

Основная литература

1. Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Геврасева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.

2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#

3. Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на базе MatLab/Simuli учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образования и науки Россий Федерации, Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск : НГТУ, 20 48 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455

Дополнительная литература

1. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.
2. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.
3. Начальное знакомство с компьютерным системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.

Лабораторная работа №6

Аппроксимация функции. Метод наименьших квадратов, метод разностей.

Цель работы: Аппроксимация функции. Метод наименьших квадратов, метод разностей.

Задание: изучить программы Matlab, Mathcad

Порядок выполнения работы
1. Изучить теоретический материал
2. Разработать решение в программе
3. Сделать выводы

Контрольные вопросы для самопроверки

Matlab. Функционал

Основные возможности программных продуктов

Основная литература

1. Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Геврасева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.

2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#

3. Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на MatLab/Simulink : учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образован

науки Российской Федерации, Новосибирский государственный технический университет. Новосибирск : НГТУ, 2015. - 48 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455

Дополнительная литература

1. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.
2. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.
3. Начальное знакомство с компьютерным системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.

Лабораторная работа №7

Дифференцирование функции

Цель работы: Дифференцирование функции

Задание: изучить программы Matlab, Mathcad

Порядок выполнения работы

4. Изучить теоретический материал
5. Разработать решение в программе
6. Сделать выводы

Контрольные вопросы для самопроверки

Matlab. Функционал

Основные возможности программных продуктов

Основная литература

1. Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Гевраcева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.
2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#
3. Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на MatLab/Simulink : учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образован науки Российской Федерации, Новосибирский государственный технический университет Новосибирск : НГТУ, 2015. - 48 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455

Дополнительная литература

1. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.
2. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.
3. Начальное знакомство с компьютерным системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.

Лабораторная работа №8

Численное интегрирование. Метод прямоугольников, метод трапеции, интегрирование с использованием сплайн - функций

Цель работы: Численное интегрирование. Метод прямоугольников, метод трапеци интегрирование с использованием сплайн - функций

Задание: изучить программы Matlab, Mathcad

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретический материал

2. Разработать решение в программе
3. Сделать выводы

Контрольные вопросы для самопроверки

Matlab. Функционал

Основные возможности программных продуктов

Основная литература

1. Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Геврасева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.
2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#
Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на базе MatLab/Simuli учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образования и науки Россий Федерации, Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск : НГТУ, 20 48 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455

Дополнительная литература

1. MATLAB 5.х. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.
2. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.
3. Начальное знакомство с компьютерным системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.

Лабораторная работа №9

Решение дифференциальных уравнений

Цель работы: Решение дифференциальных уравнений

Задание: изучить программы Matlab, Mathcad

Порядок выполнения работы
1. Изучить теоретический материал
2. Разработать решение в программе
3. Сделать выводы

Контрольные вопросы для самопроверки

Matlab. Функционал

Основные возможности программных продуктов

Основная литература

1. Ларионова, О.Г. Математическая статистика : учебное пособие / О. Г. Ларионова, С. А. Геврасева. - 4-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2012. - 104 с.
2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К », 2017.— 398 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=452649#
3. Воевода, А.А. Моделирование матричных уравнений в задачах управления на базе MatLab/Simu учебное пособие / А.А. Воевода, Г.В. Трошина ; Министерство образования и науки Россий

Федерации, Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск : НГТУ, 20
48 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438455

Дополнительная литература

1. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование : учебное пособие / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. - Москва : КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. - 332 с.
2. Mathcad 11 : полное руководство по русской версии / Е.М.Кудрявцев. - Москва : ДМК Пресс, 2005. - 592 с.
3. Начальное знакомство с компьютерным системами Word, Mathcad, КОМПАС : учебное пособие / Е. М. Кудрявцев. - Москва : АСВ, 2007. - 160 с.

10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Информационно-коммуникативные технологии (ИКТ) преподаватель использует для:
- получения информации при подготовке к занятиям;
- создания презентационного сопровождения лекционных занятий;
- работы в электронной информационной среде;
- ОС Windows 7 Professional;
- Microsoft Office 2007 Russian Academic OPEN No Level;
- Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Security.

11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Вид занятия *(Лк ЛР, ПЗ, КП, СР)*	***Наименование аудитории***	***Перечень основного оборудования***	***№ Лк, ЛР, ПЗ***
1	**2**	**3**	**4**
Лк	Лекционная аудитория	-	Лк №1-7
ЛР	Дисплейный класс	ПО Matlab Оборудование 10-ПК i5-2500/H67/4Gb (монитор TFT19 Samsung); принтер HP LaserJet P2055D	ЛР №1-9
СР	ЧЗ1	Оборудование 10-ПК i5-2500/H67/4Gb (монитор TFT19 Samsung); принтер HP LaserJet P2055D	

Приложение 1

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	ФОС
ОПК-4	способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий	**1.** Задачи линейной алгебры..	*Вопросы к зачету 1.1-1.2*
		2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.	*Вопросы к зачету 2.1-2.2*
		3. Аппроксимация функции.	*Вопросы к зачету3.1-3.3*
		4. Численные методы дифференцирования.	*Вопросы к зачету 4.1-4.3*
		5. Численные методы интегрирования.	*Вопросы к зачету 5.1-5.2*
		6. Численное решение дифференциальных уравнений.	*Вопросы к зачету 6.1-6.2*
ПК-2	способностью использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования	**1.** Задачи линейной алгебры..	*Вопросы к зачету 1.3-1.4*
		2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.	*Вопросы к зачету 2.3-2.4*
		3. Аппроксимация функции.	*Вопросы к зачету 3.4-3.5*
		4. Численные методы дифференцирования.	*Вопросы к зачету 4.4-4.5*
		5. Численные методы интегрирования.	*Вопросы к зачету 5.3-5.4*
		6. Численное решение дифференциальных уравнений.	*Вопросы к зачету 6.3-6.4*
ПК-12	способность выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-химических процес-сов лесозаготовительных и деревоперерабатыва-ющих производств	**1.** Задачи линейной алгебры..	*Вопросы к зачету 1.5-1.6*
		2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.	*Вопросы к зачету 2.5-2.6*
		3. Аппроксимация функции.	*Вопросы к зачету 3.6-3.7*
		4. Численные методы дифференцирования.	*Вопросы к зачету 4.6-4.7*
		5. Численные методы интегрирования.	*Вопросы к зачету 5.5-5.6*
		6. Численное решение дифференциальных уравнений.	*Вопросы к зачету 6.5-6.6*

2. **Вопросы к зачету**

<table>
<tr><th rowspan="2">№ п/п</th><th colspan="2">Компетенции</th><th rowspan="2">ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ</th><th rowspan="2">№ и наименование раздела</th></tr>
<tr><th>Код</th><th>Определение</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="14">1.</td><td rowspan="14">ОПК-4</td><td rowspan="14">способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий</td><td>1.1 Системы линейных уравнений. Методы решения.</td><td rowspan="2">1. Задачи линейной алгебры.</td></tr>
<tr><td>1.2 Прямые методы решения систем линейных уравнений. Их характеристика.</td></tr>
<tr><td>2.1 Решение нелинейных уравнений. Методы решения.</td><td rowspan="2">2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.</td></tr>
<tr><td>2.2 Решение нелинейных уравнений методом хорд.</td></tr>
<tr><td>3.1 Аппроксимация. Основные понятия.</td><td rowspan="3">3. Аппроксимация функции.</td></tr>
<tr><td>3.2 Интерполирование. Метод неопределенных коэффициентов.</td></tr>
<tr><td>3.3 Интерполирование. Линейная и квадратичная интерполяция.</td></tr>
<tr><td>4.1 Численное дифференцирование</td><td rowspan="3">4. Численные методы дифференцирования.</td></tr>
<tr><td>4.2 Численное дифференцирование. Основные определения.</td></tr>
<tr><td>4.3 Численное дифференцирование. Использование интерполяционных формул</td></tr>
<tr><td>5.1 Численное интегрирование. Основные определения. Методы.</td><td rowspan="2">5. Численные методы интегрирования.</td></tr>
<tr><td>5.2 Численное интегрирование. Метод прямоугольников, его разновидности.</td></tr>
<tr><td>6.1 Дифференциальные уравнения. Основные понятия. Методы решения.</td><td rowspan="2">6. Численное решение дифференциальных уравнений.</td></tr>
<tr><td>6.2 Дифференциальные уравнения. Методы решения.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">2.</td><td rowspan="8">ПК-2</td><td rowspan="8">способностью использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования</td><td>1.3 Матрицы. Методы нахождения определителей матрицы.</td><td rowspan="2">1. Задачи линейной алгебры..</td></tr>
<tr><td>1.4 Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.</td></tr>
<tr><td>2.3 Решение нелинейных уравнений методом деления отрезка пополам.</td><td rowspan="2">2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.</td></tr>
<tr><td>2.4 Решение нелинейных уравнений методом Ньютона.</td></tr>
<tr><td>3.4 Интерполяционный многочлен Лагранжа.</td><td rowspan="2">3. Аппроксимация функции.</td></tr>
<tr><td>3.5 Интерполяционный многочлен Ньютона.</td></tr>
<tr><td>4.4 Численное дифференцирование. Метод неопределенных коэффициентов.</td><td rowspan="2">4. Численные методы дифференцирования.</td></tr>
<tr><td>4.5 Численное дифференцирование. Метод Рунге-Ромберга.</td></tr>
</table>

			5.3 Численное интегрирование. Метод трапеции.	**5.** Численные методы интегрирования.
			5.4 Численное интегрирование. Метод Симпсона	
			6.3 Дифференциальные уравнения. Методы решения систем уравнений.	**6.** Численное решение дифференциальных уравнений.
			6.4 Дифференциальные уравнения. Задача Коши. Основные понятия.	
3.	ПК-14	способностью выполнять поиск и анализ необходимой научно-технической информации, подготавливать информационный обзор и технический отчет о результатах исследований	**1.5** Решение систем линейных уравнений методом LU-разложения.	**1.** Задачи линейной алгебры..
			1.6 Решения систем линейных уравнений метод простой итерации.	
			2.5 Методы решения систем нелинейных уравнений.	**2.** Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.
			2.6 Решение систем нелинейных уравнений методом Зейделя	
			3.6 Аппроксимация. Метод выбранных точек.	**3.** Аппроксимация функции.
			3.7 Аппроксимация. Метод наименьших квадратов	
			4.6 Численное дифференцирование систем уравнений.	**4.** Численные методы дифференцирования.
			4.7 Численное дифференцирование. Методы.	
			5.5 Кратные интегралы. Методы решения.	**5.** Численные методы интегрирования.
			5.6 Кратные интегралы. Метод ячеек.	
			6.5 Метод Рунге-Кутта.	**6.** Численное решение дифференциальных уравнений.
			6.6 Метод Эйлера.	

3 Описание показателей и критериев оценивания компетенций

Показатели	Оценка	Критерии
Знать *(ОПК-4)*: - источники и методы поиска, хранения, обработки и анализа информации из различных источников и баз данных; *(ПК-2)*: - пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования; *(ПК-12)*: - методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств; ***Уметь*** *(ОПК-4)*: - осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных; - представлять информацию в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий; *(ПК-2)*: - использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования; *(ПК-12)*: - выбирать и применять соответствующие методы	**зачтено**	Обучающийся глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически его излагает, умеет находить взаимосвязь теории с практикой, не затрудняется с ответом при видоизменении вопроса, владеет специальной терминологией, демонстрирует общую эрудицию в предметной области, использует при ответе ссылки на материал специализированных источников.

моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств ***Владеть*** *(ОПК-4)*: – навыками поиска, хранения, обработки и анализа информации из различных источников и баз данных; - способами представления информации в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий *(ПК-2)*: - методами использования пакетов прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования *(ПК-12)*: - методами моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств	**не зачтено**	Обучающийся имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, не знает значительной части программного материала, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении теоретического материала, не владеет специальной терминологией, допускает существенные ошибки при ответе.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности

Дисциплина «Математические методы в расчетах на ЭВМ» направлена на приобретение у обучающихся знаний о методах интегрирования, дифференцирования.

Изучение дисциплины «Математические методы в расчетах на ЭВМ» предусматривает:

- лекции
– лабораторные работы,
– зачет

С целью определения уровня овладения компетенциями, закрепленными за дисциплиной, в заданные преподавателем сроки проводится текущий контроль знаний, умений и навыков каждого обучающегося, аттестация по итогам освоения дисциплины. Текущий контроль проводится на аудиторных занятиях с целью определения качества усвоения материала по окончании изучения очередной учебной темы в следующих формах: письменный опрос, тестирование.

Аттестация по итогам освоения дисциплины.

Для контроля усвоения данной дисциплины учебным планом предусмотрен зачет (пятый семестр). На зачете обучающимя предлагается ответить на 3 вопроса, составленные из вопросов, примеры которых приведены в приложении 1 табл.2. На подготовку к ответу на билет обучающимся выделяется от 30 до 40 минут. На все вопросы обучающийся готовит письменный конспективный ответ, который затем докладывает преподавателю.

В процессе проведения лабораторных работ происходит закрепление знаний, формирование умений и навыков реализации представления о математических методах расчетов на ЭВМ.

Самостоятельную работу необходимо начинать с проработки теоретического материала по пройденной теме.

Работа с литературой является важнейшим элементом в получении знаний по дисциплине. Необходимо воспользоваться списком рекомендуемой литературы. Дополнительные сведения можно найти в периодической печати и Интернете.

Приложение 2

АННОТАЦИЯ
рабочей программы дисциплины
Математические методы в расчетах на ЭВМ

1. Цель и задачи дисциплины

Целью изучения дисциплины является: приобретение у обучающихся знаний в области решения математически сформулированных задач, необходимых в профессиональной деятельности, с помощью ЭВМ и специальных программ.

Задачей изучения дисциплины является: формирование у обучающегося комплекса систематизированных знаний, умений и навыков, необходимых для самостоятельного решения практических вопросов о численных методах математики, их применимости при определенных условиях, о погрешностях вычислений, использовании вычислительной техники и программ при решении задач, необходимых в профессиональной деятельности.

2. Структура дисциплины

2.1 Распределение трудоемкости по отдельным видам учебной работы, включая самостоятельную работу: Лк – 17 часов, ЛР - 34 часа, СР - 57 часов.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 108 часов, 3 зачетных единиц

2.2 Основные разделы дисциплины:

1. Задачи линейной алгебры..
2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.
3. Аппроксимация функции.
4. Численные методы дифференцирования.
5. Численные методы интегрирования.
6. Численное решение дифференциальных уравнений.

3. Планируемые результаты обучения (перечень компетенций)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-4 - способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий;

ПК-2 - способность использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудо-вания;

ПК-12 - способность выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.

4. Вид промежуточной аттестации:__зачет______________

Приложение 3

Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе
на 20___-20___ учебный год

1. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие дополнения:
____
____

2. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие изменения:

____
____
____

Протокол заседания кафедры №____ от «___» __________ 20 ____ г.,
(разработчик)

Заведующий кафедрой _____________________ _____________________
(подпись) *(Ф.И.О.)*

Приложение 4

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	ФОС
ОПК-4	способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий	**1.** Задачи линейной алгебры..	Вопросы для лабораторных работ Дискуссия
		2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.	
		3. Аппроксимация функции.	
		4. Численные методы дифференцирования.	
		5. Численные методы интегрирования.	
		6. Численное решение дифференциальных уравнений.	
ПК-2	способностью использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования	**1.** Задачи линейной алгебры..	Вопросы для лабораторных работ Дискуссия
		2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.	
		3. Аппроксимация функции.	
		4. Численные методы дифференцирования.	
		5. Численные методы интегрирования.	
		6. Численное решение дифференциальных уравнений.	
ПК-12	способность выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-химических процес-сов лесозаготовительных и деревоперерабатыва-ющих производств	**1.** Задачи линейной алгебры..	Вопросы для лабораторных работ Дискуссия
		2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.	
		3. Аппроксимация функции.	
		4. Численные методы дифференцирования.	
		5. Численные методы интегрирования.	
		6. Численное решение дифференциальных уравнений.	

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

<table>
<tr><th>Показатели</th><th>Оценка</th><th>Критерии</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Знать
(ОПК-4):
- источники и методы поиска, хранения, обработки и анализа информации из различных источников и баз данных;
(ПК-2):
- пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования;
(ПК-12):
- методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств;
Уметь
(ОПК-4):
- осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных;
- представлять информацию в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий;
(ПК-2):
- использовать пакеты прикладных программ для расчета технологических параметров процессов и оборудования;
(ПК-12):
- выбирать и применять соответствующие методы моделирования механических и физико-химических процессов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств
Владеть
(ОПК-4):
– навыками поиска,</td><td>зачтено</td><td>Обучающийся глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически его излагает, умеет находить взаимосвязь теории с практикой, не затрудняется с ответом при видоизменении вопроса, владеет специальной терминологией, демонстрирует общую эрудицию в предметной области, использует при ответе ссылки на материал специализированных источников.</td></tr>
<tr><td>не зачтено</td><td>Обучающийся имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, не знает значительной части программного материала, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении теоретического материала, не владеет специальной терминологией, допускает существенные ошибки при ответе</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

хранения, обработки и анализа информации из различных источников и баз данных; - способами представления информации в требуемом формате с использованием информационных, компь-ютерных и сетевых технологий *(ПК-2)*: - методами использования пакетов прикладных программ для расчета технологических пара-метров процессов и оборудования *(ПК-12)*: - методами моделирования механических и фи-зико-химических процес-сов лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств		

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 35.03.02 Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств от «20» октября 2015 г. № 1164
для набора 2016 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «06» июня 2016 г. № 429
для набора 2018 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «12» марта 2018 г. № 130

Программу составил:
Плотников Николай Павлович, доцент, к.т.н. ________________________

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры ВиПЛР
от « 25 » декабря 2018 г., протокол № 8.

Заведующий кафедрой ВиПЛР ________________ Иванов В.А.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий выпускающей кафедрой ________________ Иванов В.А.

Директор библиотеки ________________ Сотник Т.Ф.

Рабочая программа одобрена методической комиссией лесопромышленного факультета
от « 27 » декабря 2018 г., протокол № 4.

Председатель методической комиссии факультета _______________ Сыромаха С.М.

Начальник
учебно-методического управления ________________ Нежевец Г.П.

Регистрационный №________

(методический отдел)