МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра машиностроения и транспорта

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе

_______________ Е.И. Луковникова

«31» мая 2019 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Б1.В.ДВ.07.02

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ

15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств

ПРОФИЛЬ ПОДГОТОВКИ

Технология машиностроения

Программа прикладного бакалавриата

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств от 11 августа 2016 г № 1000 и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» от 01.04.2019 г. № 196 для очной формы обучения для набора 2019 года

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ **Стр.**

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Вид деятельности выпускника

Дисциплина охватывает круг вопросов, относящихся к производственно-технологическому виду профессиональной деятельности выпускника в соответствии с компетенциями и видами деятельности, указанными в учебном плане.

Цель и задачи дисциплины

Целью изучения дисциплины является – формирование знаний и навыков разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами, выбора на основе анализа вариантов оптимального прогнозируемых последствий решения, а также способности использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности и методы теоретического и экспериментального исследования.

Задачами изучения дисциплины является:

- изучение методов разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами и основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности;
- формирование навыков выбора на основе анализа вариантов оптимального прогнозируемых последствий решения, а также применения основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности;
- решение задач по разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами на основе теоретического и экспериментального исследования.

Код компетенции	**Содержание компетенций**	**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине**
ОПК-1	способность использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда	**знать:** - основные закономерности изготовления машиностроительных изделий; **уметь:** - применять основные закономерности изготовления машиностроительных изделий; **владеть:** - навыками теоретического и экспериментального исследования.
ПК-16	способность осваивать на практике и совершенствовать технологии, системы и средства машиностроительных производств, участвовать в разработке и внедрении оптимальных технологий изготовления машиностроительных изделий, выполнять мероприятия по выбору и эффективному использованию материалов, оборудования, инструментов, технологической оснастки, средств диагностики, автоматизации, алгоритмов и программ выбора и расчетов параметров технологических процессов для их реализации	**знать:** - методы разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами; **уметь:** - выбирать на основе анализа вариантов оптимального прогнозируемых последствий решения **владеть:** - навыками разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.В.ДВ.07.02 «Математические модели и обработка экспериментальных данных» является дисциплиной по выбору вариативной части.

Дисциплина «Математические модели и обработка экспериментальных данных» базируется на знаниях, полученных при изучении таких учебных дисциплин, как:

- «Математика»;
- «Системы автоматизированного проектирования технологических процессов»;
- «Техническая эксплуатация систем автоматизированного производства»;
- «Методы научно-технического творчества».

Основываясь на изучении перечисленных дисциплин, «Математические модели и обработка экспериментальных данных» представляет основу для:

- «Производственной (преддипломной) практики»;
- «Государственной итоговой аттестации».

Такое системное междисциплинарное изучение направлено на достижение требуемого ФГОС уровня подготовки по квалификации бакалавр.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Распределение объема дисциплины по формам обучения

Форма обучения	*Курс*	*Семестр*	*Трудоемкость дисциплины в часах*						*Курсовая работа (проект), контрольная работа, реферат, РГР*	*Вид промежуточной аттестации*
			Всего часов	*Аудиторных часов*	*Лекции*	*Лабораторные работы*	*Семинары / Практические занятия*	*Самостоятельная работа*		
Очная	4	8	108	70	14	56	-	38	-	Зачет
Заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Заочная (ускоренное обучение)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Очно-заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

3.2. Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости

Вид учебных занятий	*Трудоемкость (час.)*	*в т.ч. в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)*	*Распределение по семестрам, час*
			8
I. Контактная работа обучающихся с преподавателем (всего)	**70**	**12**	**70**
Лекции (Лк)	14	12	14
Лабораторные работы (ЛР)	56	-	56
Групповые (индивидуальные) консультации	+	-	+
II.Самостоятельная работа обучающихся (СР)	**38**	**-**	**38**
Подготовка к лабораторным работам	30	-	30
Подготовка к зачету	8	-	8
III. Промежуточная аттестация Зачет	+	-	+
Общая трудоемкость дисциплины ….... час.	**108**	**-**	**108**
зач. ед.	**3**	**-**	**3**

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий
- для очной формы обучения:

№ раздела и темы	*Наименование раздела и тема дисциплины*	*Трудоемкость, (час.)*	*Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)*		
			учебные занятия		*Самостоятельная работа обучающихся*
			лекции	*лабораторные работы*	
1.	**Математическое обеспечение эксперимента**	**14**	**2**	**8**	**4**
1.1.	Числовая оценка отклика	14	2	8	4
2.	**Статистическая проверка гипотез**	**25**	**5**	**8**	**12**
2.1.	Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению	13	2	8	3
2.2.	Проверка гипотезы о равенстве средних значений	4	1	-	3
2.3.	Проверка гипотезы о равенстве дисперсий	4	1	-	3
2.4.	Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке	4	1	-	3
3.	**Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ**	**41**	**5**	**24**	**12**
3.1.	Дисперсионный анализ	14	2	8	4
3.2.	Корреляционный анализ	13	1	8	4
3.3.	Регрессионный анализ	14	2	8	4
4.	**Планирование эксперимента**	**28**	**2**	**16**	**10**
4.1.	Планирование эксперимента при оценке отклика	28	2	16	10
	ИТОГО	**108**	**14**	**56**	**38**

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам

Раздел 1. Математическое обеспечение эксперимента
Тема 1.1. Числовая оценка отклика (лекция-дискуссия – 2 час.)

Эксперимент – система операций и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте исследования.

Составной частью эксперимента является **опыт** – воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях при возможности регистрации и количественной оценки состояния или результатов функционирования исследуемого объекта.

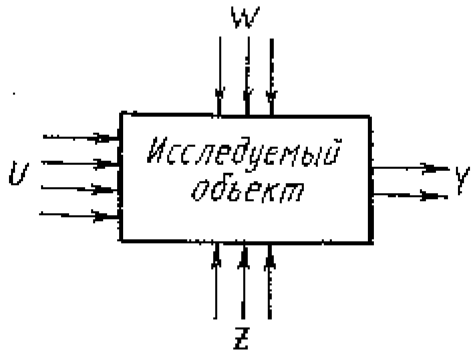


Рис. Кибернетическая модель объекта исследования

Эксперимент проводится на промышленном оборудовании, лабораторной установке или физической модели. При этом механизм изучаемого процесса обычно известен лишь частично или совсем неизвестен. В таких случаях объект исследования можно условно представить в виде «черного ящика» – системы внутренних связей, не доступных исследователю. Известны лишь переменные величины, воздействующие на объект исследования, и величины, характеризующие его состояние или результаты функционирования (рис.). Первые называют входными величинами или факторами, а вторые – выходными или откликом.

Все факторы делятся на три группы:

• группа постоянных или случайно изменяющихся в ходе исследования факторов W, значения которых известны;

• группа управляемых факторов U, значения которых выбираются и целенаправленно изменяются в ходе исследования (две первых группы часто объединяют в одну группу контролируемых факторов X);

• группа неконтролируемых факторов Z, значения которых остаются по той или иной причине неизвестными в ходе исследования.

Изменение отклика Y под действием монотонно изменяющихся во времени неконтролируемых факторов называется временным дрейфом отклика, а зависимость математического ожидания отклика от контролируемых факторов – **функцией отклика.**

Геометрическое представление функции отклика называется поверхностью отклика. Чтобы такое представление стало возможным, вводится понятие факторного пространства, у которого координатные оси соответствуют отдельным факторам. Пример трехмерного факторного пространства показан на рис.

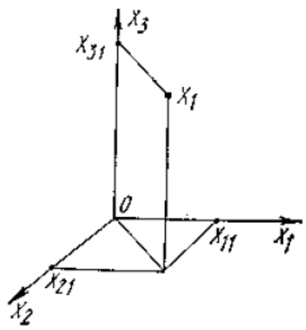


Рис. Геометрическая модель трехмерного факторного пространства

Любая точка факторного пространства характеризуется набором значений факторов, при которых производится измерение отклика. Фиксированное значение фактора называют также **уровнем фактора**. При количестве факторов, большем трех, геометрическое моделирование факторного пространства становится невозможным. Поэтому чаще всего множество уровней факторов, при которых производится измерение отклика, задается матрицей условий эксперимента. Эта матрица для k факторов и N измерений имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{1N} & X_{2N} & X_{3N} & \dots & X_{kN} \end{pmatrix}$$

Значения отклика, полученные при данных измерениях, также представляются в матрице, которая имеет один столбец и называется **матрицей наблюдений:**

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_N \end{pmatrix}$$

По характеру организации и методам обработки результатов эксперимент может быть **пассивным** или **активным.**

При реализации **пассивного** эксперимента исследователь наблюдает за объектом, не вмешиваясь в процесс его функционирования. Поскольку, в данном случае уровни факторов случайным или закономерным образом изменяются во времени, то появляется возможность, измеряя их значения и значения отклика, исследовать зависимость между факторами и откликом.

Примером **пассивного** эксперимента является исследование точности обработки деталей на настроенном станке. Факторами в данном случае будут погрешности заготовок, их твердость, износ инструмента, жесткость станка, откликом – погрешность обработанных деталей.

При реализации **активного** эксперимента исследователь сам изменяет уровень факторов и поддерживает их на нужном уровне в течение данного этапа эксперимента.

К **контролируемым** факторам предъявляются следующие требования, которые должны учитываться при подготовке активного эксперимента:

• управляемость фактора – возможность поддерживать выбранный уровень фактора в течение необходимого для измерения отрезка времени;

• достаточно высокая точность, с которой поддерживается и измеряется уровень фактора;

• независимость фактора – возможность задать любой уровень данного фактора вне зависимости от уровней других факторов;

• совместимость факторов – безопасность функционирования объекта исследования и возможность измерения отклика в любой точке той части факторного пространства, которая является областью экспериментирования.

Кроме факторов, каждому уровню которых после измерения можно поставить в соответствие определенное число, могут быть и качественные факторы (например, рецепты связок шлифовальных кругов, материалы режущей части инструмента, химический состав обрабатываемого материала). В этом случае каждому уровню качественного фактора нужно поставить в соответствие число натурального ряда (код). Порядок уровней качественных факторов может быть произвольным, но после кодирования он фиксируется. Для упрощения расчетов при обработке результатов эксперимента рекомендуется проводить нормализацию факторов – преобразование их в безразмерные величины с (по возможности) целочисленными значениями. При симметричной нормализации расчетная формула имеет вид:

$$x_{ij} = (X_{ij} - \overline{X_j}) / \Delta X_j ,$$

где xij – нормализованный i-й уровень j-го фактора; Xij – натуральный i-й уровень, j-го фактора; ΔXj – постоянный шаг изменения натурального значе-ния j-го фактора; Xj – средний уровень j-го фактора:

$$\overline{X_j} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} X_{ij} ;$$

r – число уровней фактора.

Чтобы нормализованные факторы приняли целочисленные значения, число их уровней должно быть нечетным. Например, при r = 5 коды факторов принимают значения -2; -1; 0; 1; 2.

При несимметричной нормализации:

$$x_{ij} = 1 + (X_{ij} - X_{j\,\min}) / \Delta X_j ,$$

где Xj min – минимальный уровень j-го фактора.

В данном случае нормализованные факторы принимают значения 1, 2, 3, ..., r.

В качестве факторов могут приниматься не только физические или геометрические величины, но и некоторые функции от них (например, логарифмы или показательные функции).

При выборе отклика из нескольких, обычно функционально связанных показателей результата функционирования исследуемого объекта должно учитываться следующее:

• необходимо, чтобы отклик был однозначным в статистическом смысле, т.е. заданному набору уровней факторов должно соответствовать одно (с точностью до погрешности измерения) значение отклика;

• отклик должен быть эффективным в статистическом смысле. Это значит, что из нескольких функционально связанных откликов, выбранный можно измерить с наибольшей точностью.

• желательно, чтобы отклик можно было оценить количественно. Если нет способа количественного измерения результата, то следует пользоваться ранжированием. При этом отклику присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале.

План эксперимента – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов. План эксперимента обычно записывается в виде **матрицы плана** – прямоугольной таблицы, строки которой отвечают отдельным опытам, а столбцы – факторам.

Элементами матрицы плана обычно являются нормированные уровни факторов, т.е. (u, j)-й элемент равен нормированному уровню j-го фактора в u-м опыте.

Матрица плана может иметь совпадающие строки. Чтобы сократить запись, используется матрица спектра плана, составленная из всех строк матрицы плана, отличающихся уровнем хотя бы одного фактора, и матрица дублирования – квадратная диагональная матрица, элементы которой равны числам параллельных (дублирующих) опытов в соответствующих точках спектра плана.

План, содержащий все возможные комбинации всех факторов на определенном числе уровней равное число раз, называется полным факторным планом. Если план содержит только часть комбинаций полного факторного плана, то его называют дробным факторным планом или дробной репликой полного факторного плана.

Отклик оценивается по результатам прямых или косвенных измерений.

Способ оценки зависит от природы отклика (случайная или неслучайная величина) и точности измерений.

Основной задачей в данном случае является получение обоснованных выводов о действительном значении отклика с учетом погрешностей из-мерения при ограниченном числе измерений.

Совокупность всех возможных значений исследуемой случайной по-грешности называется генеральной совокупностью.

Множество значений случайной погрешности, полученное в результате наблюдения над нею, называют случайной выборкой или просто выборкой.

Число объектов в генеральной совокупности и в выборке характеризует их объем. Генеральная совокупность может иметь бесконечный объем.

Основной задачей является получение научно обоснованных выводов о числовых характеристиках генеральной совокупности случайных погрешностей по выборке.

Выборочная оценка должна обладать следующими свойствами:

• несмещенностью;

• эффективностью;

• состоятельностью.

Оценку $\underline{A}$ параметра A называют несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру. Требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценке параметров.

Так как $\underline{A}$ – случайная величина, значение которой изменяется от выборки к выборке, то меру ее рассеивания характеризуют дисперсией $D(\underline{A})$. Из двух оценок A следует отдать предпочтение той, которая обладает меньшим рассеиванием (т. е. меньшей дисперсией).

Несмещенную оценку $\underline{A}$, которая имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра A, вычисленных по выборкам одного и того же объема, называют **эффективной оценкой.**

Оценку $\underline{A}$ параметра A называют состоятельной, если при неограниченном увеличении объема выборки ее значение приближается сколь угодно близко к значению оцениваемого параметра.

На практике не всегда удается удовлетворить одновременно требованиям несмещенности, эффективности и состоятельности оценки параметра. Иногда для простоты расчетов целесообразно использовать незначительно смещенную оценку.

Оценку неизвестного параметра генеральной совокупности одним числом называют **точечной оценкой**. Точечной оценкой **математического ожидания** M(X) случайной величины X является среднее арифметическое значение $\underline{X}$, вычисленное по результатам m независимых наблюдений:

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$$

Эта оценка является несмещенной, состоятельной и эффективной. Она имеет дисперсию σ2/m, если дисперсия случайной величины X равна σ2.

Несмещенной **оценкой дисперсии** генеральной совокупности D(X) является выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2.$$

Эта оценка является состоятельной, но не эффективной.

При малом числе наблюдений необходимо использовать интервальное оценивание, так как в этом случае точечная оценка недостаточно надежна. Необходимо по данным выборки построить числовой интервал, в котором с заранее выбранной вероятностью находится значение оцениваемого параметра.

Доверительным интервалом (A2 – $\underline{A1}$) для параметра A называют такой интервал, для которого с заранее выбранной вероятностью P=1 – α, близкой к единице, можно утверждать, что:

$$P(\overline{A}_1 < A < \overline{A_2}) = 1 - \alpha$$

Чем меньше для выбранной вероятности (A2 – $\underline{A1}$), тем точнее оценка параметра A.

Доверительный интервал меняется от выборки к выборке.

Вероятность P=1 – α называется **доверительной вероятностью**, а число α – **уровнем значимости**. Выбор доверительной вероятности зависит от конкретной решаемой задачи.

Если случайная величина распределена нормально, а дисперсия этого распределения неизвестна, то доверительный интервал для математического ожидания M(X) определяется неравенством:

$$\overline{X} - t(P,m)\cdot S/\sqrt{m} < M(X) < \overline{X} + t(P,m)\cdot S/\sqrt{m},$$

где t(P, m) – критерий Стьюдента при доверительной вероятности P и числе степеней свободы f = m – l.

Если случайная величина распределена нормально, доверительный интервал для дисперсии генеральной совокупности при доверительной вероятности P=1 – α определяется неравенством:

$$\frac{m-1}{\chi_1^2}S^2 < \sigma^2 < \frac{m-1}{\chi_2^2}S^2,$$

где χ2 – критерий Пирсона.

Возможны следующие **подходы к оценке отклика:**

1. **Отклик является неслучайной величиной и ошибки измерения малы** по сравнению со значениями отклика. При i-м измерении получаем:

$$Y = y_i + \Delta_i,$$

где Y – истинное значение отклика; yi – измеренное значение отклика; Δi – погрешность измерения.

Если Δi < (0,01...0,02) yi, то погрешностью измерения можно пренебречь и полученное после первого измерения значение yi принять за истинное.

2. **Отклик является неслучайной величиной, но погрешностями измерений нельзя пренебречь**. Для уменьшения влияния погрешностей измерения на точность оценки производится многократное измерение отклика в одинаковых условиях (в одной и той же точке факторного пространства).

Точечной оценкой истинного значения отклика в данном случае будет среднее арифметическое значение результатов параллельных измерений:

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i ,$$

где m – количество параллельных измерений.

Точность соответствия y истинному значению тем выше, чем больше m. При относительно небольшом числе измерений целесообразно применять интервальную оценку отклика:

$$\bar{y} - t(P,m)\cdot S/\sqrt{m} < Y < \bar{y} + t(P,m)\cdot S/\sqrt{m},$$

где t(P, m) – критерий Стьюдента, S – оценка стандартного отклонения погрешностей измерения, P – доверительная вероятность.

Точечная оценка стандартного отклонения определяется из выражения:

$$S^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2 .$$

3. **Отклик является случайной величиной, а размах ошибки измерения пренебрежимо мал по сравнению с полем рассеяния значений отклика.**

В данном случае наиболее полной характеристикой отклика будет закон распределения его значений. Но в большинстве практических задач достаточными считаются числовые характеристики распределения случайной величины Y.

Минимально необходимыми являются:

• математическое ожидание M(Y), определяющее положение центра группирования значений отклика;

• дисперсия D (Y) или стандартное отклонение $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$, характеризующие рассеивание значений отклика.

В качестве точечной оценки математического ожидания М(У) принимается среднее арифметическое значение результатов параллельных измерений y.

При m>30 удобнее группировать значения Y по интервалам одинаковой длины h. Все поле рассеяния делится на нечетное число (7... 15) интервалов длиной h и подсчитывается количество mi значений отклика, попавших в каждый i-й интервал.

Принимается, что все значения отклика, попавшие в i-й интервал, равны координате его середины. Тогда:

$$\bar{y} = y_0 + \frac{h}{m}\sum_{i=1}^{k}(i - \frac{k+1}{2})m_i ,$$

где yo – координата середины среднего интервала; k – количество интервалов;

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i .$$

Точечной оценкой дисперсии является наблюдаемая дисперсия S2, значения которой при 10<m<30 можно определить по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2$$

Если число параллельных измерений мало (m<15), то оценку стандартного отклонения можно проводить по размаху:

$$R_m = y_{\max} - y_{\min} .$$

В данном случае:

$$S = R_m / d_m .$$

где dm – среднее значение относительного размаха, т. е. отношения размаха к стандартному отклонению.

При m>30 и группировании по интервалам одинаковой длины:

$$S^2 = \frac{h^2}{m-1}\sum_{i=1}^{k}\left(i - \frac{k+1}{2}\right)^2 m_i - \frac{mh^2}{m-1}\cdot(y_0 - \bar{y})^2 ,$$

Интервальная оценка математического ожидания находится с помощью выражения:

$$\bar{y} - t(P,m)\cdot S/\sqrt{m} < Y < \bar{y} + t(P,m)\cdot S/\sqrt{m},$$

где S определяется по формуле:

$$S = R_m / d_m .$$

Интервальная оценка стандартного отклонения:

а) при m<15:

$$R_m / d_{m1} < \sigma < R_m / d_{m2} ,$$

где dm1 и dm2 – критерии, определяемые в зависимости от доверительной вероятности P и m;

б) при m>15:

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q) \; или \; \frac{m-1}{\chi_1^2}S^2 < \sigma^2 < \frac{m-1}{\chi_2^2}S^2 ,$$

где q – критерий, который определяется в зависимости от P и m; значение: $\chi^2/(m-1)$ определяется из таблицы; S определяется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2 ,$$

Или:

$$S^2 = \frac{h^2}{m-1}\sum_{i=1}^{k}\left(i - \frac{k+1}{2}\right)^2 m_i - \frac{mh^2}{m-1}\cdot(y_0 - \bar{y})^2 ,$$

4. **Отклик является случайной величиной, а ошибки измерения существенны**, т.е. не пренебрежимо малы по сравнению с размахом значений отклика.

Если исключена систематическая погрешность измерения, то оценка математического ожидания производится по следующим формулам:

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i,$$

$$\bar{y} - t(P,m)\cdot S/\sqrt{m} < Y < \bar{y} + t(P,m)\cdot S/\sqrt{m},$$

$$\bar{y} = y_0 + \frac{h}{m}\sum_{i=1}^{k}\left(i - \frac{k+1}{2}\right)m_i.$$

Поскольку погрешность измерения и отклик являются независимыми случайными величинами, то оценка стандартного отклонения отклика находится из выражения:

$$S^2(Y) = S_{\Sigma}^2 - S_{И}^2,$$

Где S_{Σ} - оценка стандартного отклонения, полученная путем обработки результатов серии измерений; Sи – оценка стандартного отклонения погрешности измерения (для определения Sи проводится специальный эксперимент). Если Sи > S_{Σ}, то считаем S (Y) = 0.

5. **Отклик является случайной функцией Y(t)**, где аргумент **t** может быть непрерывной (например, время) или дискретной величиной (например, порядковый номер обрабатываемой детали).

В отличие от случайной выборки в данном случае порядок следования измерений является существенным для выявления причинных механизмов, обусловливающих свойства отклика.

Если t может принимать любые значения в заданном интервале, то Y(t) называют случайным процессом.

Если t принимает только определенные дискретные значения, то Y(t) называется случайной последовательностью или временным рядом.

Полученная экспериментально последовательность значений Y(t) называется реализацией случайного процесса (или временного ряда).

На рис. приведен пример временного ряда, образованного отклонениями Y размеров деталей, обработанных на токарно-револьверном автомате.

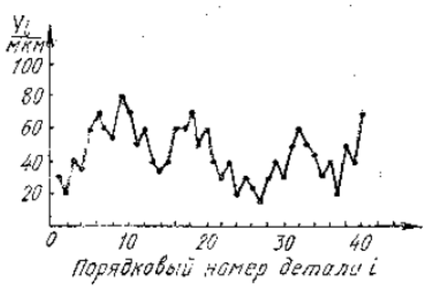


Рис. Временной ряд отклонений размеров деталей, обработанных на токарно-револьверном автомате

Пример временного ряда (изменение размеров деталей, обработанных на автомате)

Наиболее важным свойством случайной функции, определяющим возможность применения тех или иных методов исследования, является зависимость или независимость ее свойств от начала отсчета времени.

В соответствии с этим различают стационарные и нестационарные случайные функции.

Для стационарной случайной функции первого типа все ее характеристики зависят только от взаимного расположения значений аргумента, а не от самих значений.

На рис. ниже, показаны примеры реализаций стационарной и нестационарных случайных функций.

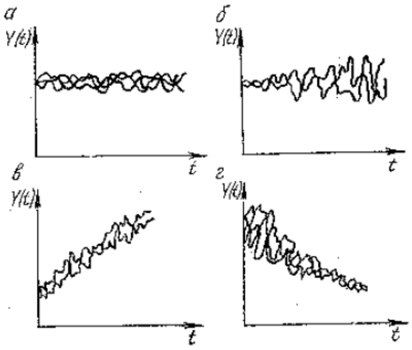


Рис. Реализации случайных функций:
а – стационарной; б, в, г – нестационарных

У нестационарных случайных функций при изменении аргумента изменяется рассеяние значений Y(t) (рис.1.4 б), положение его центра группирования (рис.2.2 в) или обе характеристики (рис.2.2 г).

При наличии множества реализаций случайной функции совокупность ее значений при фиксированном значении аргумента образует множество случайных величин, числовыми характеристиками которых является математическое ожидание M[Y(t)] и дисперсия D[Y(t)].

Обе эти характеристики являются неслучайными функциями аргумента. Для стационарных случайных процессов и временных рядов:

$$M\left[Y(t)\right] = const;\quad D\left[Y(t)\right] = cons.$$

Связь значений случайной функции при разных значениях аргумента характеризуется корреляционной функцией:

$$K(t_1, t_2) = M\left\{\left\{Y(t_1) - M\left[Y(t_1)\right]\right\}\left\{Y(t_2) - M\left[Y(t_2)\right]\right\}\right\}.$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит только от сдвига значений аргумента.

При анализе случайных функций обычно используется предположение об эргодичности изучаемых процессов. Процесс называют эргодическим по отношению к какой-либо его характеристике (математическое ожидание, дисперсия), если ее значение по множеству реализаций совпадает со значением по множеству значений аргумента.

Свойство эргодичности позволяет оценивать выборочные характеристики случайной функции по одной реализации. Для стационарных временных рядов оценкой M[Y(t)] будет среднее арифметическое значение:

$$\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i,$$

оценкой дисперсии D[Y(t)]:

$$S^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2,$$

а оценкой корреляционной функции:

$$K(\tau)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})(Y_{i+\tau}-\overline{Y}),$$

$$\tau=1,2,\dots,n.$$

Для сравнения свойств временных рядов с разными масштабами измерения используют нормированную корреляционную функцию:

$$r(\tau)=K(\tau)/S^2.$$

Добавление к случайной функции Y(t) неслучайной величины Y0 или неслучайной функции φ(t) не влияет на значение корреляционной функции.

Раздел 2. Статистическая проверка гипотез.

Тема 2.1. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению (лекция-дискуссия – 2 час.)

Статистическая гипотеза – предположение относительно статистических параметров генеральной совокупности или закона распределения случайных величин, проверяемое на основе выборочных данных.

Основная проверяемая гипотеза (нулевая гипотеза) обычно обозначается H0. Одновременно формулируется **альтернативная** или **конкурирующая гипотеза** H1.

Например, если проверяется равенство математического ожидания генеральной совокупности некоторому значению μ0, нулевая гипотеза H0 - M(Y)=μ0, альтернативная гипотеза H0 - M(Y)≠μ0.

Критерием статистической гипотезы называют правило, позволяющее принять или отвергнуть гипотезу на основании выборки из генеральной совокупности.

Принимая или отклоняя гипотезу H0, можно допустить ошибки двух видов. Ошибка первого рода состоит в том, что гипотеза H0 отвергается, в то время как в действительности она верна, ошибка второго рода – гипотеза H0 принимается, в то время как верна гипотеза H1.

Вероятность ошибки первого рода обозначается α. Ее часто называют уровнем значимости критерия гипотезы.

Вероятность ошибки второго рода обозначается β.

Вероятность 1-β принятия гипотезы H1, когда она верна, называется **мощностью критерия гипотезы** H0 относительно альтернативной гипотезы H1.

Очевидно, что при проверке гипотезы H0 относительно альтернативной гипотезы H1 лучшим является тот критерий, который обеспечивает наибольшую мощность при том же самом уровне значимости α.

Пусть сформулирована нулевая гипотеза (H0) M(Y)=μ0 и альтернативная (H1) M(Y)≠μо.

Выборка наблюдений объемом m для проверки нулевой гипотезы осуществляется из генеральной совокупности значений случайной величины Y, распределенных по нормальному закону.

Оценкой математического ожидания по выборке будет среднее арифметическое y:

$$\bar{y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}y_i,$$

а оценкой дисперсии:

$$S^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2.$$

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$t_H=\frac{\left|\bar{y}-\mu_0\right|}{S\sqrt{m}}.$$

Критическое значение критерия tк определяется для выбранной доверительной вероятности P=1 – α и заданного объема выборки m из таблицы критических значений критерия Стьюдента.

При tн<tк можно считать, что данные выборки не противоречат нулевой гипотезе. Если tн>tк, то гипотеза отвергается.

Тема 2.2. Проверка гипотезы о равенстве средних значений (лекция-дискуссия – 1 час.)

Пусть выборки наблюдений объемом m1 и m2 берутся из двух генеральных совокупностей с нормальным распределением, причем дисперсии генеральных совокупностей равны.

Необходимо проверить гипотезу H0 о равенстве математических ожиданий M(Y1) = M (Y2).

По данным выборок определяются оценки математических ожиданий и дисперсий: $\overline{y_1},\ \overline{y_2},\ S_1^2\ и\ S_2^2.$

Объединенная оценка дисперсии генеральных совокупностей:

$$S^2=\left[S_1^2(m_1-1)+S_2^2(m_2-1)\right]/(m_1+m_2-1).$$

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$t_H=\frac{\left|\overline{y_1}-\overline{y_2}\right|}{S}\sqrt{\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}}.$$

Критическое значение критерия определяется для данной доверительной вероятности P и m=ml+m2.

При tн<tк гипотеза принимается; если tн>tк она отвергается.

Пример.

В одинаковых условиях было обработано по 25 втулок развертками диаметром 6 и 10 мм. Результаты измерений показали, что средняя величина разбивки отверстий (разность диаметра развертки и диаметра отверстия) для разверток диаметром 6 мм составляет 10,9 мкм, а диаметром 10 мм – 9,8 мкм. Оценки дисперсий в обоих случаях соответственно 3,8 мкм^2 и 4,76 мкм^2. Необходимо установить, влияет ли диаметр развертки на разбивку отверстия.

Решение.

По формуле:

$$S^2 = \left[S_1^2(m_1 - 1) + S_2^2(m_2 - 1)\right] / (m_1 + m_2 - 1)$$

$$S^2 = \frac{3{,}8 \cdot 24 + 4{,}76 \cdot 24}{49} = 4{,}19;$$

По формуле:

$$t_H = \frac{\left|\overline{y_1} - \overline{y_2}\right|}{S} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}.$$

$$t_H = \frac{10{,}9 - 9{,}8}{\sqrt{4{,}19}} \sqrt{\frac{25 \cdot 25}{25 + 25}} = 1{,}9.$$

По таблице критических значений критерия Стьюдента при Р = 0,95 и m = 50 находим tк= 2,01.

Поскольку tн<tк (1,9<2,01), можно считать, что изменение диаметра раз-вертки в пределах от 6 до 10 мм не оказывает существенного влияния на величину разбивки развернутого отверстия.

Тема 2.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий (лекция-дискуссия – 1 час.)

При обработке экспериментальных данных часто требуется выяснить вопрос об однородности выборочных дисперсий, т.е. их равенстве дисперсии генеральной совокупности.

Пусть для двух независимых выборок из нормальной генеральной совокупности с объемами m1 и m2 вычислены оценки дисперсий согласно формул:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$\text{или} \quad S = R_m / d_m.$$

Требуется проверить нулевую гипотезу(Н0) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ относительно альтернативной гипотезы (Н1) $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Проверка проводится при помощи **критерия Фишера F.**

Наблюдаемое значение критерия:

$$F_H = S_1^2 / S_2^2 \quad \left(S_1^2 > S_2^2\right)$$

сравнивается с критическим Fк, которое определяется из таблицы критических значений критерия Фишера F для выбранных доверительной вероятности и m1 и m2. Если Fн<Fк, то выборочные данные не противоречат нулевой гипотезе.

При анализе выборочных данных могут выдвигаться гипотезы об однородности дисперсий в нескольких выборках**.**

В этом случае можно использовать **критерий Кохрена.**

Наблюдаемое значение критерия G_H определяется по формуле:

$$G_H = \frac{S_{i\max}^2}{\sum_{i=1}^{n} S_i^2},$$

Где $S_{i\max}^2$ - максимальная оценка дисперсии среди n сравниваемых дисперсий (все n выборок имеют одинаковый объем m).

Критическое значение критерия определяется из таблицы критических значений критерия Кохрена в зависимости от принятых доверительной вероятности Р, объема выборок m и их числа n.

Пример.

В одинаковых условиях было обработано по 25 втулок развертками диаметром 6 и 10 мм. Результаты измерений показали, что средняя величина разбивки отверстий (разность диаметра развертки и диаметра отверстия) для разверток диаметром 6 мм составляет 10,9 мкм, а диаметром 10 мм – 9,8 мкм. Оценки дисперсий в обоих случаях соответственно 3,8 мкм2 и 4,76 мкм2.

Необходимо проверить гипотезу о равенстве дисперсий.

Решение.

По формуле

$$F_H = S_1^2 / S_2^2 \quad \left(S_1^2 > S_2^2\right)$$

определяем наблюдаемое значение критерия Фишера: Fн=4,76/3,8=1,25.

Из таблицы критических значений критерия Кохрена для Р = 0,95, m1 – m2=20 находим Fк=2,16, а для m1=m2=30 – Fк= ,84.

Искомое значение Fк для m1 = m2 = 25 находим линейной интерполяцией:

$$F_k = (1{,}84 + 2{,}16)/2 = 2.$$

Так как Fн<Fк (1,25<2), нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается.

Тема 2.4. Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке (лекция-дискуссия – 1 час.)

До статистической обработки результатов измерения отклика необходимо убедиться в том, что они являются стохастически независимыми.

Альтернативной гипотезой может быть предположение о наличии монотонного или циклического смещения (дрейфа) значения отклика, вызванного неконтролируемым фактором.

Подобный случай может иметь место при анализе размеров деталей, обрабатываемых на настроенном станке, когда вследствие изнашивания инструмента или нагрева станка центр группирования размеров постепенно смещается при неизменной стандартной погрешности.

Наиболее мощным критерием проверки нулевой гипотезы будет критерий последовательных разностей τ.

Наблюдаемое значение критерия:

$$\tau_H = c^2 / S^2,$$

$$c^2 = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \left(Y_{i+1} - Y_i\right)^2,$$

где m – объем выборки; i – порядковый номер измерения отклика в выборке; S^2 – оценка дисперсии, вычисляемая по формулам:

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2,$$

$$S = R_m / d_m.,$$

Критическое значение $\tau_к$ определяется из таблицы значений критерия $\tau_к$ в зависимости от принятой доверительной вероятности P и объема выборки m.

Если $\tau_н < \tau_к$, то гипотеза о независимости и случайности измерений в выборке отвергается.

Пример.

По результатам измерения деталей, обработанных на токарно-револьверном автомате, необходимо проверить наличие или отсутствие дрейфа размеров.

Объем выборки m = 40.

Решение.

$$\bar{y} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} Y_i = 45 \text{ мкм}, \quad S^2 = \frac{1}{40-1} \sum_{i=1}^{40} (Y_i - \bar{y})^2 = 267{,}95 \text{ мкм}^2,$$

$$c^2 = \frac{1}{2(40-1)} \sum_{i=1}^{39} \left(Y_{i+1} - Y_i\right)^2 = 114{,}74 \text{ мкм}^2, \quad \tau_H = 114{,}74 / 267{,}95 = 0{,}428.$$

Из таблицы значений критерия $\tau_к$ для т = 40 и P = 0,95 получаем $\tau_к$=0,742.

Так как $\tau_н < \tau_к$ (0,428<0,742), гипотезу, об отсутствии дрейфа следует отклонить.

Следовательно, размер обрабатываемых деталей зависит от неучтенного фактора, вызвавшего циклическое смещение центра группирования размеров.

Раздел 3. Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ

Тема 3.1. Дисперсионный анализ (лекция-дискуссия – 2 час.)

Дисперсионный анализ предназначен для выявления степени влияния контролируемых факторов на отклик. В зависимости от количества факторов, включенных в анализ, различают однофакторный, двухфакторный и многофакторный дисперсионный анализ. Проведение дисперсионного анализа возможно, если результаты измерений являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения с одинаковыми дисперсиями.

Однофакторный дисперсионный анализ.

При однофакторном дисперсионном анализе выявляется степень влияния одного фактора X на математическое ожидание отклика M(Y).

Фактор может быть количественным (скорость резания, размер заготовки и т.д.) или качественным (модель станка, марка инструментального материала и т.д.).

В процессе эксперимента фактор поддерживают на n уровнях. На каждом уровне фактора проводится m дублирующих опытов. Значение m может быть одинаковым или разным для каждого из уровней.

Результаты всех измерений удобно представлять в виде таблицы, которую называют матрицей наблюдений (табл.).

Таблица

Матрица наблюдений

Номер уровня фактора	Уровень фактора	Наблюдения	Число дублирующих опытов
1	X_1	$Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1j}, \ldots, Y_{1m1}$	m_1
2	X_2	$Y_{21}, Y_{22}, \ldots, Y_{2j}, \ldots, Y_{2m2}$	m_2
…	….	. . . .	…
i	X_i	$Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{ij}, \ldots, Y_{imi}$	m_i
…	…	. . . .	…
n	X_n	$Y_{n1}, Y_{n2}, \ldots, Y_{nj}, \ldots, Y_{nmn}$	m_n

Вначале для каждой серии дублирующих опытов вычисляют оценки M(Yi), равные yi, и дисперсии воспроизводимости S^2_{Bi} :

$$\overline{y_i} = \frac{1}{m_i} \sum_{i=1}^{m_i} Y_{ij}; \quad S^2_{Bi} = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{i=1}^{m_i} \left(Y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2$$

Затем проверяют однородность ряда дисперсий S1, S2, ..., Si,…, Sn для каждой пары при помощи критерия Фишера, если mi различны, или при помощи критерия Кохрена, если mi= const.

После подтверждения гипотезы об однородности дисперсий можно приступать к анализу.

При этом полагают, что результат любого измерения Yij - можно представить моделью:

$$Y_{ij} = \mu + \gamma_i + \varepsilon_{ij},$$

где μ — общая средняя; γ_i — отклонение, вызванное изменением контролируемого фактора; ε_{ij} — отклонение, вызванное неконтролируемыми факторами.

Задача дисперсионного анализа состоит в оценке существенности влияния изменения уровня фактора.

Влияние неконтролируемых факторов, т.е. вклад ε_{ij}, можно оценить средней дисперсией воспроизводимости:

$$S_B^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_i} S_{Bi}^2.$$

Общее рассеивание значений отклика, вызванное как контролируемым, так и неконтролируемыми факторами, оценивается полной (или общей) дисперсией.

Рассеивание значений отклика, вызванное контролируемым фактором, оценивается дисперсией:

$$S^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overline{y_i} - \mu\right)^2$$

Для выявления степени влияния фактора X и сопоставления ее с разбросом, вызванным случайными, неконтролируемыми причинами, проверяют однородность дисперсий S(X) и Sв рассмотренными ранее методами.

Если отношение Fн окажется меньше критического Fк, найденного для заданной доверительной вероятности P и числа степеней свободы fx = n – 1 и f= N – n, то влияние фактора X несущественно, и все полученные результаты измерений принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами σ2 и M (У), точечные оценки которых равны соответственно So и |μ.

Чтобы определить Fк по таблице критических значений критерия Фишера следует принять m1 = fx + 1 и m2 = fв + 1.

При Fн > Fк влияние фактора существенно.

Считается, что в данном случае есть n нормально распределенных совокупностей, каждая из которых имеет одну и ту же дисперсию σ2 и соответствующее математическое ожидание μi.

Точечной оценкой σ2 в данном случае является Sв, а математического ожидания - yi.

Оценку дисперсии средних значений, вызванную влиянием исследуемого фактора X, производят по формуле:

$$S_\mu^2 = \frac{n-1}{N}\left[S^2(X) - S_B^2\right].$$

Пример.

Требуется оценить качество пяти марок СОЖ, используемых для бесцентрового шлифования. Критерием качества выбрана шероховатость деталей, прошлифованных при одинаковых режимах.

Решение.

Марки СОЖ ранжированы цифрами натурального ряда 1...5. Результаты опытов приведены в матрице наблюдений:

Таблица

Матрица наблюдений

Номер уровня фактора (марки СОЖ)	Уровень фактора	Значения R_a в опытах					
		1	2	3	4	5	6
1	X_1	0,72	0,6	0,65	0,32	0,8	0,52
2	X_2	0,15	0,62	0,22	0,4	0,25	0,3
3	X_3	0,45	0,3	0,5	0,58	0,48	0,32
4	X_4	1,2	0,92	0,72	0,8	1	0,8
5	X_5	0,58	0,9	0,7	1	0,48	0,6

По формуле:

$$\overline{y_i} = \frac{1}{m_i}\sum_{i=1}^{m_i} Y_{ij}; \quad S_{Bi}^2 = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{i=1}^{m_i}\left(Y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2$$

получены: yi = 0,6; 0,32; 0,44; 0,91; 0,71; Si = 0,028; 0,028; 0,012; 0,031; 0,04.

Однородность дисперсий проверяем при помощи критерия Кохрена:

$$G_H = \frac{S_{i\max}^2}{\sum_{i=1}^{n} S_i^2},$$

$$G_H = \frac{0{,}04}{\sum_{i=1}^{b} S_i^2} = 0{,}29.$$

Согласно таблице критических значений критерия Кохрена, при m = 6, n= 5 и P = 0,95 Gк = 0,507.

Поскольку Gн < Gк, то разницу между дисперсиями можно считать незначимой и принять нулевую гипотезу. По формуле:

$$S_B^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_i} S_{Bi}^2.$$

$$S_B^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} S_i^2 = 0{,}0278.$$

а согласно формуле

$$N = \sum_{i=1}^{n} m_i; \quad \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{y_i}.$$

и формуле

$$S^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\overline{y_i} - \mu)^2.$$

$$\mu = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\overline{y_i} = 0{,}596; \quad S^2(X) = \frac{5}{6-1}\sum_{i=1}^{5}(\overline{y_i} - \mu)^2 = 0{,}212.$$

Наблюдаемое значение критерия Фишера Fн = 0,212/0,0278 = 7,63. Число степеней свободы fx = 5-l=4; fв =30 – 5 = 25.

По таблице критических значений Фишера при P=0,95, m1 = 5 и m2=26 находим Fк ~ 2,74.

Поскольку Fн>Fк (7,63>2,74), то изменение шероховатости детали при изменении марки СОЖ следует считать значимым.

Согласно формуле:

$$S_\mu^2 = \frac{n-1}{N}\left[S^2(X) - S_B^2\right]$$

$$S_\mu^2 = 4(0{,}212 - 0{,}0278)/30 = 0{,}0246.$$

Для более глубокого анализа рекомендуется оценить значимость различия влияния СОЖ марок 1 и 3, которые обеспечивают минимальную высоту микронеровностей. Это делается при помощи критерия Стьюдейта.

Двухфакторный дисперсионный анализ.

В данном случае при оценке степени влияния двух одновременно действующих факторов X1 и X2 предполагается, что каждый фактор изменяется независимо от другого.

В процессе эксперимента первый фактор поддерживается на n уровнях, а второй – на r уровнях.

Для каждого сочетания i-го уровня фактора Xi и j-го уровня фактора X2 проводится mij дублирующих опытов.

В частном случае mij=1 или mij = m.

Результаты опытов:

Таблица

Матрица наблюдений

X_2 / X_1	X_{21}	X_{22}	. . .	X_{2j}	. . .	X_{2r}
X_{11}	$\overline{Y_{11}}$	$\overline{Y_{12}}$	. . .	$\overline{Y_{1j}}$	. . .	$\overline{Y_{1r}}$
X_{12}	$\overline{Y_{21}}$	$\overline{Y_{22}}$	. . .	$\overline{Y_{2j}}$	. . .	$\overline{Y_{2r}}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
X_{1i}	$\overline{Y_{i1}}$	$\overline{Y_{i2}}$	. . .	$\overline{Y_{ij}}$	. . .	$\overline{Y_{ir}}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
X_{1n}	$\overline{Y_{n1}}$	$\overline{Y_{n2}}$	. . .	$\overline{Y_{nj}}$	. . .	$\overline{Y_{nr}}$

где в (i, j)-й ячейке записывается матрица наблюдений:

$$\overline{Y_{ij}} = \begin{pmatrix} Y_{ij1} \\ Y_{ij2} \\ \dots \\ Y_{ijm} \end{pmatrix}.$$

Результаты любого наблюдения можно представить моделью:

$$Y_{ij\upsilon} = \mu + \gamma_{i\upsilon} + g_{i\upsilon} + \nu_{ij} + \varepsilon_{ij\upsilon},$$

где μ – общая средняя; γiv – отклонение, вызванное влиянием первого факто-ра на i-м уровне в v-м дублирующем опыте; gjv – отклонение, вызванное вли-янием второго фактора на j-м уровне; vij – отклонение за счет взаимодей-ствия факторов; εijv – отклонение, вызванное влиянием неконтролируемых факторов.

На первом этапе для каждой ячейки вычисляются:

$$\overline{y_{ij}} = \frac{1}{m_{ij}} \sum_{\upsilon=1}^{m_{ij}} Y_{ij\upsilon}; \quad S_{ij}^2 = \frac{1}{m_{ij}-1} \sum_{\upsilon=1}^{m_{ij}} \left(Y_{ij\upsilon} - \overline{y_{ij}}\right)$$

Затем проверяется однородность полученного ряда дисперсий. После подтверждения нулевой гипотезы приступают к вычислениям средних по строкам и столбцам матрицы наблюдений (табл.):

Таблица

X_2 / X_1	X_{21}	X_{22}	. . .	X_{2j}	. . .	X_{2r}	Средние по стро-кам
X_{11}	$\overline{y_{11}}$	$\overline{y_{12}}$	. . .	$\overline{y_{1j}}$	. . .	$\overline{y_{1r}}$	$\overline{y_1}$
X_{12}	$\overline{y_{21}}$	$\overline{y_{22}}$	. . .	$\overline{y_{2j}}$	. . .	$\overline{y_{2r}}$	$\overline{y_2}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
X_{1i}	$\overline{y_{i1}}$	$\overline{y_{i2}}$	. . .	$\overline{y_{ij}}$	. . .	$\overline{y_{ir}}$	$\overline{y_i}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
X_{1n}	$\overline{y_{n1}}$	$\overline{y_{n2}}$	. . .	$\overline{y_{nj}}$	. . .	$\overline{y_{nr}}$	$\overline{y_n}$
Средние по столб-цам	$\overline{y_1}'$	$\overline{y_2}'$	. . .	$\overline{y_j}'$	. . .	$\overline{y_r}'$	μ

$$\overline{y_i} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} y_{ij}; \quad \overline{y_j}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{y_{ij}}; \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \overline{y_j}'$$

Средняя дисперсия воспроизводимости:

$$S_B^2 = \frac{1}{nr} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{i=n \\ j=r}} S_{ij}^2;$$

дисперсия изменчивости отклика под влиянием фактора X1:

$$S^2(X_1) = \frac{mr}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{y_i} - \mu\right)^2;$$

дисперсия изменчивости под влиянием фактора X2:

$$S^2(X_2) = \frac{mr}{r-1} \sum_{i=1}^{r} \left(\overline{y_i} - \mu\right)^2;$$

дисперсия за счет взаимодействия факторов X1 и X2:

$$S^2(X_1, X_2) = \frac{m}{(n-1)(r-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \left(\overline{y_{ij}} - \overline{y_i} = \overline{y_j} + \mu\right)^2.$$

Последними двумя формулами можно пользоваться, если количество дублирующих опытов постоянно и равно m.

Значимость влияния факторов X1 и X2, а также их взаимодействия проверяется при помощи критерия Фишера.

Наблюдаемые значения критерия определяются по формулам:

$$F_H(X_1) = S^2(X_1)/S_B^2; \;\; F_H(X_2) = S^2(X_2)/S_B^2; \;\; F_H(X_1, X_2) = S^2(X_1, X_2)/S_B^2,$$

а критические – по таблице критических значений критерия Фишера согласно заданному значению доверительной вероятности P, числу степеней свободы f(X1)=n – l; f(X2)=r – l; f(X1, X2) = (n – 1) (r – 1); fв = nr(m – 1).

В данном случае m2=fв+1; m1=f(X1)+1; m1=f(X2)+1; m1=f(X1,X2)+1.

Если m=1, т. е. при каждом сочетании уровней факторов проводится только один опыт, то анализ можно проводить, если эффект взаимодействия факторов X1 и X2 незначим. Тогда дисперсия воспроизводимости вычисляется по формуле:

$$S^2(X_1, X_2) = \frac{m}{(n-1)(r-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \left(\overline{y_{ij}} - \overline{y_i} = \overline{y_j} + \mu\right)^2.$$

Тема 3.2. Корреляционный анализ (лекция-дискуссия – 1 час.)

Парная корреляция

Основная задача **корреляционного анализа** – выявление значимости связи между значениями различных случайных величин.

Величины, значения которых не зависят от того, какие значения получили некоторые другие величины, называются независимыми от них. Зависимость между величинами (в том числе и случайными), при которых каждому значению одной величины (аргумента) отвечает одно или несколько вполне определенных значений другой, называют соответственно **однозначной** или **многозначной** функциональной зависимостью. Зависимость между величинами, при которой каждому значению одной величины отвечает с соответствующей вероятностью множество возможных значений другой, называют **вероятностной** (стохастической, статистической).

В общем случае вероятностной связи при изменении значения одной величины изменяется условный закон распределения другой.

Если при наличии вероятностной зависимости между двумя величинами с изменением значения одной величины изменяется только математическое ожидание второй (и наоборот), а дисперсия, области возможных значений и тип закона распределения остаются неизменными, то для таких величин характерна корреляционная зависимость.

Примерами корреляционной связи являются зависимости:

• между пределами прочности и текучести стали определенной марки;

• между погрешностью размера и погрешностью формы поверхности детали, обработанной определенным методом;

• между температурой испытания и ударной вязкостью стали;

• между усилием прижима ролика и шероховатостью накатанной детали.

В первых двух примерах имеет место корреляционная связь между двумя откликами, а в третьем и четвертом – между фактором, который является случайной величиной (в связи с погрешностью измерения), и откликом.

Пусть X и Y – случайные переменные, имеющие нормальное распределение.

Силу линейной статистической связи между ними можно оценить **коэффициентом корреляции:**

$$\rho = M\left[\frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}}\right]\left[\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right],$$

который принимает значения в интервале (-1, +1) и не зависит от выбора начала отсчета и единиц величин X и Y. Чем больше отличается от нуля коэффициент корреляции, тем сильнее зависимость между величинами X и Y.

Коэффициент корреляции независимых величин равен нулю. Однако обратное утверждение не всегда является верным, потому что на коэффициент корреляции оказывает влияние также отклонение от линейности связи.

Характеристикой **нелинейной корреляционной** связи является **корреляционное отношение:**

$$\eta_\tau^2 = \left\{M\left[M\left(Y|X = x\right) - M\left(Y\right)\right]^2\right\} / M\left[Y - M\left(Y\right)\right]^2,$$

где M(Y|X=x) – условное математическое ожидание случайной переменной Y, рассматриваемое как функция x.

Оценкой коэффициента корреляции является значение коэффициента r. Для его вычисления необходимо знать оценки математических ожиданий M(X) и M(Y), а также дисперсий D(X) и D(Y).

Если выполнено m наблюдений:

$$r = \left[\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)\right] / \left[(m-1)S(X)S(Y)\right].$$

При относительно небольшом m удобно пользоваться следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) = \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} Y_i;\\
(m-1)S^2(X) = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2;\\
(m-1)S^2(Y) = \sum_{i=1}^{m} Y_i^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i\right)^2.
\end{aligned}\right]$$

На практике при небольших значениях m для вычисления выборочного коэффициента корреляции r используют поле корреляции и корреляционную таблицу.

Для построения поля корреляции каждую пару случайных чисел Xi, Yi изображают графически в виде точки с координатами (Xi, Yi). По осям координат откладываются интервалы изменения переменных и наносится координатная сетка. Каждую пару переменных из данной выборки изображают точкой в соответствующей клетке. Такое изображение называют полем корреляции.

На рисунке показано поле корреляции для 108 совместных измерений предела прочности σв и предела текучести σт стали ЗОХГСА. Поле корреляции позволяет построить корреляционную таблицу.

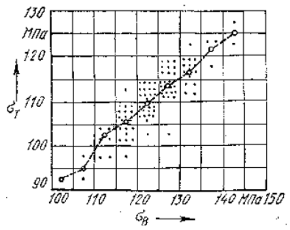


Рис. Путь корреляции

Таблица

Корреляционная таблица

$\sigma_т$ / $\sigma_в$	925 (0)	975 (1)	1025 (2)	1075 (3)	1125 (4)	1175 (5)	1225 (6)	1275 (7)	Итого
1025 (2)	1								1
1075 (3)	1	1							2
1125 (4)		2	4	2					8
1175 (5)		1	7	11	2				20
1225 (6)			1	13	13				27
1275 (7)			1	2	15	9			27
1325 (8)					4	10	1		15
1375 (9)						1	3		4
1425 (10)							1	1	2
Итого	2	5	13	28	33	20	5	1	106

В ячейки, образованные пересечением строк и столбцов, заносятся частоты mxy попадания пар значений (X, Y) в соответствующие интервалы поля корреляции.

В первом столбце и первой строке корреляционной таблицы указывают середины интервалов изменения случайных величин, а в последних – суммы частот mxy по строкам и столбцам (mx и my соответственно).

Формулы для расчета составляющих оценки коэффициента корреляции можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})=\sum_{i=1}^{m}x_i y_i m_{XY}-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m_1}x_i m_X\sum_{i=1}^{m_2}y_i m_Y;$$
$$mS^2(X)=\sum_{i=1}^{m_1}x_i^2 m_X-\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m_1}x_i m_X\right)^2;$$
$$mS^2(Y)=\sum_{i=1}^{m_2}y_i^2 m_Y-\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m_2}y_i m_Y\right)^2,$$

где xi и yi – середины соответствующих интервалов изменения величин; m1 – число столбцов, а m2 – число строк корреляционной таблицы.

Если диапазоны изменения X и Y разделены на равные интервалы (Δx и Δy), то вместо натуральных значений можно использовать целочисленные коды. Для этого нужно выполнить линейное преобразование x и y по формулам:

$$x_{ki}=\frac{x_i-x_{\min}}{\Delta x};\ y_{ki}=\frac{y_i}{\Delta y}-\frac{x_{\min}}{\Delta x}.$$

Тогда коды xi примут значения x_{ki} = 0, 1, 2, ..., i, а коды y_{ki} будут сдвинуты на целое число $\Delta = y_{\min}/\Delta y - x_{\min}/\Delta x.$

Проверка значимости коэффициента корреляции производится при помощи критерия Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия:

Проверка значимости коэффициента корреляции производится при помощи критерия Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия:

$$t_H=r\sqrt{(m-2)/(1-r^2)}.$$

Критическое значение критерия определяется из таблицы по принятому значению доверительной вероятности P и числу степеней свободы f = m – 2. Поэтому при выборе tк следует принимать m=f+l. Если |tн|<tк, то принимается нулевая гипотеза ρ = 0. В противном случае она отклоняется.

Выборочное корреляционное отношение вычисляется по формуле:

$$\eta^2=S^2(Y|x)/\ S^2(Y),$$

где $S^2(Y\backslash x)$ —условная дисперсия:

$$S^2(Y|x)=\frac{1}{m}\sum\left[\overline{y}(x)-\overline{y}\right]^2 m_X;$$

$$\overline{y}(x)=\frac{1}{m_X}\sum y_i m_{XY}.$$

Корреляционное отношение η_T^2 связано с ρ^2 следующим образом:

$$0\le\rho^2\le\eta_T^2\le1.$$

В случае линейной зависимости между переменными $\rho^2=\eta_T^2$. Разность $\eta_T^2-\rho^2$ может служить показателем нелинейной связи.

Многомерный корреляционный анализ

Если имеется многомерная нормально распределенная совокупность с n признаками X1 X2, ..., Xn, то взаимозависимость между ними описывается корреляционной матрицей, под которой понимают матрицу, составленную из парных коэффициентов корреляции:

$$Q_n=\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1k} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \ldots & r_{2k} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{j1} & r_{j2} & r_{j3} & \ldots & r_{jk} & \ldots & r_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \ldots & r_{nk} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

где ρ_{jk} — парные коэффициенты корреляции.

Оценку парного коэффициента корреляции находят по формулам:

$$r=\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})\right]/[(m-1)S(X)S(Y)]$$

в которые вместо xi подставляют xij, а вместо yi – xhi.

В случае многомерной корреляции нельзя ограничиться одной корреляционной матрицей, так как зависимости между признаками сложны.

Для более детального анализа используются частные коэффициенты корреляций различных порядков, позволяющие оценивать связь между двумя признаками при фиксированном значении остальных.

Если исходная совокупность состоит из n признаков, то частный коэффициент корреляции 1-го порядка отражает зависимость между двумя из них при фиксированных значениях l признаков из (n – 2) оставшихся.

Если имеется, например, система из трех признаков X1, X2 и X3, то можно определять частные коэффициенты корреляции только первого порядка, так как в данном случае нельзя фиксировать больше одного признака. Если фиксировать значение X3, то:

$$\rho_{12,3}=(\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23})/\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)},$$

где ρ12,3 – частный коэффициент корреляции между признаками X1 и X2 при фиксированном значении X3; ρ12, ρ13, ρ23 – парные коэффициенты корреляции.

Аналогично определяются ρ13,2 и ρ23,1.

Расчет частных коэффициентов позволяет оценить взаимное влияние признаков.

Если, например, корреляция между X1 и X2 основана только на общем влиянии X3, то ρ12,3 = 0.

Если имеются четыре признака, то можно зафиксировать значения одного или двух признаков. В последнем случае:

$$\rho_{12,34}=\frac{(\rho_{12,4}-\rho_{13,4}\rho_{23,4})}{\sqrt{(1-\rho_{13,4}^2)(1-\rho_{23,4}^2)}}=\frac{(\rho_{12,3}-\rho_{14,3}\rho_{24,3})}{\sqrt{(1-\rho_{14,3}^2)(1-\rho_{24,3}^2)}}.$$

Частные коэффициенты корреляции вычисляются на основании оценок парных коэффициентов корреляции. Так же, как и для парных, проверяется значимость частных коэффициентов корреляции, но при этом число степеней свободы при исключении каждого признака уменьшается на единицу.

Если фиксируется значение одного признака, то в формуле:

$$t_H=r\sqrt{(m-2)/(1-r^2)}$$

вместо (m – 2) следует подставить (m – 3), а если фиксируется значение двух признаков - (m – 4).

Для оценки линейной связи одного из признаков со всеми остальными используется множественный, или совокупный, коэффициент корреляции.

Для случая трех признаков коэффициент множественной корреляции оценивается по формуле:

$$R_{123}=\sqrt{(r_{12}^2+r_{13}^2-2r_{12}r_{13}r_{23})/(1-r_{23}^2)};$$

при этом X2 и X3, зависимость признака X1, от которых оценивает R_{123}, считаются независимыми.

Для случая четырех признаков:

$$R^2_{1234} = 1-(1-r^2_{12})(1-r^2_{13,2})(1-r^2_{14,23}).$$

Значимость коэффициента множественной корреляции определяется при помощи критерия Фишера. Наблюдаемое значение критерия:

$$F_H = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{m-l-2}{l},$$

где m – число наблюдений; l=n – 1; n – число признаков.

Критическое значение критерия Фишера определяется из таблицы согласно принятым доверительной вероятности Р и числу степеней свободы f1= m-l-2; f2=l. Принимается m1 = f1 + l; m2=f2+1.

Корреляционные уравнения

Получение **корреляционных уравнений** – заключительный этап исследования связей между случайными величинами.

Корреляционные уравнения позволяют вычислить вероятные значения одной случайной величины в зависимости от значений других случайных величин.

Вероятным значением случайной величины Y называется ее значение, вычисленное с помощью корреляционного уравнения и близкое к условному математическому ожиданию:

$$M(Y|X_i=x_i)$$

Корреляционное уравнение удобнее всего записывать в виде **разложения по ортогональным многочленам Чебышева**, что позволяет последовательно уточнять математическую модель с вычислением ошибки аппроксимации корреляционного уравнения полиномом данной степени.

Вначале корреляционная модель предполагается линейной:

$$(Y-\overline{Y})S(Y) = r\varepsilon,$$

где $\varepsilon = (X-\overline{X})/[\Delta X \cdot S(X)]$;

r — оценка коэффициента корреляции между Y и X;

S(X), S(Y) —оценки стандартного отклонения случайных величин X и Y;

$\overline{X}$, $\overline{Y}$ — оценки математического ожидания величин;

ΔX — шаг разбиения интервала изменения случайной величины X:

$$x_{Ki} = \frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x};$$

Оценка ошибки определения Y с помощью корреляционного уравнения осуществляется по остаточной дисперсии:

$$S_0^2 = S^2(Y)\cdot(l-r^2).$$

Проверка линейности связи между Y и X производится при помощи критерия линейности:

$$K_1 = \eta^2 - r^2,$$

который вычисляется с ошибкой:

$$S(K_1) = \sqrt{K_1/m}.$$

Значение η^2 вычисляется по формуле:

$$\eta^2 = S^2(Y|x)/\,S^2(Y);$$

Если К1 незначимо отличается от S(K1), то можно остановиться на линейной модели:

$$(Y-\overline{Y})S(Y) = re.$$

Если К1 значимо отличается от нуля, то корреляционное уравнение предполагается в виде полинома второй степени:

$$(Y-\overline{Y})S(Y) = r\varepsilon + \frac{b_1}{a_1}(\varepsilon^2 + r_{30}\varepsilon - 1),$$

где

$$a_1 = r_{40} - r_{30}^2 - 1;\ b_1 = r_{21} - r_{30}r;$$

$$r_{30} = \frac{\mu_{30}}{S^3(X)};\ r_{40} = \frac{\mu_{40}}{S^4(X)};\ r_{21} = \frac{\mu_{21}}{S^3(X)\cdot S(Y)};$$

$$\mu_{30} = M_{30} - 3\mu_{20}M_{10} - M_{10}^3;\ \mu_{20} = M_{20} - M_{10}^2 = S^2(X);$$

$$\mu_{40} = M_{40} - 2\mu_{11}M_{10} - 6\mu_{20}M_{10}^2 - M_{10}^4;$$

$$\mu_{21} = M_{21} - 2\mu_{11}M_{10} - M_{20}M_{01};$$

$$\mu_{11} = M_{12} - M_{10}M_{01};\ M_{10} = \overline{X};\ M_{01} = \overline{Y};$$

$$M_{20} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i;\ M_{30} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} x_i^3 m_i;$$

$$M_{40} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} x_i^4 m_i;\ M_{02} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{l} y_j^2 m_j;$$

$$M_{11} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} x_i y_j m_{XY};\ M_{21} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 y_i m_{XY}.$$

Погрешность определения Y с помощью корреляционного уравнения второго порядка оценивается остаточной дисперсией:

$$S_0^2 = S^2(Y)\cdot(l - r^2 - b_1^2/a_1).$$

Проверка квадратичности связи между Y и X производится при помощи критерия квадратичности:

$$K_2 = K_1 - b_1^2/a_1,$$

который вычисляется с ошибкой:

$$S(K_2) = \sqrt{K_2/m}.$$

Если K_2 значимо отличается от нуля, то корреляционное уравнение можно представить в виде полинома второй степени.

Тема 3.3. Регрессионный анализ (лекция-дискуссия – 2 час.)

Основная задача регрессионного анализа – установление вида и параметров зависимости математического ожидания отклика M(Y) от уровней одного или нескольких факторов X, когда результаты эксперимента представлены в виде независимой выборки пар X1, Y1, X2, Y2, ... , Xn, Yn.

Искомая функция называется моделью регрессионного анализа или регрессионной моделью Y на X, а ее параметры – коэффициентами регрессии.

Не существует стандартных, формализованных методов, позволяющих только на основании результатов эксперимента **установить теоретическую регрессию** – истинную функциональную зависимость, отражающую действительную связь между откликом и контролируемыми факторами, не искаженную влиянием погрешностей измерения и неконтролируемых факторов. Если нет теоретических соображений о виде регрессионной модели, то ее обычно представляют в виде:

$$Y=\sum_{j=0}^{d}\beta_j f_j(\overline{X})+e,$$

где $\overline{X}=|X_1, X_2, ..., X_n|$ —вектор значений факторов; β_j — неизвестные коэффициенты регрессии; $f_j(\overline{X})$ — базисные функции; e — аддитивная погрешность.

Система базисных функций $f_j(\overline{X})$ должна быть выбрана до проведения эксперимента. Наиболее часто в качестве базисных функций используются:

- полиномы;
- системы ортогональных полиномов того или иного класса;
- тригонометрические функции.

Если $\overline{X}=|X_1, X_2, X_3|$, то в виде полинома регрессионная модель имеет вид:

$$Y=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3+\beta_{12}X_1X_2+\beta_{13}X_1X_3+\beta_{23}X_2X_3+\beta_{11}X_1^2+\beta_{22}X_2^2+\beta_{33}X_3^2.$$

Однофакторную регрессионную модель $\overline{X}=|X_1|$ при помощи системы ортогональных полиномов Чебышева можно записать следующим образом (если число равноотстоящих уровней фактора равно 11):

$$Y=\beta_0+\beta_1X+\beta_2(X^2-10)+\beta_3(X^3-17{,}8X)+\beta_4(X^4-25X^2+72).$$

Тригонометрические регрессионные однофакторные модели обычно имеют вид:

$$Y=\beta_0+\sum_{j=1}^{k}\left[\alpha_j\cos(j\omega X)+\gamma_j\sin(j\omega X)\right].$$

По известным измеренным значениям X всегда можно рассчитать и значения любой базисной функции fj(X).

Аппарат классического регрессионного анализа можно применять, если выполняются следующие условия:

• ошибка измерения фактора X, который может быть как неслучайной величиной, принимающей заданные значения, так и случайной контролируемой величиной, пренебрежимо мала;

• погрешность e подчиняется нормальному распределению с математическим ожиданием, равным нулю, и с постоянной дисперсией, не зависящей от уровней фактора;

• значения погрешности e в различных наблюдениях не коррелированы, т.е. r(ei,ej)=0, i≠ j.

Неизвестные коэффициенты регрессии определяются методом наименьших квадратов – путем минимизации суммы квадратов отклонений измеренных значений отклика от получаемых с помощью регрессионной модели, т. е. путем минимизации функции:

$$S=\sum_{g=1}^{n}\left[Y_g-\sum_{j=0}^{d}b_jf_i\left(\overline{X}_g\right)\right]f_j\left(\overline{X}_g\right)=0,$$

где b_j — оценка коэффициента регрессии β_j; n — число наблюдений (опытов).

После преобразования получается система линейных уравнений относительно искомых оценок b_j:

$$\left.\begin{array}{l}b_0\sum f_0^2+b_1\sum f_0f_1+b_2\sum f_0f_2+\ldots+b_d\sum f_0f_d=\sum Yf_0;\\ b_0\sum f_0f_1+b_1\sum f_1^2+b_2\sum f_1f_2+\ldots+b_d\sum f_1f_d=\sum Yf_1;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_0\sum f_0f_d+b_1\sum f_1f_d+b_2\sum f_2f_d+\ldots+b_d\sum f_d^2=\sum Yf_d,\end{array}\right\},$$

где суммирование производится по всем n опытам; $f_j=f_j(\underline{X}_g)$; $Y=Y_g$.

Решение системы, обычно называемой системой нормальных уравнений, можно проводить любым известным способом.

Полученные методом наименьших квадратов оценки коэффициентов регрессии bj являются несмещенными и эффективными. Для оценки доверительного интервала и значимости этих оценок необходимо определить дисперсию воспроизводимости и дисперсию оценок bj.

Дисперсию воспроизводимости определяют обычно постановкой дублирующих опытов. Ее оценка вычисляется по формулам:

$$\overline{y}_i=\frac{1}{m_i}\sum_{i=1}^{m_i}Y_{ij};\quad S_{Bi}^2=\frac{1}{m_i-1}\sum_{i=1}^{m_i}\left(Y_{ij}-\overline{y}_i\right)^2.\quad S_B^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_{Bi}^2.$$

Дисперсия оценок j-го коэффициента регрессии:

$$S^2(b_j)=S_B^2C_{ij},$$

где $S_в^2$ — оценка дисперсии воспроизводимости; C_{ij}— элемент матрицы $Ф^{-1}$, обратной информационной.

Информационная матрица Ф составляется из коэффициентов системы нормальных уравнений:

$$Ф=\begin{pmatrix}\sum f_0^2 & \sum f_0f_1 & \cdots & \sum f_0f_d\\ \sum f_0f_1 & \sum f_1^2 & \cdots & \sum f_1f_d\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum f_0f_d & \sum f_1f_d & \cdots & \sum f_d^2\end{pmatrix}.$$

Коэффициент корреляции между коэффициентами регрессии bj и bh определяется по формуле:

$$r\left(b_j,b_h\right)=\frac{S_B}{S(b_j)\cdot S(b_h)}C_{jh}$$

Проверка значимости полученных коэффициентов регрессии сводится к последовательной проверке гипотез:

$$H_0-\beta_j=0,\ H_1-\beta_j\neq 0,\ j=0,1,2,\ldots,d.$$

Для этого вычисляются наблюдаемые значения критерия Стьюдента:

$$t_{Hj}=\left|b_j\right|/S(b_j).$$

Эти значения критерия Стьюдента сравниваются с табличным tк в соответствии с числом степеней свободы f=m-l, если опыты по определению остаточной дисперсии дублировались в одной из точек факторного пространства m раз, или f=n(m-l), если в каждой из n точек факторного пространства дублирование проводилось одинаковое число раз.

Если при выбранной доверительной вероятности P tnj>tк, то нулевая гипотеза отвергается, и коэффициент bj считается статистически значимым.

Так как коэффициенты регрессии бывают связаны между собой, то после отбрасывания незначимого коэффициента bq необходимо провести коррекцию оценок остальных коэффициентов и их дисперсий в соответствии с формулами:

$$b_j^* = b_j - \frac{C_{jq}}{C_{qq}} b_q;\ C_{jk}^* = C_{jk} - \frac{C_{qj} C_{qk}}{C_{qq}};\ S^2(b_j^*) = S_B^2 C_{jj}^*.$$

Доверительные интервалы для значимых коэффициентов регрессии определяются неравенством:

$$b_j^* - t_K S(b_j^*) < \beta_j < b_j^* + t_K S(b_j^*).$$

Проверка адекватности полученной регрессионной модели и функции отклика позволяет оценить правильность выбора вида модели. Для этого сопоставляется дисперсия воспроизводимости, полученная путем реализации дублирующих опытов, и остаточная дисперсия:

$$S_0^2 = \frac{1}{n-(d+1)} \sum_{g=1}^{n} \left(Y_g - \overline{Y}_g\right)^2,$$

где $\overline{Y}_g$ — предсказанное по уравнению регрессии значение отклика в g-м опыте; Y_g — измеренное значение отклика в том же опыте.

Сопоставление производится путем проверки гипотезы о равенстве дисперсий. Наблюдаемое значение критерия Фишера:

$$F_H = S_0^2 / S_B^2$$

сравнивается с табличным $F_к$, которое определяется в соответствии с выбранным значением доверительной вероятности и числами степеней свободы f_1=n-d и f_2=n-1, где d — число параметров модели; m — число дублирующих опытов при определении $S_в^2$.

Условием адекватности модели и функции отклика являются Fн < Fк.

Полный факторный план для трех факторов приведен в таблице

Таблица

Полный факторный план 2^3

Номер опыта μ	x_1	x_2	x_3
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1
4	-1	-1	+1
5	+1	+1	-1
6	-1	+1	-1
7	+1	-1	-1
8	-1	-1	-1

Реализация этого плана позволяет оценить параметры регрессионной модели вида:

$$Y = b_0 + \sum_{j=1}^{3} b_j x_j + \sum_{j=1}^{3} b_{jh} x_j x_h,\ h \neq j.$$

В данном случае:

$$\sum_{j=1}^{3} f_j^{\,2} = N.$$

где N — общее число опытов, и

$$b_j = \left(\sum Y f_j\right) / \sum f_j^2.$$

Свойство плана, задающееся разностью между числом точек спектра плана и числом оцениваемых параметров, называется насыщенностью плана.

План, в котором число точек спектра плана совпадает с числом оцениваемых параметров, называется **насыщенным планом.**

Если применять насыщенные планы, то для регрессионного анализа (оценка адекватности модели, дисперсии и доверительного интервала коэффициентов регрессии), необходимо проведение дублирующих опытов.

Пример.

Определить вид и коэффициенты регрессионной модели, отражающей зависимость радиальной силы F_y(H) от поперечной подачи s (мм/дв. ход) при плоском электрохимическом алмазном шлифовании.

В результате реализации эксперимента получены следующие данные:

s *10^2 2,5 3 3,5 4 4,5 5 5,5 6 6,5 7 7,5 8 8,5 9 9,5
F_y 50 60 67 75 85 86 93 95 100 98 104 103 106 107 108

При каждом значении s проводился один опыт.

Пять дублирующих опытов для оценки дисперсии воспроизводимости проводились при s = 0,05 мм/дв. ход.

Получено, что $S_в^2$ = 0,032.

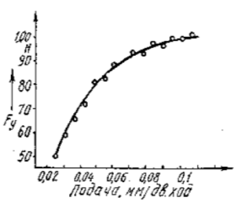
Решение.

По виду кривой, представленной на рисунке, предполагаем, что регрессионная модель имеет вид:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2,$$

где $Y=F_y*10^{-1}$; $X = s*10^2$.

Базисные функции в данном случае имеют вид: f_o=l; f_1=X; f_2=X^2 .



Тогда система нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &b_0 n + b_1 \sum X_i + b_2 \sum X_2^2 = \sum Y_i; \\ &b_0 \sum X_1 + b_1 \sum X_i^2 + b_2 \sum X_i^3 = \sum (XY)_i; \\ &b_0 \sum X_i^2 + b_1 \sum X_i^2 + b_2 \sum X_i^4 = \sum (YX^2)_i. \end{aligned}\right\}$$

После вычисления сумм получим:

$$\left.\begin{aligned} &15b_0 + 90b_1 + 610b_2 = 133{,}7; \\ &90b_0 + 610b_1 + 4500b_2 = 856{,}35; \\ &610b_0 + 4500b_1 + 35144{,}5b_2 = 6051{,}925. \end{aligned}\right\}$$

Решение системы дает: b_0=0,0175; b_1=2,4029; b_2=-0,1358. Информационная матрица в данном случае имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 15 & 90 & 610 \\ 90 & 610 & 4500 \\ 610 & 4500 & 35144.5 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определялась по формуле:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \begin{pmatrix} D_{00} & D_{10} & D_{20} \\ D_{01} & D_{11} & D_{21} \\ D_{02} & D_{12} & D_{22} \end{pmatrix},$$

где D_{jk} — алгебраическое дополнение элемента матрицы в j-ой строке и k-ом столбце.

В результате вычислений получено:

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 4{,}389 & 1{,}544 & 0{,}122 \\ 1{,}544 & 0{,}573 & 0{,}047 \\ 0{,}122 & 0{,}047 & 0{,}0039 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле:

$$S^2(b_j) = S_B^2 C_{ij},$$

$$S^2(b_0) = 0{,}032 \cdot 4{,}389 = 0{,}14;\ S(b_0) = 0{,}375;$$

$$S^2(b_1) = 0{,}032 \cdot 0{,}573 = 0{,}018;\ S(b_1) = 0{,}135;$$

$$S^2(b_2) = 0{,}032 \cdot 0{,}0039 = 0{,}000125;\ S(b_2) = 0{,}0112;$$

Значения r_{jh}:

$$r_{02} = \frac{0{,}032 \cdot 0{,}122}{0{,}375 \cdot 0{,}0112} = 0{,}93;$$

$$r_{01} = \frac{0{,}032 \cdot 1{,}544}{0{,}375 \cdot 0{,}135} = 0{,}976;$$

$$r_{12} = \frac{0{,}032 \cdot 0{,}047}{0{,}375 \cdot 0{,}135} = 0{,}995;$$

вычисленные по формуле:

$$r(b_j, b_h) = \frac{S_B}{S(b_j) \cdot S(b_h)} C_{jh}$$

показывают, что коэффициенты регрессии тесно связаны.

Согласно: $t_{Hj} = |b_j| / S(b_j)$.

$$t_{H0} = 0{,}0175 / 0{,}375 = 0{,}047;\ t_{H1} = 2{,}4029 / 0{,}375 = 17{,}8;$$

$$t_{H2} = 0{,}1358 / 0{,}0112 = 12{,}13.$$

Для P=0,95 и m = 5 $t_к$ = 2,776.

Поскольку $t_{но}$<$t_к$, то коэффициент регрессии b_0 незначим, и можно считать, что $\beta_o = 0$.

Остальные коэффициенты являются значимыми.

По формулам:

$$b_j^* = b_j - \frac{C_{jq}}{C_{qq}} b_q;\ C_{jk}^* = C_{jk} - \frac{C_{qj} C_{qk}}{C_{qq}};\ S^2(b_j^*) = S_B^2 C_{jj}^*;$$

получаем скорректированные значения коэффициентов регрессии:

$$\beta_1^* = 2{,}4029 - \frac{1{,}544}{4{,}389} 0{,}0175 = 2{,}379;\ \ \beta_2^* = -0{,}1358 - \frac{0{,}122}{4{,}389} 0{,}0175 = -0{,}1363;$$

$$C_{11}^* = C_{11} - \frac{C_{10}^2}{C_{00}} = 0{,}573 - \frac{1{,}544^2}{4{,}389} = 0{,}0298;\ C_{22}^* = 0{,}0039 - \frac{0{,}122^2}{4{,}389} = 0{,}0005;$$

$$S^2(b_1^*) = 0{,}032 \cdot 0{,}0298 = 0{,}00095;\ S(b_1^*) = 0{,}031;$$

$$S^2(b_2^*) = 0{,}032 \cdot 0{,}0005 = 1{,}6 \cdot 10^{-5};\ S(b_2^*) = 0{,}004.$$

Согласно

$$b_j^* - t_K S(b_j^*) < \beta_j < b_j^* + t_K S(b_j^*).$$

2,311<β_1<2,483; -0,1474< β_2<-0,1252.

Остаточная дисперсия, определяемая по формуле:

$$S_0^2 = \frac{1}{n - (d+1)} \sum_{g=1}^{n} \left(Y_g - \overline{Y_g}\right)^2,$$

составляет S_0^2 = 0,043.

Наблюдаемое значение критерия Фишера Fн = 0,043/0,032 = 1,344.

Табличное значение критерия определяется при P=0,95; f1=5-2=3; f2=5-1=4.

В данном случае m1= 4 и m2=5.

Поскольку значения m1 и m2 в таблице являются промежуточными (10<m1<15; 4<m2<6), то критическое значение Fк = 6,67 было определено интерполяцией.

Поскольку Fн< Fк, то полученная модель: F = 2379s – 1363s2 адекватно описывает зависимость радиальной составляющей силы от поперечной подачи.

Раздел 4. Планирование эксперимента.

Тема 4.1. Планирование эксперимента при оценке отклика (лекция-дискуссия – 2 час.)

Предпланирование эксперимента – это решение ряда вопросов, позволяющих перейти от замысла к плану эксперимента.

Главным вопросом является четкая постановка задачи эксперимента, которая должна быть формализована. Для этого переходят от реального объекта исследования к его схеме, которая называется моделью «черного ящика», когда на основе известного механизма функционирования объекта исследования можно теоретически получить функцию отклика, а экспериментальному определению подлежат только ее параметры.

На **первом этапе** формализации необходимо выявить все факторы, определяющие характер функционирования объекта и всех откликов.

На **втором этапе** формулируется цель исследования. Это может быть либо построение математической модели исследуемого объекта, либо его оптимизация.

Математическая модель – символическое выражение, с требуемой точностью отражающее те количественные связи, которые характеризуют исследуемый объект. При построении экспериментальной математической модели нужно избегать как чрезмерного упрощения реальных объектов, так и излишней их детализации. В зависимости от количества учитываемых факторов различают два класса моделей — **однофакторные и многофакторные.**

В зависимости от статистической природы факторов и отклика каждая из этих моделей может быть **детерминированной, регрессионной или корреляционной.**

Детерминированная модель может применяться для описания объекта, если факторы и отклик по своей природе являются неслучайными величинами, погрешностями измерения которых можно пренебречь. В данном случае каждому набору значений факторов соответствует одно или четко определенное множество значений отклика.

Для **регрессионной модели** данному набору уровней факторов однозначно соответствует определенный набор параметров закона распределения случайных значений отклика. Отклик является случайной по своей природе величиной, т. е. случайными погрешностями измерения нельзя пренебречь.

Факторы являются неслучайными величинами, уровни которых можно во время измерения отклика зафиксировать с достаточной точностью.

Корреляционная модель отражает связь между случайными по своей природе величинами.

Если вид оператора f модели и значения ее параметров pj не изменяются во времени, то модель называют статической. Модели, не обладающие данным свойством, называются динамическими. **Построить экспериментальную динамическую модель** значительно труднее, чем статическую.

Оптимизация – это процесс поиска такого сочетания уровней факторов (точки ограниченного факторного пространства), при которых отклик, называемый в данном случае параметром оптимизации, принимает экстремальное (максимальное или минимальное в зависимости от смысла задачи) значение.

Чаще всего объект является **многооткликовым**. Например, откликами процесса обработки на токарном автомате являются: производительность, себестоимость продукции (экономические параметры), точность размеров и формы, шероховатость поверхностей обработанных деталей (параметры качества).

В некоторых случаях в качестве параметра оптимизации можно выбрать один из откликов, в то время как остальные служат ограничениями. Тогда оптимизация процесса обработки на токарном автомате будет заключаться, например, в поиске такого сочетания режимов обработки, конструктивных параметров режущих инструментов и параметров точности заготовок, при которых себестоимость обработки будет минимальной. Ограничениями при этом служат заданные значения параметров качества обработанных деталей и минимально допустимая производительность станка.

Во многих случаях задачей оптимизации структуры объекта исследования может быть одновременное улучшение нескольких критериев его качества, причем каждому из критериев может соответствовать своя оптимальная точка факторного пространства. В таких случаях делаются попытки уменьшить число параметров оптимизации путем установления между ними корреляционной связи или априорного ранжирования по значимости. Если эти попытки не дают успеха, то рекомендуется переформулировать задачу или свести ее к последовательности задач, в каждой из которых улучшается один из критериев качества.

На следующем этапе предпланирования эксперимента определяется **область экспериментирования**, т.е. область факторного пространства, где могут размещаться точки, отвечающие условиям проведения опытов. Каждый фактор имеет свою область определения, которая задается либо принципиальными ограничениями, либо по технико-экономическим соображениям, либо исходя из конкретных условий (отсутствие подходящей аппаратуры, установок, инструмента или невозможность значительных отклонений от принятой технологии).

После выбора **области определения** необходимо найти **локальную область** для проведения эксперимента – размах варьирования каждым фактором. Эта задача плохо поддается формализации и решается в каждом конкретном случае исходя из смысла общей задачи исследования.

Основной принцип, положенный в основу теории планирования эксперимента – получение максимума информации при минимальных затратах времени и средств на эксперимент.

Для получения исчерпывающей информации о свойствах функции отклика необходимо проведение опытов во всех точках **области экспериментирования**. Эту разновидность эксперимента называют **экспериментом с полным** перебором всех входных состояний. Такой эксперимент в принципе нереализуем, так как число входных состояний бесконечно велико.

В теории планирования эксперимента отказываются от эксперимента, близкого к эксперименту с полным перебором входных состояний.

При отсутствии априорной информации о свойствах функции отклика нет смысла сразу строить сложную математическую модель объекта, так как это потребует значительных затрат времени и средств, в то время как может оказаться, что в сложной модели нет необходимости.

Поэтому теория планирования эксперимента рекомендует, как правило, начинать с простейшей модели, соответствующей имеющейся априорной информации, что требует проведения сравнительно небольшого числа опытов. Если проверка показывает, что полученная простейшая модель пригодна, то эксперимент заканчивается. Если же модель непригодна, реализуется следующий этап (цикл) эксперимента, позволяющий получить более сложную модель, которую также проверяют на адекватность. Если и в этом случае проверка указывает на неадекватность, то цикл эксперимента повторяют с целью получения еще более сложной модели.

Указанная логика экспериментирования составляет часть общей концепции последовательного эксперимента, согласно которой при проведении эксперимента необходимо использовать последовательную, шаговую стратегию. Согласно этой стратегии после каждого шага производится анализ результатов, на основании которого принимается решение о дальнейших опытах.

Проверка адекватности построенной модели и другие проверки производятся с помощью статистических критериев, за счет чего формализуется процедура принятия решений после каждого этапа исследования, облегчается работа экспериментатора и уменьшается риск принятия необоснованных «волевых» решений при подгонке результатов эксперимента под теоретическую концепцию исследователя.

При проверке адекватности проводится сопоставление систематической погрешности аппроксимизации с погрешностями, связанными с влиянием неконтролируемых факторов и случайными ошибками измерений.

При планировании эксперимента используется принцип рандомизации плана, позволяющей свести эффект некоторого неслучайного фактора, который не поддается учету и контролю, к случайной ошибке. Этот фактор можно рассматривать как случайную величину и учитывать или нейтрализовать его влияние статистически.

Рандомизация плана предполагает случайный порядок реализации опытов (строк матрицы плана), что позволяет устранить в математической модели смещения, вызванные действием неконтролируемых неслучайных факторов.

При других статистических исследованиях рандомизация предусматривает случайный выбор анализируемых элементов из общей совокупности, подлежащей изучению. Тем самым обеспечивается представительность полученной выборки, т. е. гарантируется возможность с помощью измерения свойств конечного набора элементов высказать обоснованное суждение о всей совокупности в целом.

Центральным в теории планирования эксперимента является **принцип оптимальности плана.** В соответствии с ним план эксперимента должен обладать некоторыми оптимальными свойствами с точки зрения определенного, заранее выбранного критерия или группы критериев.

Критерии оптимальности планов эксперимента, целью которого является построение математической модели объекта, можно разбить на три группы:

• первая группа – критерии, связанные с точностью оценок коэффициентов регрессии;
• вторая группа – критерии, связанные с ошибкой в оценке самой модели;
• третья группа – критерии, связанные с трудоемкостью обработки результатов эксперимента.

К **первой группе** относятся критерии A, D и E.

План называется A-оптимальным, если сумма дисперсий оценок коэффициентов регрессии будет минимальной.

План называется D-оптимальным, если определитель его информационной матрицы будет минимальным, т.е. при этом минимизируется обобщенная оценка коэффициентов регрессии.

План называется E-оптимальным, если он минимизирует максимальное значение дисперсии оценок коэффициентов регрессии.

Связь между данными критериями для двухмерной задачи иллюстрирует рисунок, на котором изображен эллипсоид рассеяния оценок коэффициентов регрессии.

Согласно критерию A, минимизируется сумма квадратов сторон описанного прямоугольника, т. е. диагональ прямоугольника, согласно критерию D – площадь эллипса рассеяния, а согласно критерию E, - его большая ось.

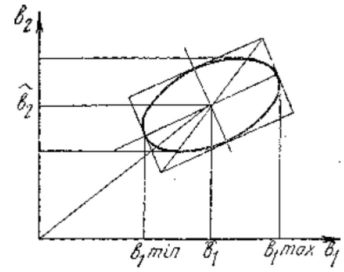


Рис. Рассеяние оценок коэффициентов регрессии

Ко **второй группе** относятся критерии G и Q. **План называется G-оптимальным**, если он минимизирует максимальную дисперсию предсказанных моделью значений отклика. **План называется Q-оптимальным**, если он соответствует минимуму средней дисперсии значений отклика по отношению к предсказанным моделью.

К третьей группе относится критерий ортогональности плана, который требует такого выбора точек факторного пространства для измерений отклика, для которых процедура вычисления оценок параметров модели данного вида была самой простой. В таком случае значения каждого параметра модели вычисляются независимо от значений других параметров.

К планам могут предъявляться и другие требования:

• композиционности;
• униформности;
• ротатабельности.

Композиционность – это свойство плана, позволяющее разделить эксперимент на несколько этапов и постепенно переходить от простых моделей к более сложным, используя результаты предыдущих наблюдений. Например, сначала составляется и реализуется план для оценки коэффициентов регрессии полинома первого порядка. В случае необходимости на втором этапе к имеющемуся плану добавляется несколько измерений в определенных точках факторного пространства, так что все вместе они дают возможность оценить коэффициенты регрессии модели второго порядка и т. д.

Униформность – критерий, требующий, чтобы дисперсия предсказания отклика в некоторой области вокруг центра эксперимента была практически постоянной.

План называется **ротатабельным**, если дисперсия предсказания отклика может быть представлена как функция расстояния до центра плана. Выполнение этого условия делает любое направление от центра плана равнозначным в смысле точности оценки отклика.

Целью планирования в данном случае является **определение минимально необходимого числа** параллельных опытов m для оценки отклика с заданной точностью.

Если отклик является неслучайной величиной, а его оценка – среднее арифметическое значение, то: $\overline{y}$

$$\left|Y-\overline{y}\right| \le t(P,m)\frac{S}{\sqrt{m}}.$$

Задавшись доверительным интервалом или допустимой ошибкой оценки Δ_0, количество опытов должно быть:

$$m \le t^2(P,m)\frac{S^2}{\Delta_0^2}.$$

Если априори известна оценка погрешности измерения отклика S^2, то m следует выбирать из табл. в зависимости от доверительной вероятности P и отношения Δ0/S или, пользуясь таблицей критических значений критерия Стьюдента, подбирать такое значение m, чтобы для данной P соблюдалось неравенство $m(\Delta 0/S)^2 > t(P, m)$.

Таблица

Количество параллельных опытов, необходимых при оценке Y

Δ_0/S	Число опытов при доверительной вероятности			
	0,9	0,95	0,98	0,99
1	5	7	9	11
0,75	7	10	12	16
0,5	13	18	25	31
0,4	19	27	37	46

Если значение S заранее неизвестно, то проводится последовательный эксперимент. Сначала производится серия параллельных опытов, позволяющих в первом приближении оценить S^2. Затем вычисляется m_2. При этом критерий Стьюдента определяется в предположении, что $m = m_1$. При $m_2 > m_1$ после проведения $(m_2 - m_1)$ опытов уточняется значение S и вычисляется m_3. Если $m_3 < m_2$ или m_3 незначительно больше m_2, то испытание заканчивается.

Таблица

Количество параллельных опытов, необходимых при оценке σ(Y)

Δ(σ)/σ	Число опытов при доверительной вероятности			
	0,9	0,95	0,98	0,99
1,5	4	5	6	7
1,25	5	6	8	9
1	6	8	10	12
0,75	10	14	18	22
0,5	28	40	50	60

Когда отклик является случайной величиной, процедура планирования эксперимента для оценки его математического ожидания является такой же, как в случае неслучайного отклика.

Предположим, что задана также требуемая точность оценки стандартного отклонения σ(Y). Параметр точности Δ(σ) в данном случае равен половине доверительного интервала для σ(Y). Тогда требуемое количество параллельных опытов можно определить по таблице в зависимости от доверительной вероятности P и отношения Δ(σ)/σ.

Можно также, выполняя процедуру последовательного планирования, пользоваться формулой:

$$m \le t^2(P,m)\frac{S^2}{2\Delta^2(\sigma)}.$$

Если необходимо определить коэффициент корреляции с заданной точностью Δ(r), то минимально необходимый объем выборки определяется по формуле:

$$m \le \left[\frac{U(P_1)}{\Delta(r)}\right]^2 + 3,$$

где P_1 – доверительная вероятность: P_1=1-(1-P)/2;

P – заданная доверительная вероятность; $U(P_1)$ – квантиль нормированного нормального распределения.

Когда отклик является случайной функцией, целью планирования будет определение необходимой длины t реализации, по которой находятся M[Y(t)] и K(τ). Любую реализацию можно представить в виде ряда Фурье:

$$Y(t) = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(\omega_0 it + \varphi_i).$$

Если задана допустимая относительная погрешность оценки M[Y(t)] – $d_{\max} = D_{\max} / a_{\max}$ (Δmax –допустимая абсолютная погрешность оценки, a_{max} – максимальный размах гармоники), то:

$$t(M) \ge \frac{2}{\delta_{\max}(\omega_{\min} + \omega_{\max})},$$

где ω_{min} и ω_{max} —минимальная и максимальная частоты разложения, определяемые на основании анализа задачи или по нижней и верхней границам частот, пропускаемых измерительным устройством.

Если задана допустимая относительная погрешность оценки корреляционной функции:

$$\delta(K) = \Delta(K) / a_{\max},$$

(Δ(K) – допустимая абсолютная погрешность оценки), то:

$$t(K) \ge \frac{4}{\delta(K)(\omega_{\min} + \omega_{\max})},$$

где t(K) – необходимая длина реализации для оценки K(τ) с заданной точностью.

При анализе характеристик случайных процессов с применением ЭВМ непрерывную реализацию преобразовывают в дискретную с определенным шагом по времени и по амплитуде, т.е. квантуют. Если задана относительная допустимая погрешность аппроксимации δmax, то шаг квантования по времени:

$$t_H \le \delta_{\max} / \omega_{\max}.$$

Пример.

Определить количество параллельных опытов, необходимых для оценки с точностью до 5 мкм среднего квадратичного отклонения размера шлифованных валиков, если после первой серии опытов получены следующие результаты; 19,95; 19,97; 19,94; 19,95; 19,96 мм.

Решение.

Размах в данной выборке R = 30 мкм. Тогда первая оценка σ:

$$S = R / d_m = 30 / 2{,}326 = 12{,}9\,мкм.$$

Подставляя это значение S в формулу:

$$m \text{ J } t^2(P,m)\frac{S^2}{2D^2(s)}$$

при P = 0,95 и m = 5, получим m >2,7762-12,92/(2*52))=25,6.

Выбирая новое значение t при m = 25 и повторяя вычисления, получим: m>2,0642 * 12,92(2*52)) = 14.

При m=14 получим m>2,162*12,92/(2*52) = 15,5.

Окончательно: m=16.

После реализации 11 дополнительных опытов получена новая оценка σ: S=10,4 мкм. При P = 0,95 7,7<σ<16,1, т. е. доверительный интервал равен 8,4 мкм, а его половина Δ(σ) =4,2<5.

4.3. Лабораторные работы

№ п/п	*Номер раздела дисциплины*	*Наименование лабораторной работы*	*Объём (час.)*	*Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)*
1	**1.**	Обработка результатов наблюдений над случайной величиной	8	-
2	**2.**	Выбор объекта исследования, параметра оптимизации, влияющих факторов	8	-
3	**3.**	Дисперсионный анализ	8	-
4	**3.**	Корреляционный анализ	8	-
5	**3.**	Регрессионный анализ	8	-
6	**4.**	Планирование полного факторного эксперимента	8	-
7	**4.**	Планирование дробного факторного эксперимента	8	-
		ИТОГО	**56**	**-**

4.4. Семинары / Практические занятия

Учебным планом не предусмотрено.

4.5. Контрольные мероприятия: курсовой проект (курсовая работа), контрольная работа, РГР, реферат

Учебным планом не предусмотрено.

5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Компетенции ***№, наименование разделов дисциплины***	***Кол-во часов***	***Компетенции***		***Σ комп.***	***$t_{ср}$, час***	***Вид учебных занятий***	***Оценка результатов***
		ОПК	***ПК***				
		1	***16***				
1. Математическое обеспечение эксперимента	14	+	+	2	7,0	Лк, ЛР, СР	Зачет
2. Статистическая проверка гипотез	25	+	+	2	12,5	Лк, ЛР, СР	Зачет
3. Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ	41	+	+	2	20,5	Лк, ЛР, СР	Зачет
4. Планирование эксперимента	28	+	+	2	14	Лк, ЛР, СР	Зачет
всего часов	**108**	**54**	**54**	**2**	**54**		

6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум: учебное пособие / К.В. Щурин, Д.А. Косых. - Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2012. – 185с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761

Лабораторная работа № 1. Стр. 8 – 42.
Лабораторная работа № 2. Стр. 71 – 89.
Лабораторная работа № 3. Стр. 51 – 59.
Лабораторная работа № 4. Стр. 60 – 70.
Лабораторная работа № 5. Стр. 43 – 50.
Лабораторная работа № 6. Стр. 105 – 127.
Лабораторная работа № 7. Стр. 128 – 138.

7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№ п/п	*Наименование издания*	*Вид занятия*	*Кол-во экз. в библ., шт.*	*Обеспеченность, (экз./ чел.)*
Основная литература				
1.	Боярский, М.В. Планирование и организация эксперимента: учебное пособие / М.В. Боярский, Э.А. Анисимов. - Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет. ПГТУ, 2015. – 168с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437056	Лк, ЛР, СР	ЭР	1
2.	Сафин, Р.Г. Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебное пособие / Р.Г. Сафин, Н.Ф. Тимербаев, А.И. Иванов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 154с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=270277	Лк, ЛР, СР	ЭР	1
Дополнительная литература				
3.	Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум: учебное пособие / К.В. Щурин, Д.А. Косых. - Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2012. – 185с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761	Лк, ЛР, СР	ЭР	1

8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.Электронный каталог библиотеки БрГУ http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r_15/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=.

2. Электронная библиотека БрГУ http://ecat.brstu.ru/catalog .

3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru .

4. Электронно-библиотечная система «Издательство «Лань» http://e.lanbook.com .

5. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" http://window.edu.ru .

6. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU http://elibrary.ru .

7. Университетская информационная система РОССИЯ (УИС РОССИЯ) https://uisrussia.msu.ru/ .

8. Национальная электронная библиотека НЭБ http://xn--90ax2c.xn--p1ai/how-to-search /.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

№ п/п	Номер раздела Основные положения раздела, рекомендуемые для СР	Рекомендуемая литература	Форма отчета	Всего часов
1.	**1. Математическое обеспечение эксперимента** 1.1. Числовая оценка отклика	[1], [2], [3]	Зачет, ЛР №1	4
2.	**2. Статистическая проверка гипотез** 2.1. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению 2.2. Проверка гипотезы о равенстве средних значений 2.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий 2.4. Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке	[1], [2], [3]	Зачет, ЛР № 2	12
3.	**3. Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ** 3.1. Дисперсионный анализ 3.2. Корреляционный анализ 3.3. Регрессионный анализ	[1], [2], [3]	Зачет, ЛР № 3…5	12
4.	**4. Планирование эксперимента** 4.1. Планирование эксперимента при оценке отклика	[1], [2], [3]	Зачет, ЛР № 6…7	10
ИТОГО				**38**

9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению лабораторных работ

Лабораторная работа №1
Обработка результатов наблюдений над случайной величиной

Цель работы:
Получить навыки и умения определения числовых характеристик случайной величины с целью идентификации закона распределения.

Содержание работы
Изучение законов распределения случайной величины, освоение методики расчета числовых характеристик случайной величины.

Порядок выполнения работы
1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Получить индивидуальное задание.
3. Обработать результаты наблюдений с целью идентификации закона распределения.
4. Проанализировать полученные результаты и составить отчет.

Форма отчётности: отчёт по лабораторной работе должен содержать: цель работы, краткие теоретические сведения о решаемой задаче, описание работы в соответствии с порядком ее выполнения, выводы.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе
Лабораторная работа выполняется в соответствии с информацией, полученной на лекционном курсе, а также собранной студентом самостоятельно из предложенных источников. Полученные результаты обсуждаются и согласовываются с ведущим преподавателем.

Основная литература

1. Боярский, М.В. Планирование и организация эксперимента: учебное пособие / М.В. Боярский, Э.А. Анисимов. - Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет. ПГТУ, 2015. – 168с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437056
2. Сафин, Р.Г. Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебное пособие / Р.Г. Сафин, Н.Ф. Тимербаев, А.И. Иванов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 154с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=270277

Дополнительная литература

3. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум: учебное пособие / К.В. Щурин, Д.А. Косых. - Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2012. – 185с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761

Контрольные вопросы для самопроверки
1. Что такое случайная величина?
2. Перечислите наиболее распространенные законы распределения?

Лабораторная работа № 2
Выбор объекта исследования, параметра оптимизации, влияющих факторов

Цель работы:
Получение навыков выбора объекта исследования и определение факторов, влияющих на параметр оптимизации.

Содержание работы
Освоение теоретических аспектов выбора объекта исследования, обоснование выбора параметра оптимизации и влияющих факторов, построение модели объекта исследования.

Порядок выполнения работы
1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Получить индивидуальное задание.
3. Выбрать объект исследования.
4. Обосновать выбор параметра оптимизации.

5. Привести все факторы, влияющие на параметр оптимизации.
6. Построить модель объекта исследования.
7. Проанализировать полученные результаты и составить отчет.

Форма отчётности: отчёт по лабораторной работе должен содержать: цель работы, краткие теоретические сведения о решаемой задаче, описание работы в соответствии с порядком ее выполнения, выводы.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Лабораторная работа выполняется в соответствии с информацией, полученной на лекционном курсе, а также собранной студентом самостоятельно из предложенных источников. Полученные результаты обсуждаются и согласовываются с ведущим преподавателем.

Основная литература

1. Боярский, М.В. Планирование и организация эксперимента: учебное пособие / М.В. Боярский, Э.А. Анисимов. - Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет. ПГТУ, 2015. – 168с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437056

2. Сафин, Р.Г. Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебное пособие / Р.Г. Сафин, Н.Ф. Тимербаев, А.И. Иванов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 154с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=270277

Дополнительная литература

3. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум: учебное пособие / К.В. Щурин, Д.А. Косых. - Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2012. – 185с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что такое научное исследование?
2. Перечислите этапы научного исследования?

Лабораторная работа № 3
Дисперсионный анализ

Цель работы:

Получение навыков и умений применения дисперсионного анализа при построении однофакторного и двухфакторного комплекса.

Содержание работы

Изучение теоретических аспектов однофакторного и двухфакторного дисперсионного анализа, выявление влияние одного и двух факторов на исследуемый признак.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Получить индивидуальное задание.
3. Выявить влияние одного фактора на исследуемый признак.
4. Выявить влияние двух факторов на исследуемый признак.
5. Проанализировать полученные результаты и составить отчет.

Форма отчётности: отчёт по лабораторной работе должен содержать: цель работы, краткие теоретические сведения о решаемой задаче, описание работы в соответствии с порядком ее выполнения, выводы.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Лабораторная работа выполняется в соответствии с информацией, полученной на лекционном курсе, а также собранной студентом самостоятельно из предложенных источников. Полученные результаты обсуждаются и согласовываются с ведущим преподавателем.

Основная литература

1. Боярский, М.В. Планирование и организация эксперимента: учебное пособие / М.В. Боярский, Э.А. Анисимов. - Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет. ПГТУ, 2015. – 168с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437056

2. Сафин, Р.Г. Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебное пособие / Р.Г. Сафин, Н.Ф. Тимербаев, А.И. Иванов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 154с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=270277

Дополнительная литература

3. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум: учебное пособие / К.В. Щурин, Д.А. Косых. - Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2012. – 185с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что такое дисперсионный анализ?
3. Перечислите порядок однофакторного дисперсионного анализа.
4. Перечислите порядок двухфакторного дисперсионного анализа.

Лабораторная работа № 4
Корреляционный анализ

Цель работы:

Получение навыков и умений измерения тесноты связи с помощью коэффициента корреляции и корреляционного отношения.

Содержание работы

Изучение теоретических аспектов корреляционного анализа, расчет коэффициента корреляции.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Получить индивидуальное задание.
3. Рассчитать коэффициент корреляции.
4. Проанализировать полученные результаты и составить отчет.

Форма отчётности: отчёт по лабораторной работе должен содержать: цель работы, краткие теоретические сведения о решаемой задаче, описание работы в соответствии с порядком ее выполнения, выводы.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Лабораторная работа выполняется в соответствии с информацией, полученной на лекционном курсе, а также собранной студентом самостоятельно из предложенных источников. Полученные результаты обсуждаются и согласовываются с ведущим преподавателем.

Основная литература

1. Боярский, М.В. Планирование и организация эксперимента: учебное пособие / М.В. Боярский, Э.А. Анисимов. - Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет. ПГТУ, 2015. – 168с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437056

2. Сафин, Р.Г. Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебное пособие / Р.Г. Сафин, Н.Ф. Тимербаев, А.И. Иванов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 154с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=270277

Дополнительная литература

3. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум: учебное пособие / К.В. Щурин, Д.А. Косых. - Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2012. – 185с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Дайте понятие статистической связи?
2. Что такое корреляционная зависимость?
3. Для чего служит коэффициент корреляции?

Лабораторная работа № 5
Регрессионный анализ

Цель работы:

Освоение «способа наименьших квадратов» для аппроксимации опытных данных.

Содержание работы

Освоение теоретических аспектов регрессионного анализа и «способа наименьших квадратов», аппроксимация опытных данных, построение эмпирической и теоретической линии регрессии.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Получить индивидуальное задание.
3. Провести аппроксимацию опытных данных.
4. Построить эмпирическую и теоретическую линии регрессии.
5. Проанализировать полученные результаты и составить отчет.

Форма отчётности: отчёт по лабораторной работе должен содержать: цель работы, краткие теоретические сведения о решаемой задаче, описание работы в соответствии с порядком ее выполнения, выводы.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Лабораторная работа выполняется в соответствии с информацией, полученной на лекционном курсе, а также собранной студентом самостоятельно из предложенных источников. Полученные результаты обсуждаются и согласовываются с ведущим преподавателем.

Основная литература

1. Боярский, М.В. Планирование и организация эксперимента: учебное пособие / М.В. Боярский, Э.А. Анисимов. - Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет. ПГТУ, 2015. – 168с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437056

2. Сафин, Р.Г. Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебное пособие / Р.Г. Сафин, Н.Ф. Тимербаев, А.И. Иванов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 154с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=270277

Дополнительная литература

3. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум: учебное пособие / К.В. Щурин, Д.А. Косых. - Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2012. – 185с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что называется кривой регрессии?
2. В чем сущность «способа наименьших квадратов»?

Лабораторная работа № 6
Планирование полного факторного эксперимента

Цель работы:

Получение навыков планирования полного факторного эксперимента и статистической оценки результатов экспериментов.

Содержание работы

Освоение теоретических аспектов планирования полного факторного эксперимента, выполнение статистической оценки результатов экспериментов.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Получить индивидуальное задание.
3. Выполнить статистическую обработку результатов экспериментов.
4. Проанализировать полученные результаты и составить отчет.

Форма отчётности: отчёт по лабораторной работе должен содержать: цель работы, краткие теоретические сведения о решаемой задаче, описание работы в соответствии с порядком ее выполнения, выводы.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Лабораторная работа выполняется в соответствии с информацией, полученной на лекционном курсе, а также собранной студентом самостоятельно из предложенных источников. Полученные результаты обсуждаются и согласовываются с ведущим преподавателем.

Основная литература

1. Боярский, М.В. Планирование и организация эксперимента: учебное пособие / М.В. Боярский, Э.А. Анисимов. - Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет. ПГТУ, 2015. – 168с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437056

2. Сафин, Р.Г. Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебное пособие / Р.Г. Сафин, Н.Ф. Тимербаев, А.И. Иванов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 154с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=270277

Дополнительная литература

3. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум: учебное пособие / К.В. Щурин, Д.А. Косых. - Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2012. – 185с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что понимают под полным факторным экспериментом?
2. Перечислите этапы статистической обработки результатов эксперимента при равномерном дублировании число экспериментов?

Лабораторная работа № 7
Планирование дробного факторного эксперимента

Цель работы:

Получение навыков планирования дробного факторного эксперимента и статистической оценки результатов экспериментов.

Содержание работы

Освоение теоретических аспектов планирования дробного факторного эксперимента, выполнение статистической оценки результатов экспериментов.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Получить индивидуальное задание.
3. Выполнить статистическую обработку результатов экспериментов.
4. Проанализировать полученные результаты и составить отчет.

Форма отчётности: отчёт по лабораторной работе должен содержать: цель работы, краткие теоретические сведения о решаемой задаче, описание работы в соответствии с порядком ее выполнения, выводы.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к лабораторной работе

Лабораторная работа выполняется в соответствии с информацией, полученной на лекционном курсе, а также собранной студентом самостоятельно из предложенных источников. Полученные результаты обсуждаются и согласовываются с ведущим преподавателем.

Основная литература

1. Боярский, М.В. Планирование и организация эксперимента: учебное пособие / М.В. Боярский, Э.А. Анисимов. - Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет. ПГТУ, 2015. – 168с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437056

2. Сафин, Р.Г. Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебное пособие / Р.Г. Сафин, Н.Ф. Тимербаев, А.И. Иванов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 154с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=270277

Дополнительная литература

3. Щурин, К.В. Методика и практика планирования и организации эксперимента: практикум: учебное пособие / К.В. Щурин, Д.А. Косых. - Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2012. – 185с. [Электронный ресурс]. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=260761

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что понимают под дробным факторным экспериментом?
2. Особенности планирования дробного факторного эксперимента?

9.2. Методические указания по выполнению курсового проекта (курсовой работы), контрольной работы, РГР, реферата

Учебным планом не предусмотрено.

10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Информационно-коммуникативные технологии (ИКТ) используются для:
- получения информации при подготовке к занятиям;
- создания презентационного сопровождения занятий;
- работы в электронной информационной среде.

Стандартное лицензионное программное обеспечение:
1. Microsoft Imagine Premium: Microsoft Windows Professional 7.
2. Microsoft Office 2007 Russian Academic OPEN No Level.
3. Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Security.
4. Adobe Reader.

11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Вид занятия	*Наименование аудитории*	*Перечень основного оборудования*	*№ Лк, ЛР, ПЗ*
Лк	Лекционная / семинарская аудитория	Учебная мебель	-
ЛР	Лекционная / семинарская аудитория	Учебная мебель	-
СР	Читальный зал № 1	Учебная мебель; 10-ПК i5-2500/H67/4Gb (мониторTFT19 Samsung); принтер HP LaserJet P2055D	-

Приложение 1

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
ОПК-1	способность использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда	**1.** Математическое обеспечение эксперимента. **2.** Статистическая проверка гипотез. **3.** Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ. **4.** Планирование эксперимента.	1.1. Числовая оценка отклика. 2.1. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению. 2.2. Проверка гипотезы о равенстве средних значений. 2.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий. 2.4. Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке. 3.1. Дисперсионный анализ. 3.2. Корреляционный анализ. 3.3. Регрессионный анализ. 4.1. Планирование эксперимента при оценке отклика.	Вопросы к зачету 1…9
ПК-16	способность осваивать на практике и совершенствовать технологии, системы и средства машиностроительных производств, участвовать в разработке и внедрении оптимальных технологий изготовления машиностроительных изделий, выполнять мероприятия по выбору и эффективному использованию материалов, оборудования, инструментов, технологической оснастки, средств диагностики, автоматизации, алгоритмов и программ выбора и расчетов параметров технологических процессов для их реализации			

2. Вопросы к зачету

№ п/п	Компетенции		ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ	№ и наименование раздела
	Код	**Определение**		
1.	ОПК-1	способность использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда	**1.** Числовая оценка отклика. **2.** Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению. **3.** Проверка гипотезы о равенстве средних значений. **4.** Проверка гипотезы о равенстве дисперсий. **5.** Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке. **6.** Дисперсионный анализ. **7.** Корреляционный анализ. **8.** Регрессионный анализ. **9.** Планирование эксперимента при оценке отклика.	**1.** Математическое обеспечение эксперимента. **2.** Статистическая проверка гипотез. **3.** Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ. **4.** Планирование эксперимента.
2.	ПК-16	способность осваивать на практике и совершенствовать технологии, системы и средства машиностроительных производств, участвовать в разработке и внедрении оптимальных технологий изготовления машиностроительных изделий, выполнять мероприятия по выбору и эффективному использованию материалов, оборудования, инструментов, технологической оснастки, средств диагностики, автоматизации, алгоритмов и программ выбора и расчетов параметров технологических процессов для их реализации		

3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

<table>
<tr><th>Показатели</th><th>Оценка</th><th>Критерии</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Знать:
ОПК-1
- основные закономерности изготовления машиностроительных изделий;
ПК-16
- методы разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами;
Уметь:
ОПК-1
- применять основные закономерности изготовления машиностроительных изделий;
ПК-16
- выбирать на основе анализа вариантов оптимального прогнозируемых последствий решения;
Владеть:
ОПК-1
- навыками теоретического и экспериментального исследования.
ПК-16
- навыками разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами.</td><td>зачтено</td><td>- даны исчерпывающие и обоснованные ответы на все поставленные вопросы;
- ответы изложены грамотно, уверенно, логично, последовательно;
- опираясь на усвоенные знания, четко увязывает научные положения с практической деятельностью;
- свободно владеет основными понятиями дисциплины.</td></tr>
<tr><td>не зачтено</td><td>- допускает существенные ошибки и неточности при ответе на поставленные вопросы;
- испытывает трудности в практическом применении полученных знаний;
- не может аргументировать научные положения;
- не владеет системой основных понятий дисциплины.</td></tr>
</table>

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности

Дисциплина «Математические модели и обработка экспериментальных данных» направлена на изучение методов разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами и основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности. Процесс прохождения дисциплины включает изучение научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта в области моделирования технологических процессов изготовления, обработки и сборки изделий, а также проведения теоретических и экспериментальных исследований.

Изучение дисциплины «Математические модели и обработка экспериментальных данных» предусматривает:

- лекции;
- лабораторные работы;
- самостоятельную работу;
- зачет.

В ходе освоения раздела 1 «Математическое обеспечение эксперимента» студенты должны уяснить основные понятия и определения, а также математический аппарат, используемый при подготовке и проведении исследований.

В ходе освоения раздела 2 «Статистическая проверка гипотез» студенты должны раскрыть основные принципы проверки гипотез о равенстве математического ожидания заданному значению, о равенстве средних значений, о равенстве дисперсий, а также случайности и независимости результатов измерений в выборке.

В ходе освоения раздела 3 «Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ» студенты должны ознакомиться с методами обработки экспериментальных данных при проведении дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализов для конкретных производственных задач.

В ходе освоения раздела 4 «Планирование эксперимента» студенты должны раскрыть основные правила планирования и проведения теоретических и экспериментальных исследований.

Необходимо овладеть умениями решения задач по разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами на основе теоретического и экспериментального исследования. Получить навыки выбора на основе анализа вариантов оптимального прогнозируемых последствий решения, а также применения основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.

В процессе изучения дисциплины рекомендуется обратить внимание на особенности планирования и проведения теоретических и экспериментальных исследований для решения конкретных производственных задач.

Овладение ключевыми понятиями является необходимым для корректного оперирования общепринятыми терминами при подготовке выпускной квалификационной работы.

При подготовке к зачету рекомендуется особое внимание уделить вопросам математического аппарата, используемого при проведении эксперимента, статистической проверки выдвигаемых гипотез, дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа, а также планирования экспериментальных исследований.

В процессе проведения лабораторных работ происходит закрепление знаний о методах разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами и основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.

Самостоятельную работу необходимо начинать с ознакомления с предложенной основной и дополнительной литературой для последующего рассмотрения вопросов, связанных с математическим моделированием различных производственных процессов и обработкой экспериментальных данных.

Предусмотрено проведение аудиторных занятий в интерактивной, активной, инновационной формах с дискуссией в сочетании с внеаудиторной работой.

Приложение 2

АННОТАЦИЯ
рабочей программы дисциплины
Математические модели и обработка экспериментальных данных

1. Цель и задачи дисциплины

Целью изучения дисциплины является – формирование знаний и навыков разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами, выбора на основе анализа вариантов оптимального прогнозируемых последствий решения, а также способности использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности и методы теоретического и экспериментального исследования.

Задачами изучения дисциплины является:

- изучение методов разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами и основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности;
- формирование навыков выбора на основе анализа вариантов оптимального прогнозируемых последствий решения, а также применения основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности;
- решение задач по разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами на основе теоретического и экспериментального исследования.

2. Структура дисциплины

2.1. Распределение трудоёмкости по отдельным видам учебных занятий, включая самостоятельную работу: лекции – 14 часов; лабораторные работы – 56 часов; самостоятельная работа – 38 часов.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 108 часов, 3 зачетные единицы.

2.2. Основные разделы дисциплины:

1. Математическое обеспечение эксперимента.
2. Статистическая проверка гипотез.
3. Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ.
4. Планирование эксперимента.

3. Планируемые результаты обучения (перечень компетенций)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-1 – способность использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда;

ПК-16 – способность осваивать на практике и совершенствовать технологии, системы и средства машиностроительных производств, участвовать в разработке и внедрении оптимальных технологий изготовления машиностроительных изделий, выполнять мероприятия по выбору и эффективному использованию материалов, оборудования, инструментов, технологической оснастки, средств диагностики, автоматизации, алгоритмов и программ выбора и расчетов параметров технологических процессов для их реализации.

4. Вид промежуточной аттестации: Зачет.

Приложение 3

Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе
на 20___-20___ учебный год

1. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие дополнения:
____
____

2. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие изменения:

____
____
____

Протокол заседания кафедры №____ от «___» __________ 20 ____ г.,
(разработчик)

Заведующий кафедрой ______________________ ________________________
(подпись) *(Ф.И.О.)*

Приложение 4

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

<table>
<tr><th>№ компе-тенции</th><th>Элемент компетенции</th><th>Раздел</th><th>Тема</th><th>ФОС</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ОПК-1</td><td rowspan="2">способность использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда</td><td>1. Математическое обеспечение эксперимента.</td><td>1.1. Числовая оценка отклика.</td><td>Конспект лекций; Отчет по ЛР №1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Статистическая проверка гипотез.</td><td>2.1. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению.</td><td>Конспект лекций; Отчет по ЛР №2</td></tr>
<tr><td rowspan="7">ПК-16</td><td rowspan="7">способность осваивать на практике и совершенствовать технологии, системы и средства машиностроительных производств, участвовать в разработке и внедрении оптимальных технологий изготовления машиностроительных изделий, выполнять мероприятия по выбору и эффективному использованию материалов, оборудования, инструментов, технологической оснастки, средств диагностики, автоматизации, алгоритмов и программ выбора и расчетов параметров технологических процессов для их реализации</td><td>2.2. Проверка гипотезы о равенстве средних значений.</td><td rowspan="3">Конспект лекций</td></tr>
<tr><td>2.3. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий.</td></tr>
<tr><td>2.4. Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3. Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ.</td><td>3.1. Дисперсионный анализ.</td><td>Конспект лекций; Отчет по ЛР №3</td></tr>
<tr><td>3.2. Корреляционный анализ.</td><td>Конспект лекций; Отчет по ЛР №4</td></tr>
<tr><td>3.3. Регрессионный анализ.</td><td>Конспект лекций; Отчет по ЛР №5</td></tr>
<tr><td>4. Планирование эксперимента.</td><td>4.1. Планирование эксперимента при оценке отклика.</td><td>Конспект лекций; Отчет по ЛР №6…7</td></tr>
</table>

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

<table>
<tr><th>Показатели</th><th>Оценка</th><th>Критерии</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Знать:
ОПК-1
- основные закономерности изготовления машиностроительных изделий;
ПК-16
- методы разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами;
Уметь:
ОПК-1
- применять основные закономерности изготовления машиностроительных изделий;
ПК-16
- выбирать на основе анализа вариантов оптимального прогнозируемых последствий решения;
Владеть:
ОПК-1
- навыками теоретического и экспериментального исследования.
ПК-16
- навыками разработки обобщенных вариантов решения проблем, связанных с машиностроительными производствами.</td><td>зачтено</td><td>- даны исчерпывающие и обоснованные ответы на все поставленные вопросы;
- ответы изложены грамотно, уверенно, логично, последовательно;
- опираясь на усвоенные знания, четко увязывает научные положения с практической деятельностью;
- свободно владеет основными понятиями дисциплины.</td></tr>
<tr><td>не зачтено</td><td>- допускает существенные ошибки и неточности при ответе на поставленные вопросы;
- испытывает трудности в практическом применении полученных знаний;
- не может аргументировать научные положения;
- не владеет системой основных понятий дисциплины.</td></tr>
</table>