МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Базовая кафедра экономики и менеджмента**

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
______________Е.И. Луковникова
«_____» декабря 2018 г.

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

# ТЕОРИЯ ИГР

**Б1.В.ДВ.03.02**

## НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ

**27.03.05 Инноватика**

## ПРОФИЛЬ ПОДГОТОВКИ

**Управление инновациями**

Программа прикладного бакалавриата

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

**СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ** **Стр.**


**1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ** ……… 3

**2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ** ……………………………………………………………….……….. 4

**3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ**

3.1 Распределение объёма дисциплины по формам обучения………………...……… 4

3.2 Распределение объёма дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости ………………………………………………………….……… 4

**4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ** ……………………………………….………… 5

4.1 Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий ……………… 5

4.2 Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам ....…………… 5

4.3 Лабораторные работы…………………………………………………………… 13

4.4 Практические занятия……………...…………………………………….……… 13

4.5. Контрольные мероприятия: курсовой проект (курсовая работа), контрольная работа, РГР, реферат…………………………………………………….……… 13

**5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ** …………………………………… 14

**6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ** 15

**7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**…………………………… 15

**8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО – ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ** ………………………………………… 16

**9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**……………………………………………………………………… 16

9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению лабораторных работ/ семинаров / практических работ ………………………………………….……… 17

**10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ** ………………………………………………………….…… 35

**11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ** …………………………………………………………...…… 35

**Приложение 1.** Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине…………………………… 36

**Приложение 2.** Аннотация рабочей программы дисциплины ……………………………. 40

**Приложение 3.** Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе …..……… 41

## 1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

**Вид деятельности выпускника**

Дисциплина охватывает круг вопросов, относящихся к организационно-управленческому виду профессиональной деятельности выпускника в соответствии с компетенциями и видами деятельности, указанными в учебном плане.

**Цель дисциплины**

овладение основами теоретических и практических знаний экономико-математических методов и моделей теории игр для решения задач в сфере инновационной деятельности высокотехнологичных предприятий (организаций) при разработке, принятии и реализации рациональных управленческих решений.

**Основными задачами** дисциплины являются:

– изучение теоретических основ и развитие практических навыков применения методов теории игр при принятии решений в реальных условиях многокритериальности и неполноты информации рыночной экономики, с использованием современных методов экономико-математического моделирования и информационных технологий;

– освоение будущим бакалавром комплекса методов поиска и обоснованного выбора наилучших (оптимальных) решений, раскрытие особенности экономико-математических методов и моделей теории игр при обосновании решений, принимаемых руководителем коллектива предприятия (организации) и возможности математического моделирования при их разработке и реализации;

– развитие у студентов навыков творческого подхода к выбору методов моделирования в рамках теории игр при анализе управленческих (производственных) ситуаций и выработке своевременных обоснованных управленческих решений в области инновационной деятельности на современных высокотехнологичных промышленных предприятиях и в организациях.

| Код компетенции | Содержание компетенций | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| ОПК-7 | способность применять знания математики, физики и естествознания, химии и материаловедения, теории управления и информационные технологии в инновационной деятельности | **знать:**<br>– основные математические модели принятия решений на основе методов моделирования инновационных процессов на основе теории игр<br>**уметь**:<br>– решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений с использованием методов теории игр<br>**владеть:**<br>– математическими, статистическими и количественными методами моделирования инновационных процессов на основе теории игр |
| ПК-13 | способность использовать информационные технологии и инструментальные средства при разработке проектов | **знать:**<br>– современные информационные технологии, используемые при проведении расчетных работ моделей теории игр<br>**уметь**:<br>– готовить расчетные данные и использовать функционал информационных технологий<br>**владеть:**<br>– навыками расчета моделей теории игр с использованием информационных технологий и инструментальных средств |

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.В.ДВ.03.02 Теория игр относится к элективной части.

Дисциплина Теория игр базируется на знаниях, полученных при изучении математики.

Теория игр представляет основу для изучения дисциплины: Основы математического моделирования инновационных процессов; Математические модели и методы .

Такое системное междисциплинарное изучение направлено на достижение требуемого ФГОС уровня подготовки по квалификации бакалавр.

## 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ

### 3.1. Распределение объема дисциплины по формам обучения

| *Форма обучения* | *Курс* | *Семестр* | *Трудоемкость дисциплины в часах* | | | | | | *Курсовая работа (проект), контрольная работа, реферат, РГР* | *Вид промежуточной аттестации* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | *Всего часов* | *Аудиторных часов* | *Лекции* | *Лабораторные работы* | *Практические занятия* | *Самостоятельная работа* | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **Очная** | 2 | 4 | 108 | 51 | 17 | - | 34 | 57 | - | зачет |
| **Заочная** | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| **Заочная** (ускоренное обучение) | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| **Очно-заочная** | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

### 3.2. Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости

| *Вид учебных занятий* | *Трудо-емкость (час.)* | *в т.ч. в интерактивной, активной, инновациионной формах, (час.)* | *Распределение по семестрам, час* |
|---|---|---|---|
| | | | *4* |
| **1** | **2** | **3** | **4** |
| **I. Контактная работа обучающихся с преподавателем (всего)** | 51 | 6 | 51 |
| Лекции (Лк) | 17 | 6 | 17 |
| Практические занятия (ПЗ) | 34 | - | 34 |
| Групповые консультации | + | - | + |
| **II.Самостоятельная работа обучающихся (СР)** | 57 | - | 57 |
| Подготовка к практическим занятиям | 40 | - | 40 |
| Подготовка к зачету в течение семестра | 17 | - | 17 |
| **III. Промежуточная аттестация** зачет | + | - | + |
| Общая трудоемкость дисциплины час. | 108 | - | 108 |
| зач. ед. | 3 | - | 3 |

## 4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1. Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий

**- для очной формы обучения:**

| *№ раз-дела и темы* | *Наименование раздела и тема дисциплины* | *Трудоем-кость, (час.)* | *Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | *учебные занятия* | | *самостоятельная работа обучающихся* |
| | | | *лекции* | *Практические работы* | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **1.** | **Основные понятия теории игр** | **14** | **2** | **0** | **12** |
| **2.** | **Матричные игры и линейное программирование** | **37** | **8** | **17** | **12** |
| **3.** | **Статистические решения** | **57** | **7** | **17** | **33** |
| | **ИТОГО** | **108** | **17** | **34** | **57** |

### 4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам

**Раздел 1. Основные понятия теории игр**

Классические задачи системного анализа – игровые задачи принятия решений в условиях риска и неопределенности. Неопределенными могут быть цели операции, условия выполнения операции, а также сознательные действия противника или иных лиц, от которых зависит успех операции.

Разработаны специальные математические методы, предназначенные для обоснования решений в условиях риска и неопределенности. В некоторых, наиболее простых случаях они позволяют фактически найти и выбрать оптимальное решение. В более сложных случаях они доставляют вспомогательный материал, позволяющий глубже разобраться сложной ситуации, оценить каждое из возможных решений с различных точек зрения и принять решение с учетом его возможных последствий. Одно из важных условий принятий решений в этом случае есть минимизация риска.

При решении ряда практических задач исследования операций приходится анализировать ситуации, где сталкиваются две (или более) «враждующие» стороны, преследующие различные цели, причем результат любого мероприятия каждой стороны зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации можно отнести к конфликтным ситуациям.

Теория игр относится к разделу прикладной математики, исследующему математические модели принятия решений в условиях конфликта, противоречий и неопределенности. Она есть математическая теория конфликтных ситуаций, при помощи которой можно выработать рекомендации по разумному образу действий участников конфликта. Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации без учета второстепенных факторов, строится упрощенная, схематизированная модель ситуации, называемая игрой.

**Игра** ведется по вполне определенным правилам, под которыми понимается:

система условий, регламентирующая возможные варианты действий игроков; объем информации каждой стороны о поведении другой; результат игры, к которому приводит каждая определенная последовательность ходов.

Задача теории игр есть нахождение оптимальной стратегии поведения в условиях конфликта, неопределенности или противодействия какой-то стороны в этой ситуации – независимо от того, сознательно или неосознанно это происходит. Игровые математические модели позволяют не только найти оптимальную стратегию, которая не всегда однозначна, но и оценить каждый вариант решения с различных, иногда противоречивых точек зрения, а также глубже разобраться во всех сложностях и неопределенностях реальной ситуации для принятия продуманного решения.

Теория игр занимается изучением т.н. конфликтных ситуаций, где сталкиваются интересы индивидов, партий, государств и т. п.

Как утверждал Г.Лейбниц, "...и игры заслуживают изучения; и если какой-нибудь проницательный математик посвятит себя их изучению, то получит много важных результатов, ибо нигде человек не показывает столько изобретательности, как в игре ".

Нет математической теории, которая могла бы дать алгоритм любой ре-альной игры, но существуют ситуации, подобные игровым и допускающие математический анализ.

Остановимся на классификации игр.

Интересы участников игры (игроков) могут оказаться несовпадающими и даже противоположными. В последнем случае игра называется *антагонистической*.

В игре могут участвовать два или более игроков. Случай игры с одним участником (пасьянс, управление физическим объектом и т.д.) в сущности является игрой двух лиц, где вторым участником выступает природа (судьба, рок, провидение).

Игроки могут в игре выступать каждый за себя или объединяться в группы. В последнем случае игра называется *коалиционной*.

Игры, в которых игроки осведомлены о состоянии своем и партнеров, а также о прошлом поведении участников игры, относятся к категории игр с *полной информацией* (типичные примеры - шахматы, "крестики-нолики" и т.п.). Большинство же игр протекает в условиях неполной информации, где сведения о состоянии партнеров исчерпываются лишь вероятностными характеристиками (домино, карточные игры, игры против "природы").

Антагонистическую игру, где выигрыш одного коллектива равен проигрышу другого, называют *игрой с нулевой суммой*.

Система правил, однозначно определяющая выбор хода игрока в зависимости от сложившейся ситуации, называется *стратегией*.

Каждая фиксированная стратегия игрока, где любой ситуации сопоставлен конкретный выбор, называется *чистой*. В реальности чаще используются т.н. *смешанные* стратегии, где чистые стратегии смешиваются с некоторыми частотами.

Простейшими являются игры 2 лиц с нулевой суммой.

Пусть в такой игре игрок 1 имеет m выборов и игрок 2 - n выборов. Если игрок 1 делает свой i-й выбор, а игрок 2 - свой j-й выбор, то выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) равен Rij. Такая игра называется *матричной* и матрица $R = [\ R_{ij} \ / \ i=1..m\ ,\ j=1..n\ ]$ называется *матрицей выигрышей* (платежной матрицей).

При ведении игры игрок должен ориентироваться на оптимальную политику партнера и наказывать его за отступления от таковой.

Проведем рассуждения за игрока 1. Если Я воспользуюсь i-м выбором, мой противник для минимизации моего выигрыша сделает тот из своих выборов, который даст min $R_{ij}$. Соответственно, Я должен использовать тот выбор, который гарантирует мне выигрыш, не меньший

$$V_1 = \max_{i=1..m}\ \min_{j=1..n}\ R_{ij}\ .$$

Противник, рассуждая аналогично, приходит к выводу о гарантированном проигрыше, не превышающем

$$V_2 = \max_{i=1..m}\ \min_{j=1..n}\ R_{ij}\ .$$

Если в матрице выигрышей существует элемент $R_{kl} = V_1 = V_2$, то говорят о наличии оптимальной политики "в пространстве чистых стратегий" и оптимальными выборами для игроков соответственно являются выборы k и l. Пару (k, l) называют *седловой* точкой.

<u>Пример 1.</u> Пусть игра определяется матрицей

$$R = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & 10 \end{Vmatrix} \quad , \quad V_1 = \max \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{Vmatrix} = 6 \quad , V_2 = \min [\ 6, 6, 8, 10\ ] = 6.$$

Седловые точки - (4, 1) и (4, 2). Цена игры = 6; оптимальный выбор для игрока 1 - четвертый, для игрока 2 равнозначны первый и второй (*под ценой игры понимают гарантированный выигрыш-проигрыш при оптимальной политике обоих игроков*).

<u>Пример 2.</u> Пусть игра определяется матрицей

$$R = \begin{Vmatrix} 5 & 4 & 3 & 7 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{Vmatrix} \ , \quad V_1 = \max \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} = 3\ , \quad V_2 = \min [\ 7, 7\ 4, 7, 6\ ] = 4.$$

Здесь равенство $V_1 = V_2$ не выполняется; оптимальной чистой стратегии для игроков нет.

При анализе игр часто прибегают к попыткам обнаружить доминирование между строками и столбцами. Так в примере 1 элементы четвертой строки больше элементов других строк: использование выбора 4 выгоднее других выборов при любой политике противника. Противник видит, что в такой ситуации использовать выборы 3 и 4 неразумно.

Использование доминирования т.о. позволяет уменьшить размеры изучаемой матрицы исключением "невыгодных" строк и столбцов.

При отсутствии седловой точки среди чистых стратегий приходится искать таковую среди смешанных.

Если игрок 1 прибегает к своему выбору i с вероятностью $P_i$, а игрок 2 - к своему j-му выбору с вероятностью $Q_j$, то ожидаемый выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) равен $\sum_{i=1}^{m} R_{ij}\ P_i\ Q_j\ = \ P^T R\ Q.$

Основная теорема теории игр (теорема Джона фон Неймана) утверждает, что любая матричная игра с нулевой суммой всегда имеет седловую точку, т.е. существуют векторы P и Q такие, что

$$\max_{P}\ \min_{Q}\ P^T R Q = \min_{Q}\ \max_{P}\ P^T R Q = V,$$

(V - цена игры).

## Раздел 2. Матричные игры и линейное программирование
### *(компьютерная презентация – 6 час)*

Очевидно, что если игрок 1 отступит от оптимальной политики, а игрок 2 будет действовать оптимально, то выигрыш игрока 1 будет меньше цены игры, и если игрок 2 отступит от оптимальной политики при сохранении оптимального поведения игроком 1, то его проигрыш превысит цену игры:

$$P^T R\, Q_{opt} \le V = P_{opt}^T R\, Q_{opt} \le P_{opt}^T R\, Q$$

Рассуждения игрока 1: мне хотелось бы максимизировать цену игры, т.е. мой гарантированный выигрыш, и я должен подобрать систему значений $P_i$ так, чтобы при любом выборе противника мой ожидаемый выигрыш был больше цены игры.

Рассуждения игрока 2: мне хочется уменьшить мой гарантированный проигрыш, т.е. цену игры, и мне надо подобрать значения $Q_j$ так, чтобы при любом выборе противника мой проигрыш был меньше цены игры.

Отсюда возникают две задачи:

максимизировать $V$
при условиях
$$\sum_{i=1}^{m} R_{ij} P_i \ge V,\ j=1..n$$
$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$$
$$P_i \ge 0,\ i=1..m$$

минимизировать $V$
при условиях
$$\sum_{j=1}^{n} R_{ij} Q_j \le V,\ i=1..m$$
$$\sum_{j=1}^{n} Q_j = 1$$
$$Q_j \ge 0,\ j=1..n$$

Легко показать, что эти задачи образуют пару двойственных задач линейного программирования.

Т.о. решение матричной игры сводится к решению пары двойственных линейных программ.

Обратим внимание на то, что при увеличении элементов матрицы R на любую константу C цена игры увеличится на C и это изменение не окажет влияния на искомые вероятности выборов. Таким образом, можно добиться, например, положительности элементов матрицы и, следовательно, цены игры. Поэтому можно допустить, что цена игры V положительна.

В предположении V > 0 проведем замену переменных

$X_i = P_i / V$, $Y_j = Q_j / V$.

Отсюда видно, что

$$V = 1/\sum X_i = 1/\sum Y_j$$

Соответственно, поставленные задачи можно преобразовать к задачам с меньшим числом переменных:

минимизировать
$$\sum_{i=1}^{m} X_i$$
при условиях
$$\sum_{i=1}^{m} R_{ij} X_i \ge 1,\ j=1..n$$
$$X_i \ge 0,\ i=1..m$$

максимизировать
$$\sum_{j=1}^{n} Y_j$$
при условиях
$$\sum_{j=1}^{n} R_{ij} Y_j \le 1,\ i=1..n$$
$$Y_i \ge 0,\ j=1..n$$

Например, для игры с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$$

возникают задачи:

| | |
|---|---|
| максимизировать | минимизировать |
| Y1 + Y2 + Y3 | X1 + X2 + X3 |
| при | при |
| Y1 + 2 Y2 + 3 Y3 □ 1 | X1 + 4 X2 + 2 X3 □ 1 |
| 4 Y1 + Y3 □ 1 | 2 X1 + 3 X3 □ 1 |
| 2 Y1 + 3 Y2 □ 1 | 3 X1 + X2 □ 1 |
| Y1, Y2, Y3 □ 0 | X1, X2, X3 □ 0 |

Решение этих задач симплексным методом дает оптимальные значения

X = {11/37, 4/37, 5/37}, Y = {8/37, 7/37, 5/37}

и экстремумы целевых функций, равные 20/37.

Отсюда V = 37/20, P = {11/20, 4/20, 5/20}, Q = {8/20, 7/20, 5/20}.

### *Итеративный метод решения матричных игр*

Как мы показали выше, игры могут решаться методами линейного программирования. Здесь мы рассмотрим *итеративный метод Брауна-Робинсон*, обычно используемый при решении игр большой размерности.

| Шаг | Выбор $i$ | Суммарный выигрыш | | | Выбор $j$ | Суммарный проигрыш | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 4 | 2 |
| 2 | 2 | 5 | 2 | 4 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 3 | 7 | 5 | 4 | 3 | 6 | 5 | 5 |
| 4 | 1 | 8 | 7 | 7 | 2 | 8 | 5 | 8 |
| 5 | 1 | 9 | 9 | 10 | 1 | 9 | 9 | 10 |
| 6 | 3 | 11 | 12 | 10 | 3 | 12 | 10 | 10 |
| 7 | 1 | 12 | 14 | 13 | 1 | 13 | 14 | 12 |
| 8 | 2 | 16 | 14 | 13 | 3 | 16 | 15 | 12 |
| 9 | 1 | 17 | 16 | 16 | 2 | 18 | 15 | 15 |
| 10 | 1 | 18 | 18 | 19 | 1 | 19 | 19 | 17 |

Используется многократная реализация игры на основе знания предыстории с последовательным совершенствованием стратегий.

Для примера возьмем задачу, которую мы только что решили.

Пусть игрок 1 сделал выбор 1 с ожидаемыми выигрышами 1, 2, 3. Противник, стремясь минимизировать свой проигрыш, прибегнет к выбору 1 с ожиданием проигрыша 1, 4, 2. Игрок 1 в стремлении максимизировать свой выигрыш прибегнет к выбору 2, что даст ему надежду на суммарный выигрыш (1+4, 2+0, 3+1). Но тогда его противник найдет среди этих значений меньшее и прибегнет к выбору 2 с ожидаемым суммарным проигрышем (1+2, 4+0, 2+3) и т.д.

Этот процесс реализуется достаточно большое число раз с последующим поиском частоты использования выборов и усреднением значений выигрышей-проигрышей.

В результате 10 выборов для 1-го игрока частоты составили 0.6, 0.2, 0.2; для игрока 2 - 0.4, 0.3, 0.3; оценка цены игры в диапазоне от 1.7 до 1.9.

Пусть игра задана матрицей A размерности m x n. Каждое разыгрывание игры в чистых стратегиях будет далее называться партией. Метод Брауна-Робинсон — это итеративная процедура построения последовательности пар смешанных стратегий игроков, сходящейся к решению матричной игры. В 1-ой партии оба игрока выбирают произвольную чистую стратегию. Пусть сыграно k партий, причем выбор стратегии в каждой партии запоминается. В (k + 1)-ой партии каждый игрок выбирает ту чистую стратегию, которая максимизирует его ожидаемый выигрыш, если противник играет в соответствии с эмпирическим вероятностным распределением, сформировавшимся за k партий. Оценивается интервал для цены игры и, если он достаточно мал, процесс останавливается. Полученные при этом вероятностные распределения определяют смешанные стратегии игроков.

**Достоинства метода Брауна:**

Этот метод ориентирован на произвольную игру G(m×n).

Не требует условия aij>0.

Легко реализуем программными методами.

Недостатки метода Брауна: скорость сходимости метода быстро уменьшается с ростом размерности матрицы игры. Рассмотрим метод на примере игры G(3×3).

| **Ai \ Bj** | **B1** | **B2** | **B3** |
|---|---|---|---|
| A1 | 7 | 2 | 9 |
| A2 | 2 | 9 | 0 |
| A3 | 9 | 0 | 11 |

SA=(p1,p2,p3)

SB=(q1,q2,q3)

Строится следующая матрица:

| **k** | **i** | **B1** | **B2** | **B3** | **j** | **A1** | **A2** | **A3** | **Vmin** | **Vmax** | **V*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 9 | 0 | 11 | 2 | 2 | 9 | 0 | 0 | 9 | 4.5 |
| 2 | 2 | 11 | 9 | 11 | 2 | 4 | 18 | 0 | 4.5 | 9 | 6.75 |
| 3 | 2 | 13 | 18 | 11 | 3 | 13 | 18 | 11 | 3.67 | 6 | 4.84 |
| 4 | 2 | 13 | 18 | 11 | 3 | 22 | 18 | 22 | … | … | … |
| 5 | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |

где: k – номер партии. i – номер стратегии, выбираемой игроком A. j – номер стратегии, выбираемой игроком B. Bi– накопленный игроком A выигрыш за k партий, при условии, что в данной партии B выбирает стратегию Bi. Aj – накопленный игроком B проигрыш за k партий, при условии, что в данной партии A выбирает стратегию Aj. Vmin – нижняя оценка игры = min (накопленный выигрыш)/k. Vmax – верхняя оценка игры = max (накопленный проигрыш)/k.

Доказано, что V*=(Vmin+Vmix)/2, V* à V при k à ¥ и $p_i^* = \frac{N_i}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} p_i$ $q_j^* = \frac{N_j}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} q_j$

Ni - сколько раз выбирается Ai стратегия.

Nj - сколько раз выбирается Bj стратегия.

Итерационный процесс метода Брауна-Робинсон не является, вообще говоря, монотонным. Кроме того, скорость сходимости метода быстро уменьшается с ростом размерности матрицы игры. Однако он обладает одним неоспоримым преимуществом, которое заключается в исключительной простоте программирования метода.

Начало формы

Размерность платежной матрицы [2 ▾] x [2 ▾] [Далее] [Из Excel]

Конец формы

**ПРИМЕР**. 1. Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.Считаем, что игрок I выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок II выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

| Игроки | B1 | B2 | B3 | a = min(Ai) |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 6 | 1 | 4 | 1 |
| A2 | 2 | 4 | 2 | 2 |
| A3 | 4 | 3 | 5 | 3 |
| b = max(Bi) | 6 | 4 | 5 | |

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры a = max(ai) = 3, которая указывает на максимальную чистую стратегию A3.Верхняя цена игры b = min(bj) = 4.Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как a ≠ b, тогда цена игры находится в пределах 3 <= y <= 4. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии).

| k | i | B1 | B2 | B3 | j | A1 | A2 | A3 | Vmin | Vmax | Vcp |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 3 | 1 | 4 | 5/2 |
| 2 | 2 | 8 | 5 | 6 | 2 | 2 | 8 | 6 | 5/2 | 4 | 13/4 |
| 3 | 2 | 10 | 9 | 8 | 3 | 6 | 10 | 11 | 8/3 | 11/3 | 19/6 |
| 4 | 3 | 14 | 12 | 13 | 2 | 7 | 14 | 14 | 3 | 7/2 | 13/4 |
| 5 | 2 | 16 | 16 | 15 | 3 | 11 | 16 | 19 | 3 | 19/5 | 17/5 |
| 6 | 3 | 20 | 19 | 20 | 2 | 12 | 20 | 22 | 19/6 | 11/3 | 41/12 |
| 7 | 3 | 24 | 22 | 25 | 2 | 13 | 24 | 25 | 22/7 | 25/7 | 47/14 |
| 8 | 3 | 28 | 25 | 30 | 2 | 14 | 28 | 28 | 25/8 | 7/2 | 53/16 |
| 9 | 2 | 30 | 29 | 32 | 2 | 15 | 32 | 31 | 29/9 | 32/9 | 61/18 |
| 10 | 2 | 32 | 33 | 34 | 1 | 21 | 34 | 35 | 16/5 | 7/2 | 67/20 |
| 11 | 3 | 36 | 36 | 39 | 1 | 27 | 36 | 39 | 36/11 | 39/11 | 75/22 |
| 12 | 3 | 40 | 39 | 44 | 2 | 28 | 40 | 42 | 13/4 | 7/2 | 27/8 |
| 13 | 3 | 44 | 42 | 49 | 2 | 29 | 44 | 45 | 42/13 | 45/13 | 87/26 |
| 14 | 3 | 48 | 45 | 54 | 2 | 30 | 48 | 48 | 45/14 | 24/7 | 93/28 |
| 15 | 2 | 50 | 49 | 56 | 2 | 31 | 52 | 51 | 49/15 | 52/15 | 101/30 |
| 16 | 2 | 52 | 53 | 58 | 1 | 37 | 54 | 55 | 13/4 | 55/16 | 107/32 |
| 17 | 3 | 56 | 56 | 63 | 1 | 43 | 56 | 59 | 56/17 | 59/17 | 115/34 |
| 18 | 3 | 60 | 59 | 68 | 2 | 44 | 60 | 62 | 59/18 | 31/9 | 121/36 |
| 19 | 3 | 64 | 62 | 73 | 2 | 45 | 64 | 65 | 62/19 | 65/19 | 127/38 |
| 20 | 3 | 68 | 65 | 78 | 2 | 46 | 68 | 68 | 13/4 | 17/5 | 133/40 |

NA1 = 1 P(A1) = 1/20 = 1/20 NA2 = 7 P(A2) = 7/20 = 7/20 NA3 = 12 P(A3) = 12/20 = 3/5 NB1 = 4 P(B4) = 4/20 = 1/5 NB2 = 14 P(B4) = 14/20 = 7/10 NB3 = 2 P(B4) = 2/20 = 1/10

Цена игры, W = 133/40 p = (1/20, 7/20, 3/5)q = (1/5, 7/10, 1/10)

***Многошаговые игры. Игры на выживание***

Предыдущее рассмотрение игр проводилось в предположении, что реализация игры может осуществляться любое число раз. Например, для игры "орел-решка", где в случае совпадения предъявляемых сторон монеты выигрывает игрок 1 и при несовпадении - игрок 2, оптимальная политика игроков состоит в равновероятностном выборе "орла" и "решки" и цена игры равна 0.

Однако в реальной игре с ограниченными ресурсами политика игроков зависит от результата предыдущих действий и от длительности игры.

Соответственно для матричной игры

$$F_k(A,B) = \max_P \min_Q \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_i\, Q_j\, F_{k-1}(A + R_{ij}, B - R_{ij}) =$$

$$= \min_Q \max_P \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_i\, Q_j\, F_{k-1}(A + R_{ij}, B - R_{ij})$$

где $F_k(A,B)$ - ожидаемый выигрыш игрока 1 в k последовательных реализациях при начальных ресурсах A и B и использовании оптимальной политики.

Пусть общий начальный ресурс игроков A + B = C и игра продолжается до разорения одного из игроков. Обозначим через F(A) ожидаемую вероятность выживания (шансы не разориться) игрока 1 при его начальном ресурсе A и оптимальной политике обоих игроков.

Тогда

$$F(A) = \max_P \min_Q \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_i \, Q_j \, F(A + R_{i\,j}) =$$

$$= \min_Q \max_P \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_i \, Q_j \, F(A + R_{i\,j})$$

$F(A \geq 0) = 0$, $F(A \leq C) = 1$.

Если игра не обладает седловой точкой в пространстве чистых стратегий, то оптимальные значения вероятностей использования выборов соответствуют внутренним точкам множества планов ($0 < P < 1$, $0 < Q < 1$) и напрашивается мысль прибегнуть к аппарату производных.

<u>Пример.</u> Рассмотрим игру на выживание с матрицей $\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$ при полном капитале игроков C = 4.

Здесь в силу целочисленности данных берем целочисленные значения A от 0 до 4. Если обозначить вероятности соответствующих выборов игроков через P, 1-P, Q, 1-Q, то $F(A \leq 0) = 0$, $F(A \geq 4) = 1$,

$$F(1) = \max_P \min_Q [PQ\,F(3) + P(1-Q)\,F(0) + (1-P)Q\,F(-1) + (1-P)(1-Q)F(2)]$$

$$= \max_P \min_Q [\,PQ\,F(3) + (1-P)(1-Q)\,F(2)],$$

$$F(2) = \max_P \min_Q [PQ\,F(4) + P(1-Q)\,F(1) + (1-P)Q\,F(0) + (1-P)(1-Q)\,F(3)]$$

$$= \max_P \min_Q [PQ + P(1-Q)\,F(1) + (1-P)(1-Q)\,F(3)],$$

$$F(3) = \max_P \min_Q [PQ\,F(5) + P(1-Q)\,F(2) + (1-P)Q\,F(1) + (1-P)(1-Q)\,F(4)$$

$$= \max_P \min_Q [PQ + P(1-Q)\,F(2) + (1-P)Q\,F(1) + (1-P)(1-Q)].$$

Отыскиваем частные производные и строим системы уравнений для поиска оптимальных значений P(A), Q(A):

1. $\frac{\partial}{\partial P} F(1) = Q\,F(3) - (1-Q)\,F(2) = 0$

   $\frac{\partial}{\partial Q} F(1) = P\,F(3) - (1-P)\,F(2) = 0$

2. $\frac{\partial}{\partial P} F(2) = Q + (1-Q)\,F(1) - (1-Q)\,F(3) = 0$

   $\frac{\partial}{\partial Q} F(2) = P - P\,F(1) - (1-P)\,F(3) = 0$

3. $\frac{\partial}{\partial P} F(3) = Q + (1-Q)\,F(2) - Q\,F(1) - (1-Q) = 0$

   $\frac{\partial}{\partial Q} F(3) = P - P\,F(2) + (1-P)\,F(1) - (1-P) = 0.$

Решение приведенных систем дает

$$P(1) = Q(1) = \frac{F(2)}{F(2)+F(3)}$$

$$P(2) = \frac{F(3)}{1-F(1)+F(3)}, \quad Q(2) = \frac{F(3)-F(1)}{1-F(1)+F(3)}$$

$$P(3) = \frac{1-F(1)}{2-F(1)-F(2)}, \quad Q(3) = \frac{1-F(2)}{2-F(1)-F(2)}.$$

Подставляя полученные выражения в исходные выражения функций, имеем $F(1) = \frac{F(2) \cdot F(3)}{F(2)+F(3)}$, $F(2) = \frac{F(3)}{1-F(1)+F(3)}$, $F(3) = \frac{1-F(1) \cdot F(2)}{2-F(1)-F(2)}$.

Решая полученную нелинейную систему, имеем оценки

F(1)=0.3, F(2)=0.5, F(3)=0.7

и

P(1)=0.41, P(2)=0.5, P(3)=0.59, Q(1)=0.41, Q(2)=0.3, Q(3)=0.41.

***Многошаговые игры. Игры погони***

Простейшим примером таких игр может служить задача для двух игроков, расположившихся на прямой на расстоянии d. На каждом шаге игры игроки могут одновременно смещаться влево или вправо при полной информации о позиции друг друга После очередного шага игрок 2 уплачивает игроку 1 величину G(S), где S - расстояние между ними. С вероятностью A(d) игра может быть продолжена и с вероятностью 1-A(d) окончена.

Если обозначить через $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$ вероятности смещения игроков в ту или иную сторону, то одна из возможных формулировок задачи имеет вид

$$F(d) = G(d)+A(d)\max_P \min_Q [\, P_1\, Q_1\, F(d) + P_1\, Q_2 F(d+2) +$$
$$P_2\, Q_1 F(d-2) + P_2\, Q_2\, F(d)\, ] =$$
$$= G(d) + A\,(d) \min_Q \max_P\ [\, P_1\, Q_1\, F(d) + \ldots\, ]$$

Существенно больший интерес может представить игра погони на плоскости или в пространстве, где устанавливается принципиальная возможность поимки одного игрока другим или отыскивается траектория, минимизирующая время поимки. Эти игры относятся к т.н. непрерывным многошаговым играм, решение которых сводится к дискретным моделям.

## Раздел 3. Статистические решения.

***Основные понятия***

Теория статистических решений может быть истолкована как теория поиска оптимального недетерминированного поведения в условиях неопределенности. Современная концепция статистического решения выдвинута А.Вальдом и считает поведение оптимальным, если оно минимизирует риск в последовательных экспериментах, т.е. математическое ожидание убытков статистического эксперимента. В такой постановке любая задача статистических решений может рассматриваться как игра двух лиц, в которой одним из игроков является "природа".

Выбор наилучших решений в условиях неполной информации является одним из основных занятий людей.

Собираясь в туристический поход, мы укладываем вещи в рюкзак с учетом неизвестной погоды и преследуем цель получить максимум удовольствий, не превращаясь в рекордсмена по переноске тяжестей.

Проектируя гидротехнические сооружения, мы стремимся сделать их надежными, несмотря на непредсказуемые землетрясения, паводки и т.п.

Создавая систему профилактических и аварийных ремонтов, мы преследуем какую-то цель, не зная в точности времени возникновения аварий.

Если процесс определяется повторяющимися ситуациями, то его усредненные характеристики испытывают тенденцию к стабилизации и появляется возможность либо замены случайного процесса детерминированным, либо использования каких-то методов исследования стационарных случайных процессов (в частности, *методов теории массового обслуживания*).

Однако большинство процессов характеризуется "дурной неопределенностью" и невозможно найти законы распределения и другие вероятностные характеристики. В таких ситуациях приходится прибегнуть к экспертным оценкам.

Возникает и проблема выбора критерия оптимальности, поскольку решение, оптимальное для каких-то условий, бывает неприемлемым в других и приходится искать некоторый компромисс.

Пусть задан некоторый вектор $S = (S_1,S_2,..,S_n)$, описывающий n состояний внешней среды, и вектор $X = (X_1,X_2,..,X_m)$, описывающий m допустимых решений. Требуется найти вектор $X^*=(0,0,..,0,\ X_i\ ,0,..,0)$, который обеспечивает оптимум некоторой функции полезности W(X,S) по некоторому критерию K.

Информация об указанной функции представляют матрицей размерности m x n с элементами $W_{ij} = F(X_i, S_j)$, где F - *решающее правило*.

Рассмотрим типичный пример формирования такой матрицы

Планируется выпуск новой продукции, для чего необходимо закупить станки. Система оптовой торговли может поставить не более 50 станков; комплект поставки - 10 станков. Минимальный объем поставок - 20 станков. Соответственно, вектор решений об объеме поставок X = (20,30,40,50).

Ежегодный доход от продукции, снимаемой с одного станка, составляет 21.9 тыс.руб. Оптовая цена одного станка 4.775 тыс.руб., эксплуатационные расходы - 3.6 тыс. руб. Затраты на подготовку производства составляют 25.5 тыс.руб. и не зависят от числа станков и объема выпуска.

Пусть спрос пропорционален количеству продукции, снимаемой с S работающих станков, и для простоты ограничимся вектором состояний спроса S = (0,10,20,30,40,50).

Если решающее правило сформулировать как "доход - издержки", то можно рассчитать элементы матрицы полезности:

$W_{ij} = (21.9 - 3.6) * \min(X_i, S_j) - 4.775\ X_i - 25.5$

| | $S_1$=0 | $S_1$=10 | $S_1$=20 | $S_1$=30 | $S_1$=40 | $S_1$=50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ = 20 | -121 | 62 | 245 | 245 | 245 | 245 |
| $X_2$ = 30 | -168.75 | 14.25 | 197.25 | 380.25 | 380.25 | 380.25 |
| $X_3$ = 40 | -216.5 | -33.5 | 149.5 | 332.5 | 515.5 | 515.5 |
| $X_4$ = 50 | -264.25 | -81.25 | 101.75 | 284.75 | 467.75 | 650.75 |

Например

$W_{11} = -(4.775\ 20+25.5) = -121$,

$W_{12} = (21.9\text{-}3.6) * 10\text{-}(4.775\ 20+25.5) = 62$,

$W_{13} = (21.9\text{-}3.6) * 20\text{-}(4.775\ 20+25.5) = 245$,

$W_{14} = W_{15} = 245$ (спрос останется неудовлетворенным).

***Выбор критерия принятия решения***

Предположим, что в нашем распоряжении имеются статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного спроса, и этот опыт может быть использован для оценки будущего. При известных вероятностях $P_j$ для спроса $S_j$ можно найти математическое ожидание W(X,S,P) и определить вектор $X^*$, дающий

$$W = \max_{i=1..m} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} P_j$$

Если для вышеприведенного примера задать вектор P = (0.01, 0.09, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1), то математические ожидания прибыли при разных выборах:

$W_1$ =-121*0.01 + 62*0.09 + 245*0.2 + 245*0.3 + 245*0.3 + 245*0.1 = 224.87,

$W_2$ = 305.22, $W_3$ = 330.675, $W_4$ = 301.12

и выбор максимального значения обнаруживает оптимальность варианта 40 станков с ожидаемой прибылью 330.675 тыс.руб.

***Критерий Лапласа***

В основе этого критерия лежит "*принцип недостаточного основания*".

Если нет достаточных оснований считать, что вероятности того или иного спроса имеют неравномерное распределение, то они принимаются одинаковыми и задача сводится к поиску варианта, дающего

$$W = \max_{i=1..m} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij}$$

Для нашего примера

$W_1$ = (-121 + 62 + 245 + 245 + 245 + 245)/6 = 153.5,$W_2$ = 197.25, $W_3$ =210.5, $W_4$ = 193.5

и выбор максимального значения обнаруживает оптимальность выбора варианта 40 станков с ожидаемой прибылью 210.5 тыс.руб.

***Критерий Вальда***

Критерий Вальда обеспечивает выбор осторожной, пессимистической стратегии в той или иной деятельности и его суждения близки к тем суждениям, которые мы использовали в теории игр для поиска седловой точки в пространстве чистых стратегий: для каждого решения $X_i$ выбирается самая худшая ситуация (наименьшее из $W_{ij}$) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект

$$W = \max_{i=1..m} \min_{j=1..n} W_{ij}$$

В нашем примере W = max(-121, -168.75, -216.5, -264.25) = -121, т.е. по этому критерию следует закупить 20 станков и максимальный возможный убыток не превысит 121 тыс.руб. (если бы мы включили и вариант отказа от покупки станков вообще, то этот критерий рекомендовал бы нам воздержаться от какой-либо деятельности, но "кто не рискует, тот не пьет шампанского").

Можно принять и критерий выбора оптимистической стратегии

$$W = \min_{i=1..m} \max_{j=1..n} W_{ij}$$

где оценивается гарантированный выигрыш при самых благоприятных условиях. Для нашего примера W = min (245, 380.25, 515.5, 650.75)= 245.

***Критерий Гурвица***

Ориентация на самый худший исход является своеобразной перестраховкой. Однако опрометчиво выбирать политику, которая излишне оптимистична. Критерий Гурвица предлагает некоторый компромисс:

$$W = \max_{i=1..m} [\alpha \max_{j=1..n} W_{ij} + (1-\alpha) \min_{j=1..n} W_{ij}],$$

где параметр $\alpha$ принимает значение от 0 до 1 и выступает как коэффициент оптимизма. Так в нашем примере при различных $\alpha$ значения W определяются таблицей:

| | $\alpha$=0.1 | $\alpha$=0.2 | $\alpha$=0.5 | $\alpha$=0.8 | $\alpha$=0.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ = 20 | -84.4 | -47.0 | 62 | 171 | 206.4 |
| $X_2$ = 30 | -113.85 | -58.95 | 105.75 | 270.45 | 325.35 |
| $X_3$ = 40 | -140.3 | -70.1 | 149.5 | 369.1 | 442.3 |
| $X_4$ = 50 | -172.75 | -81.25 | 193.25 | 467.75 | 559.25 |

При $\alpha$=0.5 (равновероятных шансах на успех и неудачу) следует закупить 50 станков и ожидать прибыль порядка 193.25 тыс. руб.

При вероятности успеха 0.2 не следует закупать более 20 станков с надеждой, что убытки не превысят 47 тыс.руб.

***Критерий Сэвиджа***

Суть этого критерия заключается в нахождении минимального риска. При выборе решения по этому критерию сначала матрице функции полезности (эффективности) сопоставляется*матрица сожалений*

$$D_{ij} = W_{ij} - \max_i (W_{ij}),$$

элементы которой отражают убытки от ошибочного действия, т.е. выгоду, упущенную в результате принятия i-го решения в j-м состоянии. Затем по матрице D выбирается решение по пессимистическому критерию Вальда, дающее наименьшее значение максимального сожаления.

Для нашего примера отыскиваем матрицу D, вычитая (-121) из первого столбца матрицы полезности, 62 из второго и т.д.

| | $S_1$=0 | $S_1$=10 | $S_1$=20 | $S_1$=30 | $S_1$=40 | $S_1$=50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ =20 | 0 | 0 | 0 | -135.25 | -270.5 | -405.75 |
| $X_2$ = 30 | -47.75 | -47.75 | -47.75 | 0 | -135.25 | -270.5 |
| $X_3$ = 40 | -95.5 | -95.5 | -95.5 | -47.75 | 0 | -135.25 |
| $X_4$ = 50 | -143.25 | -143.25 | -143.25 | -95.5 | -47.75 | 0 |

Наибольшее значение среди минимальных элементов строк здесь равно max[-405.75, -270.5, -135.25, -143.25]=-135.25 и, покупая 40 станков, мы уверены, что в худшем случае убытки не превысят 135.25 тыс.руб.

Таким образом, различные критерии приводят к различным выводам:

1) по критерию Лапласа приобретать 40 станков,
2) по критерию Вальда - 20 станков,
3) по критерию Гурвица - 20 при пессимистическом настроении и 50 в состоянии полного оптимизма,
4) по критерию Сэвиджа - 40 станков.

Возможность выбора критерия дает свободу лицам, принимающим экономические решения, при условии, что они располагают достаточными средствами для постановки подобной задачи. Всякий критерий должен согласовываться с намерениями решающего задачу и соответствовать его характеру, знаниям и убеждениям.

### 4.3. Лабораторные работы

Учебным планом не предусмотрено

### 4.4. Практические занятия

| *№ п/п* | *Номер раздела дисциплины* | *Наименование тем практических занятий* | *Объем (час.)* | *Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **2.** | **Матричные игры и линейное программирование** | 17 | - |
| 2 | **3.** | **Статистические решения** | 17 | - |
| | | **ИТОГО** | **34** | **-** |

### 4.5. Контрольные мероприятия: курсовой проект (курсовая работа), контрольная работа, РГР, реферат

Учебным планом не предусмотрено

## 5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

| *Компетенции* / *№, наименование разделов дисциплины* | *Кол-во часов* | *Компетенции* | | *Σ комп.* | *$t_{ср}$, час* | *Вид учебной работы* | *Оценка результатов* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *ОПК* | *ПК* | | | | |
| | | *7* | *13* | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **1.** Основные понятия теории игр | 14 | + | - | 1 | 14 | Лекция, СРС | зачет |
| **2.** Матричные игры и линейное программирование | 37 | + | + | 2 | 18,5 | Лекция, ПЗ, СРС | зачет |
| **3.** Статистические решения | 57 | + | + | 2 | 28,5 | Лекция, ПЗ, СРС | зачет |
| ***всего часов*** | **108** | **64** | **44** | **2** | **54** | | |

## 6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Ларионова О.Г. Исследование операций. Элементы теории игр : учебное пособие / О.Г. Ларионова. - 2-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2013. - 98 с.

## 7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

| № | *Наименование издания* | *Вид занятия* (*Лк, ПЗ, СР*) | *Количество экземпляров в библиотеке,* **шт.** | *Обеспеченность,* **(экз./ чел.)** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| | **Основная литература** | | | |
| 1 | Литвин, Д.Б. Элементы теории игр и нелинейного программирования : учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Ставропольский государственный аграрный университет. - Ставрополь : Ставропольский государственный аграрный университет, 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр. в кн. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=484991 | Лк,ПЗ, СР | 1(ЭР) | 1 |
| 2 | Шелехова Л.В. Теория игр в экономике : учебное пособие / Л.В. Шелехова. - М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. - 119 с. : ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-3995-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=274522 | Лк,ПЗ, СР | 1(ЭР) | 1 |
| 3 | Гадельшина Г.А. Введение в теорию игр : учебное пособие / Г.А. Гадельшина, А.Е. Упшинская, И.С. Владимирова ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 112 с. : табл., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1709-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428702 | Лк,ПЗ, СР | 1(ЭР) | 1 |
| 4 | Ларионова О.Г. Исследование операций. Элементы теории игр: учебное пособие / О. Г. Ларионова. - 2-е изд., перераб. и доп. - Братск : БрГУ, 2013. - 98 с. | Лк,ПЗ, СР | 45 | 1 |
| 5 | Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения : учебное пособие / - Санкт-Петербург : Лань, 2010. - 448 с. | Лк,ПЗ, СР | 21 | 1 |
| | **2. Дополнительная литература** | | | |
| 6 | Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология : учебное пособие / Е.С. Вентцель. - 5-е изд., стереотип. - Москва : КНОРУС, 2010. - 192 с. | Лк,ПЗ, СР | 40 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | Кундышева Е.С. Экономико-математическое моделирование : учебник / Е. С. Кундышева ; Под ред. Б. А. Суслакова. - 3-е изд. - Москва : Дашков и К*, 2010. - 424 с. | Лк,ПЗ, СР | 25 | 1 |
| 8 | Замков О. О. Математические методы в экономике : учебник для вузов / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных ;Под ред. А. В. Сидорович. - 4-е изд., стереотип. - Москва: Дело и Сервис, 2004. - 368 с. | Лк,ПЗ, СР | 69 | 1 |

## 8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО - ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Электронный каталог библиотеки БрГУ: http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r_15/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=
2. Электронная библиотека БрГУ http://ecat.brstu.ru/catalog
3. Федеральная университетская компьютерная сеть России // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://www.runnet.ru/
4. Каталог учебников, оборудования, электронных ресурсов // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://ndce.edu.ru/
5. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» // Электронный ресурс http://e.lanbook.com/ ,
6. Библиотека «Книгосайт» // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://knigosite.ru/
7. Электронная библиотека книг на тему бизнеса, финансов, экономики и смежным темам // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://www.finbook.biz/
8. ЭБС «Университетская библиотека online» // Электронный ресурс http://biblioclub.ru/ ,
9. Научная электронная библиотека «КИБЕРЛЕНИНКА» // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://cyberleninka.ru/

## 9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

| Вид учебных занятий | Организация деятельности обучающихся |
|---|---|
| Лекции | Написание конспекта лекций: кратко, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Проверка терминов с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь. Обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, практическом занятии. |
| Практические занятия | Развитие интеллектуальных умений, подготовка ответов к контрольным вопросам, работа с основной и дополнительной литературой, необходимой для освоения дисциплины, выполнение заданий, активное участие в интерактивной, активной, инновационной формах обучения, составление и оформление отчетов по практическим заданиям. |
| Самостоятельная | *Подготовка к практическим занятиям.* Проработка основной и |

| | |
|---|---|
| работа обучающихся | дополнительной литературы, терминов, сведений, требующихся для запоминания и являющихся основополагающими в теме/разделе. Конспектирование прочитанных литературных источников. Проработка материалов по изучаемому вопросу, с использованием на рекомендуемых ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет». Выполнение заданий преподавателя, необходимых для подготовки к участию в интерактивной, активной, инновационных формах обучения по изучаемой теме.<br>*Подготовка к зачету*. При подготовке к зачету необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу, использовать рекомендуемые ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет». |

## 9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению практических работ

### Практическое занятие № 1. Матричные игры и линейное программирование

Цель работы: Изучить основные теоретические положения матричных игр и получить навыки применения теории при решении задач.

Задание:

1. Повторить теоретический материал по предлагаемой теме.
2. Решить совместно с преподавателем основные задачи, позволяющие закрепить теоретические знания.
3. Приобрести практические навыки решения задач.
4. Выполнить практическую работу.

Порядок выполнения:

Беседа по основной теме. Для матричных игр - понятия игровой матрицы, цены игры, чистых и смешанных, дублирующих и доминирующих стратегий. Анализ методов их решения: графический, понижение размерности игровой матрицы, сведение к задаче линейного программирования. решение задач с пояснениями.

Выполнение и устная защита практической работы.

Форма отчетности:

Решения задач в тетради с указанием основных формул, пояснений и соответствующих правил.

Задания для самостоятельной работы:

1. Изучить основные базовые понятия теории матричных игр.

2. Решить следующие задачи:

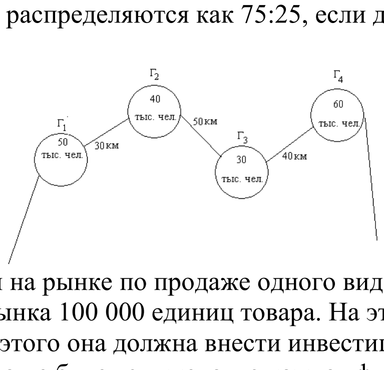
Составьте платежные матрицы для каждого из участников игры.

1. *Двухпальцевая игра*. Каждый игрок показывает один или два пальца и называет, сколько пальцев,по его мнению, показал второй игрок (ни один из игроков не видит, сколько пальцев на самом деле показал противник). Если один из игроков угадывает правильно, то он получает сумму, равную сумме количества пальцев, показанных им и его противником. Если никто не угадывает – ничья. Если угадалиоба, то оба платят друг другу одинаковую сумму и в результате тоже ничья.

2. Первый прячет в кулаке свою собственную монету достоинством 2 или 5 рублей. Второй пытается отгадать, какая монета спрятана. Если он угадывает, то получает эту монету, а если нет – платит первому 3 рубля.

3. Двое придумали себе игру. Один из игроков раскладывает четыре предмета разной стоимости вчетыре коробки. Второй игрок называет предмет и называет коробку. Если он угадывает, то получаетстоимость предмета, если не угадывает, то платит первому игроку стоимость предмета, лежащего в коробке. Стоимости предметов 10, 20, 30 и 40 ден. ед. соответственно.

4. Каждая их двух крупных конкурирующих фирм Ф1 и Ф2 собирается строить гипермаркеты в одном из четырех городов (см. схему), достаточно удаленных от транспортных артерий. Оборот каждой фирмы зависит от численности населения, от места жительства потенциальных покупателей и от ассортимента продукции фирмы. Маркетинговые исследования показывают, что если гипермаркет фирмы Ф1находится ближе к городу, чем гипермаркет фирмы Ф2, то их обороты распределяются как 75:25, если дальше, то 45:55, а если на одинаковом расстоянии, то 60:40.




5. Фирма Ф1 является монополистом на рынке по продаже одного вида товара, с единицы которого она получает прибыль 1 000 рублей. Емкость рынка 100 000 единиц товара. На этот рынок с аналогичным товаром собирается войти другая фирма Ф2, но для этого она должна внести инвестиции в размере 40 млн руб. Если вторая фирма войдет на рынок и цена товара не будет снижена, то каждая фирма получит прибыли по 50 млн руб. (но не забудьте об инвестициях Ф2). Если первая фирма для защиты рынка понизит стоимость товара, то

она будет получать прибыль с единицы товара на 400 руб. меньше. И если Ф2 поосторожничает и не войдет на рынок, то прибыль Ф1 понизится. Если же в этой ситуации Ф2 все же войдет на рынок, то каждая фирма будет получать прибыль по 30 млн руб.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию

После самостоятельной подготовки обучающиеся закрепляют теоретические знания в ходе работы над разработанными заданиями.

**Матричные игры с нулевой суммой**

**Пример.** Игра в «Орлянку».

Двое загадывают сторону монеты. Если загадали одно и то же, то выиграл первый, если разное –второй. Требуется составить:

1) матрицы выигрышей каждого игрока;
2) бинарную матрицу;
3) дерево игры.

Решение. Проанализируем условие. Все ли позиции у нас имеются для того, чтобы считать ситуацию игрой?

Конфликтующие стороны – имеются. Правила из описания игры не очень понятны, но могут быть уточнены следующим образом. То, что каждый загадал, он фиксирует на бумаге и отдает рефери, который и бросает монету. Затем раскрываются записи. Точный набор конечных состояний – имеется. Либо выигрыш, либо проигрыш, ничьих данная ситуация не предусматривает. Принципы организации банка – неизвестны. Следовательно, данную ситуацию нельзя пока признать игрой.

Рассмотрим самый простой вариант организации банка: игроки складываются по одному рублю и выигравший забирает банк.

В действиях игроков предусматриваются следующие ситуации: первый загадал герб или цифру, второй загадал герб или цифру. Если первый загадал цифру и второй загадал цифру, то первый забирает банк. В банке два рубля, один из них принадлежит игроку, таким образом, первый выиграл один рубль, а второй проиграл. Выигрыш первого равен 1, а выигрыш второго равен –1. Если первый загадал цифру, а второй – герб, то свой один рубль выиграл второй, а первый рубль потерял, то есть его выигрыш равен –1.

Все это можно изобразить с помощью таблиц.

Выигрыш первого

| | *второй* | |
|---|---|---|
| *первый* | ***Г*** | ***Ц*** |
| ***Г*** | 1 | –1 |
| ***Ц*** | –1 | 1 |

Выигрыш второго

| | *второй* | |
|---|---|---|
| *первый* | ***Г*** | ***Ц*** |
| ***Г*** | –1 | 1 |
| ***Ц*** | 1 | –1 |

Или эти таблицы могут быть представлены игровыми матрицами

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; \qquad I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Замечание.* Очевидно, что элементы матриц отличаются лишь знаками, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать игровую ситуацию, оформляя ее матрицей только для первого игрока.

Игровая матрица, в которой представлены все возможные варианты выигрыша одного и проигрыша другого, называется **платёжной матрицей.**

Бинарная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} (1;-1) & (-1;1) \\ (-1;1) & (1;-1) \end{pmatrix}.$$

Дерево игры представлено на рис. 1.

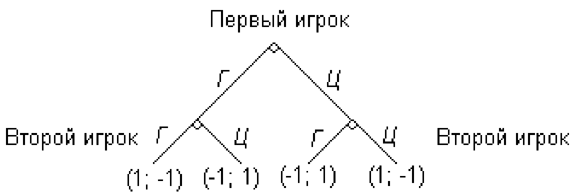



Рис. 1. Дерево игры в «Орлянку»__

**Пример 2.** Два игрока показывают 1, 2 или 3 пальца. Если количество пальцев чётное, то выигрывает 1-й, если нечётное, то 2-й. Банк может складываться разными способами:

1) каждый вкладывает по рублю до игры;
2) проигравший отдаёт противнику столько рублей, сколько пальцев в сумме они показали;
3) каждый платит столько, сколько пальцев он показал;
4) и другими, как позволит фантазия игроков.

Составить игровые матрицы и проанализировать, кому из игроков выгоднее эта игра – первому или второму.

**Решение**.

В первом случае организации банка получаем игровую матрицу (для первого игрока)

| Стратегии второго / Стратегии первого | 1 палец | 2 пальца | 3 пальца |
|---|---|---|---|
| 1 палец | 1 | –1 | 1 |
| 2 пальца | –1 | 1 | –1 |
| 3 пальца | 1 | –1 | 1 |

Бинарная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} (1;-1) & (-1;1) & (1;-1) \\ (-1;1) & (1;-1) & (-1;1) \\ (1;-1) & (-1;1) & (1;-1) \end{pmatrix}.$$

Из этих матриц следует, что у второго позиция проигрышная, так как он имеет больше возможностей проиграть, нежели выиграть.

*При втором способе* организации банка получается игровая матрица

$$I = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что и при таком способе организации банка второй проигрывает чаще.

*При третьем способе* сбора денег для банка игровая матрица имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

И при таком способе организации банка преимущество у первого.

**Пример 3**. Два предприятия являются основными поставщиками хлебобулочных изделий в городе, поэтому полностью определяют рыночную политику по этому виду товара. Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию из трёх различных видов теста: дрожжевого, слоеного и заварного. В зависимости от вида теста, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 10, 6 и 2 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции, от чего зависит ее себестоимость (табл. А).

Таблица А

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.).

| Вид теста | Цена реализации единицы продукции, д.е. | Полная себестоимость единицы продукции, д.е. | |
|---|---|---|---|
| | | предприятие 1 | предприятие 2 |
| Дрожжевое | 10 | 5 | 8 |
| Слоеное | 6 | 3 | 4 |
| Заварное | 2 | 1,5 | 1 |

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию

$$S = 6 - 0{,}5X\,,$$

где S – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.); X – средняя цена продукции предприятий (д.е.).

Значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены (табл. Б). Так как на рынке города действует только два предприятия, то долю продукции второго предприятия, приобретённой населением, можно легко вычислить самостоятельно, приняв всю проданную продукцию за единицу.

Таблица Б

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

| Цена реализации 1 ед. продукции, д.е. | | Доля продукции предприятия 1, купленной населением |
|---|---|---|
| предприятие 1 | предприятие 2 | |
| 10 | 10 | 0,31 |
| 10 | 6 | 0,33 |
| 10 | 2 | 0,18 |
| 6 | 10 | 0,7 |
| 6 | 6 | 0,3 |
| 6 | 2 | 0,2 |
| 2 | 10 | 0,92 |
| 2 | 6 | 0,85 |
| 2 | 2 | 0,72 |

Стратегиями предприятий в данной задаче являются их решения относительно выбора вида теста для выпечки (или, соответственно, цены на продукцию – 10, 6 или 2 денежных единицы). Эти стратегии определяют себестоимость и цену реализации единицы продукции.Требуется составить платежную матрицу для первого предприятия.

***Решение.***

Для составления игровой матрицы определим экономический смысл ее элементов.

Каждое предприятие стремится к максимизации прибыли от производства продукции. Но, так как предприятия ведут борьбу за рынок продукции в регионе, то выигрыш одного предприятия означает проигрыш другого. Такая задача может быть сведена к матричной игре с нулевой суммой. При этом под выигрышем будет пониматься значение разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства и сбыта продукции. В случае если в платежной матрице для первого предприятия эта разница положительна, выигрывает предприятие 1, а если она отрицательна – выигрывает предприятие 2.

Прибыль предприятия зависит:

– от цены и себестоимости продукции;

– количества продукции, приобретаемой населением региона;

– доли продукции, приобретённой населением у предприятия.

В платежной матрице обозначим в качестве стратегий решения предприятия о технологиях производства продукции – Д(10), С(6) и З(2).

Если $i$ – стратегия, выбранная первым предприятием, $j$ – стратегия, выбранная вторым предприятием, то матрица будет иметь размерность 3 × 3, а ее элементы – значения разницы прибыли предприятий, определяются по формуле

$$Dij = Sij\ (pij\ (Ri^1 - Ci^1) - (1 - pij)(Rj^2 - Cj^2)),$$

где $Sij$ – количество продукции, приобретаемой населением региона (табл. В);

$pij$ – доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением региона (табл. Б);

$Ri^1$ и $Rj^2$ – цены реализации единицы продукции предприятиями 1 и 2 (табл. А);

$Ci^1$ и $Cj^2$ – полная себестоимость единицы продукции, произведённой на предприятиях 1 и 2 (табл. А).

Вычислим один из коэффициентов платёжной матрицы.

Пусть, например, предприятие 1 принимает решение о производстве продукции в соответствии с технологией З(2), а предприятие 2 – в соответствии с технологией С(6). Тогда цена реализации единицы продукции для предприятия 1 составит 2 д.е. при себестоимости единицы продукции 1,5 д.е. Для предприятия 2 цена реализации единицы продукции составит 6 д.е. при себестоимости 4 д.е. (табл. А).

Расчеты о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации (выбранной стратегии) приведены в табл. В.

*Таблица В*

*Спрос на продукцию в регионе, тыс. ед.*

| $X$-цена реализации 1 ед. продукции, д.е. | | Средняя цена реализации 1 ед. продукции, д.е. | $S = 6 - 0{,}5X$ спрос на продукцию, тыс. ед. |
|---|---|---|---|
| предприятие 1 | предприятие 2 | | |
| 10 | 10 | 10 | 1 |
| 10 | 6 | 8 | 2 |
| 10 | 2 | 6 | 3 |
| 6 | 10 | 8 | 2 |
| 6 | 6 | 6 | 3 |
| 6 | 2 | 4 | 4 |
| 2 | 10 | 6 | 3 |
| 2 | 6 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 5 |

Количество продукции, которое население региона приобретёт при средней цене 4 д.е., равно 4 тыс.ед. (табл. В). Доля продукции, которую население приобретёт у предприятия 1, составит 0,85,а у предприятия 2 – 0,15 (табл. Б). Вычислим коэффициент платёжной матрицы а32 по формуле:

$a_{32} = 0{,}85(4 \cdot 2 - 4 \cdot 1{,}5) - 0{,}15(4 \cdot 6 - 4 \cdot 4) = 0{,}5$ (тыс. ед.).

Аналогично вычислим все остальные коэффициенты (сделайте это самостоятельно) и получим платежную матрицу.

| | Д(10) | С(6) | З(2) |
|---|---|---|---|
| Д(10) | 0,17 | 0,62 | 0,24 |
| С(6) | 3 | –1,5 | –0,8 |
| З(2) | 0,9 | 0,5 | 0,4 |

**Нижняя и верхняя цена игры. Точка равновесия**

В антагонистической парной игре с нулевой суммой каждая сторона добивается своей цели и «мировых», как правило, не бывает. Учитывая тот факт, что возможные результаты игры можно проанализировать по игровой матрице только одного игрока, следует принять во внимание взаимозависимость выигрыша одного и проигрыша другого. Если один из игроков пытается максимизировать свой выигрыш, то другой должен стараться минимизировать свой проигрыш.

Пусть построена платёжная матрица для 1-го игрока

$$I=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Количество строк представляет собой количество стратегий первого игрока, а количество столбцов – количество стратегий второго. Номер строки (столбца) – номер выбранной игроком стратегии. Элементы $aij$ – величина выигрыша первого и проигрыша второго при выборе первым $i$-ой стратегии, а вторым $j$-той стратегии. Если первый игрок выбирает стратегию $i$-ой строки, то (если он достаточно разумен) он может гарантированно ожидать выигрыш, равный наименьшему из всех возможных в данной строке $\alpha_i=min_j a_{ij}\ k$ .

Но тогда он должен выбирать такую стратегию, в которой из всех наименьших по $k$ строкам выигрышей он может получить наибольший $\alpha = \max \alpha_i = \max_i \{\min_j \{a_{ij}\}\}$.

Это число называется **гарантированным выигрышем** или **нижней ценой игры**.

***Определение 1.*** Алгоритм выбора действий в игре, при которых игроку гарантируется максимальный из всех минимальных выигрышей, называется **максиминной** стратегией игрока.

Аналогично должен рассуждать и второй. Если уж ему суждено проиграть, то проигрыш при выбранной $j$-ой стратегии он должен учитывать наибольший (если он достаточно разумен) $\beta = \max_j \{aij\}, j=1,\dots, n$ . А вот стратегию необходимо выбрать так, чтобы из этих проигрышей можно было удовлетвориться наименьшим

$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_j \{aij\}, j=1,\dots, n$ .

Это число называется **ожидаемым проигрышем** или **верхней ценой игры**.

***Определение 2.*** Алгоритм выбора действий в игре, при которых игроку гарантируется минимальный из всех максимальных проигрышей, называется **минимаксной** стратегией игрока.

**Пример.** Определить нижнюю и верхнюю цены игры, заданной матрицей.

$$I=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Решение*. Найдем по каждой строке наименьшее число и из них выберем наибольшее. Аналогично по каждому столбцу найдем наибольшее, а из них выберем наименьшее.

$$\begin{array}{c c c} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} \min \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right\} \alpha = \max\{2,3,1\} = 3 \\ \max & \underbrace{4 \quad 5 \quad 6 \quad 5}_{\beta = \min\{4,5,6\} = 4} & \end{array}$$

Нижняя цена игры – 3, верхняя – 4.

**2.** $$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

$$\begin{array}{c c c} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} \min \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}\right\} \alpha = \max\{0,1,-1\} = 1 \\ \max & \underbrace{3 \quad 1 \quad 4 \quad 5}_{\beta = \min\{3,1,4,5\} = 1} & \end{array}$$

Нижняя цена игры – 3, верхняя – 4.

***Определение 3.*** Игры, в которых нижняя и верхняя цена совпадают, называются **равновесными**, или играми с нулевой точкой, или вполне определенными.

***Определение 4.*** В равновесной игре цена $V = \alpha = \beta$ называется **седловой точкой**.

Очевидно, что в играх с седловой точкой выбор стратегии определяется игроками однозначно. В предыдущем примере наиболее оптимальной стратегией для каждого будет вторая, так как седловая точка 1 стоит на пересечении второй строки (стратегии выигрыша) и второго столбца (стратегии проигрыша).

Рассмотрим платежную матрицу из примера 3.

Определим минимальные элементы строк матрицы. Для предприятия 1 каждый из этих элементов имеет значение минимально гарантированного выигрыша при выборе соответствующей стратегии. Минимальные элементы матрицы по строкам имеют значения: 0,17; –1,5; 0,4. Определим максимальные элементы столбцов матрицы. Для предприятия 2 каждый из этих элементов также имеет значение минимально гарантированного выигрыша при выборе соответствующей стратегии. Максимальные элементы матрицы по столбцам имеют значения: 3; 0,62; 0,4.

Нижняя цена игры в матрице равна 0,4. Верхняя цена игры также равна 0,4. Таким образом, нижняя и верхняя цены игры в матрице совпадают. Это значит, что имеется технология производства продукции, которая является оптимальной для обоих предприятий в условиях данной задачи. Это технология, которая соответствует стратегиям З(2) предприятия 1 и З(2) предприятия 2. Стратегии З(2) – чистые оптимальные стратегии в данной задаче.

Значение разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 при выборе чистой оптимальной стратегии положительно. Это означает, что предприятие 1 выиграет в данной игре. Выигрыш предприятия 1 составит 0,4 тыс. д.е. При этом на рынке будет реализовано 5 тыс. ед. продукции (реализация равна спросу на продукцию, согласно табл. Б). Оба предприятия установят цену за единицу продукции в 2 д.е.

При этом для первого предприятия полная себестоимость единицы продукции составит 1,5 д.е., а для второго – 1 д.е. (табл. А). Предприятие 1 окажется в выигрыше лишь за счёт высокой доли продукции, которую приобретёт у него население.

***Задания для самостоятельного решения***

1. Найдите нижнюю и верхнюю цены игры в задачах для самостоятельного решения предыдущего занятия.
2. Найдите нижнюю и верхнюю цены игры со следующими платежными матрицами:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \text{б)}\begin{pmatrix} 6 & 7 & 12 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 10 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 10 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Чистые и смешанные стратегии**

Если в игре имеется седловая точка, то дальнейшее поведение игроков становится понятным. Если же такой точки нет, то, очевидно, реальная цена игры будет находиться между нижней и верхней ценой: $\alpha \le V \le \beta$. А игроки будут выбирать свои стратегии с определенной долей риска, опираясь на законы вероятности.

***Определение.*** Если выбор конкретной стратегии определяется с вероятностью 1 или 0, то такая стратегия называется **чистой**, если же с любой другой вероятностью, то такая стратегия называется **смешанной**.

Пусть имеется платежная матрица

$$I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

И пусть первый игрок выбирает свои стратегии с вероятностями $x_1, x_2, \dots, x_k$, а второй – с вероятностями $y_1, y_2, \dots, y_n$. События «Игрок $X$ выбирает $i$-ую стратегию с вероятностью $x_i$» являются несовместными и образуют полную группу. Тогда $\sum_i x_i = 1$ и аналогично $\sum_j y_j = 1$.

Ожидаемый выигрыш от применения $i$-ой стратегии первым игроком при выборе вторым любой из своих стратегий будет равен $V_i = x_i \sum_j a_{ij} y_j$. А выигрыш, ожидаемый от применения разных стратегий, равен математическому ожиданию $V = \sum_i x_i \sum_j a_{ij} y_j = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$.

При разумных действиях игроков каждый будет придерживаться максиминной или минимаксной стратегии: первый будет стремиться к тому, чтобы его выигрыш был как можно больше V, а второй – чтобы его проигрыш был как можно меньше V.

Если в игре нет седловой точки, то комбинаций для выбора стратегии – бесчисленное множество. Поэтому игроки могут воспользоваться вероятностным подходом, то есть определить, как часто в серии одноходовых игр они могут выбирать те или иные стратегии.

Рассмотрим самую простую игру, когда у игроков имеется в запасе по две стратегии.

Платежная матрица $I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Если стратегии будут выбираться случайно, то выигрыш игрока будет меньше цены игры V. Если же стратегии будут применяться обдуманно, то выигрыш игрока будет точно равен V. Вероятности выбора своих стратегий первым будут равны x1 и x2, а вторым – y1 и y2. Первый должен проанализировать свои возможности при выборе вторым каждой из стратегий. Получается система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = V; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = V; \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{21} - a_{22})x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

и решим методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{21} - a_{22} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22};$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} - a_{22} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{22} - a_{21}; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} - a_{12};$$

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

**Пример.** Известна платежная матрица игры

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Средствами теории вероятностей найти выигрышные стратегии для игроков и цену игры.

***Решение***.

Сначала найдем нижнюю и верхнюю цены игры:

$$\alpha = 1; \ \beta = 2.$$

Они не равны. Следовательно, реальная цена игры по величине больше 1 и меньше 2. Составим и решим систему для первого игрока.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = V \\ 3x_1 + x_2 = V \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = 1 \ \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}; \ x_2 = \frac{2}{3}; \ V = \frac{5}{3}.$$

Таким образом, решение игры имеет вид

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 = \frac{5}{3} \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \ y_2 = \frac{1}{3}; \ y_1 = \frac{2}{3}.$$

Это означает, что в двух случаях из трех первый игрок должен выбирать вторую стратегию, а его противник – первую.

***Задания для самостоятельного решения***

Решите игру, заданную платежной матрицей

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}; \qquad \text{в)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Графическое решение задач на отыскание смешанных стратегий**

Пусть у какого-то игрока имеется только две стратегии, представленные в платежной матрице. Одну из них он может всегда игнорировать, а другую принимать. Это крайние позиции в его игровом поведении. Однако на деле игрок чаще пытается действовать в соответствии с разными стратегиями, которые он использует с определенной вероятностью. Графически это можно представить отрезком единичной длины на оси ОХ (рис. 3, а). В точке А1 вероятность выбора первой стратегии равна 0, а в точке А2 вероятность выбора второй стратегии равна 1. Между ними расположены вероятности выбора той и другой стратегии. Точки a11 и a21 обозначают выигрыш первого игрока при выборе вторым игроком первой стратегии (второй индекс). Отрезок, соединяющий точки a11 и a21, представляет собой все возможные выигрыши первого игрока, лежащие между крайними значениями a11 и a21.

На рис. 3, б изображен отрезок возможных выигрышей первого при выборе вторым игроком второй стратегии (второй индекс). Очевидно, что реальный выигрыш находится на пересечении этих отрезков (рис. 3, в).

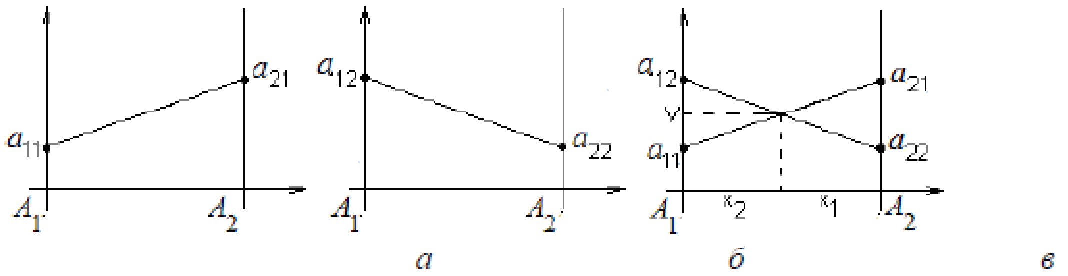



Рис. 3. Графическое отыскание вероятностей выбора стратегии первого игрока

Если же у первого игрока всего две стратегии, а у второго несколько, то таких прямых на схеме будет не одна и точек их пересечения может быть несколько (рис. 4).

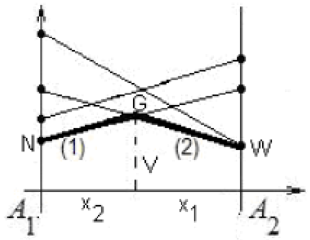



Рис. 4. Графическое представление игровой матрицы размерности 2 × 4

Ломаная *NGW* представляет собой нижнюю границу выигрышей первого игрока. Согласно алгоритму минимакса гарантированный выигрыш находится в точке *G*. В получении этого выигрыша участвуют только две стратегии. Тогда матрица размерности 2 × *n* равносильно может быть заменена игровой матрицей 2 × 2, в которой останутся только те стратегии, что дают гарантированный выигрыш.

Если же у второго игрока всего две возможных стратегии, а у первого больше (игровая матрица имеет размерность n×2), то аналогичная схема строится для двух стратегий второго игрока (рис. 5).

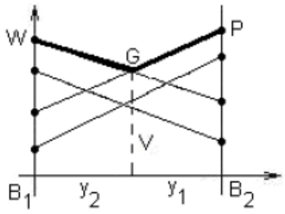



Рис. 5. Графическое представление игровой матрицы размерности 4×2

Согласно алгоритму минимакса игрок будет выстраивать игру так, чтобы из всех наибольших проигрышей добиться наименьшего. Он будет учитывать стратегии первого, лежащие на ломаной *WGP* – верхней границе проигрышей. Точка *G* – ожидаемый проигрыш второго игрока. И в этом случае матрица размерности *n* × 2 сводится к матрице размерности 2 × 2. А далее задача решается по алгоритму п.2.4.

**Пример 1.** Дана игровая матрица

$$I = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решить игру.

*Решение***.** У первого игрока две стратегии, а у второго три. Определим нижнюю и верхнюю цены игры.

$$\begin{array}{rcl} I = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \min \\ 7 \\ 6 \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}}\right\} \begin{array}{c} \max \\ 7 \end{array} \\ \max\ \underbrace{10 \quad 9 \quad 9}_{\min 9} & & \end{array}$$

Следовательно, нижняя цена игры α = 7, а верхняя – β = 9. Построим график и выделим стратегии второго, участвующие в обеспечении гарантированного выигрыша первому (рис. 6).

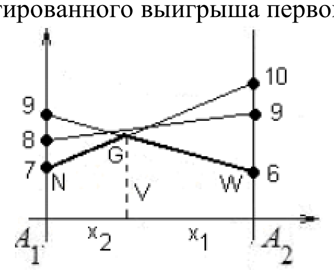



Рис. 6. Графическая интерпретация игровой матрицы

Очевидно, что нижнюю границу выигрышей образуют первая и вторая стратегии. Следовательно, вероятность выбора стратегии третьего столбца равна нулю: *y3=0*. Сводим исходную матрицу к матрице размерности 2 × 2:

$$I_1=\begin{pmatrix}7 & 9\\ 10 & 6\end{pmatrix}.$$

Для нее составляем и решаем системы.

$$\begin{cases}7x_1+10x_2=V\\ 9x_1+6x_2=V\\ x_1+x_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=\dfrac{1}{3}\\ x_1=\dfrac{2}{3}\end{cases} ; \quad V=8$$

$$\begin{cases}7y_1+9y_2=8\\ y_1+y_2=1\\ y_1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y1=\dfrac{1}{2}\\ y2=\dfrac{1}{2}\\ y3=0\end{cases}$$

*Решение игры:*

$$X\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right); \quad Y\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right); \quad V=8.$$

Для первого имеется смысл в два раза чаще выбирать первую стратегию, а второму рекомендуется никогда не использовать третью стратегию и регулярно менять свое поведение в соответствии с первой и второй стратегиями.

**Пример 2.** Дана игровая матрица

$$I=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 4 & 6\\ 2 & 7\\ 1 & 8\end{pmatrix}.$$

Решить игру.

**Решение**.

Теперь у второго игрока может быть только две стратегии, а у первого – четыре. Построим график (рис. 7).

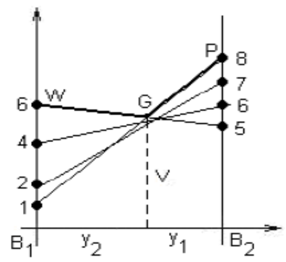



Рис. 7. Графическая интерпретация игровой матрицы

В достижении гарантированного проигрыша принимают участие две стратегии первого игрока –первая и четвертая. Поэтому в матрице оставляем только их. А вероятности выбора второй и третьей стратегий равны нулю. Получаем матрицу размерности 2 × 2, составляем и решаем соответствующие системы уравнений.

$$\mathrm{I}_1=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 1 & 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}6x_1+x_2=V\\ 5x_1+8x_2=V\\ x_1+x_4=1\\ x_2=0\\ x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{7}{8}\\ x_2=0\\ x_3=0\\ x_4=\dfrac{1}{8}\end{cases} ; \quad V=\frac{43}{8}.$$

$$\begin{cases}6y_1+5y_2=\dfrac{43}{8}\\ y_1+y_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_2=\dfrac{5}{8}\\ y_1=\dfrac{3}{8}\end{cases}.$$

*Решение игры:*

$$X=\left(\frac{7}{8};0;0;\frac{1}{8}\right);\quad Y=\left(\frac{3}{8};\frac{5}{8}\right);\quad V=\frac{43}{8}.$$

**Задания для самостоятельного решения**

Используя графический метод, решите игры с платежными матрицами

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$;　　б) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;　　г) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

**Дублирование и доминирование стратегий**

Часто при составлении игровой матрицы встречаются ситуации, когда выигрыш или проигрыш по разным стратегиям оказывается одинаковым.

***Определение* 1.** Стратегия с одинаковыми значениями выигрышей или проигрышей называется **дублирующей.**

Это означает, что если в игровой матрице имеются одинаковые строки или столбцы, то можно уменьшить размерность матрицы (редуцировать матрицу), оставив только один из дублированных рядов – строку или столбец.

Если рассматривается матрица выигрышей для одного игрока, то очевидно, что ему выгоднее выбирать те стратегии, выигрыш по которым не меньше (а лучше больше) по сравнению с другими стратегиями. И соответственно для второго игрока лучше выбирать по этой же матрице те стратегии, проигрыш по которым не больше, чем по другим стратегиям (а лучше меньше). При решении заданий в) и г)

***Определение 2.*** **Доминирующей** по отношению к *n*-ой называется *k*-ая строка матрицы, если все элементы этой *k*-ой строки не меньше, чем соответствующие элементы *n*-ой строки, и хотя бы один из элементов *k*-ой строки строго больше элементов *n*-ной строки. Это значит, что для всех $a_{kj} \geq a_{nj}$ столбец $j$ и $a_{kj} > a_{nj}$ хотя бы для одного *j*.

***Определение* 3.** **Доминирующим** по отношению к *r*-ому называется *S*-ый столбец игровой матрицы, если все элементы *S*-го столбца не больше соответствующих элементов *r*-го и хотя бы один из них строго меньше.

То есть $a_{is} \leq a_{ir}$ для всех $i$ и $a_{is} < a_{ir}$ хотя бы для одного $i$.

***Определение* 4.** Ряд матрицы, который доминируется другим, называется **доминируемым**. Приём уменьшения размерности (редуцирования) игровой матрицы состоит в вычёркивании доминируемых строк или столбцов. Фактически доминируемые стратегии – чистые, так как вычеркивание из матрицы означает отказ от их рассмотрения, или, по-другому, вероятность их выбора равна нулю. Переход от исходной матрицы к матрице меньшей размерности на основе игнорирования доминируемых стратегий (редуцирование матрицы) может обозначаться

$$I=(\ )\underset{D}{\equiv}(\ )\underset{D}{\equiv}\ldots$$

**Пример 1.** Решить игру, уменьшив размерность матрицы, проигнорировав дублирующие и доминируемые стратегии

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение*. В этой матрице строки – выигрыш первого, а столбцы – проигрыш второго. Отметим, что второй и последний столбцы полностью дублируются, поэтому проигнорируем, например, последний столбец и перейдем к матрице размерности 3 □ 4. У первого игрока три стратегии, а у второго – четыре.

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь отмечаем, что все элементы последнего столбца больше элементов второго и не меньше элементов первого. Следовательно, если второй игрок будет выбирать четвертую стратегию, то он проиграет больше, чем при других. Значит, четвертая стратегия – доминируемая, ее нужно проигнорировать, то есть вероятность ее выбора будет равна 0.

Остается матрица размерности 3на 3.

$$I=\begin{pmatrix}1&0&3&5&0\\3&2&4&3&2\\0&1&-1&1&1\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}1&0&3&5\\3&2&4&3\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}1&0&3\\3&2&4\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

Теперь замечаем, что элементы последней строки меньше элементов первой строки, следовательно ,выбор этой стратегии принесет наименьший выигрыш первому игроку, поэтому он должен третью стратегию игнорировать. Значит, вероятность ее выбора будет равна 0.

$$I=\begin{pmatrix}1&0&3&5&0\\3&2&4&3&2\\0&1&-1&1&1\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}1&0&3&5\\3&2&4&3\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}1&0&3\\3&2&4\\0&1&-1\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}1&0&3\\3&2&4\end{pmatrix}.$$

В принципе, теперь осталась матрица размерности 2 на 3 и игру можно было бы дорешать графически. Но в этой матрице третий столбец доминируется первым и вторым, а второй доминирует над первым, поэтому процесс игнорирования стратегий может быть продолжен

$$I=\begin{pmatrix}1&0&3&5&0\\3&2&4&3&2\\0&1&-1&1&1\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}1&0&3&5\\3&2&4&3\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}1&0&3\\3&2&4\\0&1&-1\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}1&0&3\\3&2&4\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}$$

$$\underset{D}{\equiv}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\underset{D}{\equiv}(2).$$

Последний шаг был получен при игнорировании первой строки предпоследней матрицы.

Итак, мы получили чистые стратегии для первого игрока $x1 = 0$, $x2 = 1$, $x3 = 0$; для второго – $y1 = 0$, $y2 = 1$, $y3 = 0$, $y4 = 0$.

**Задания для самостоятельного решения**

1. Можно ли редуцировать игровые матрицы из п.п. 2.3, 2.5?
2. Редуцируйте матрицы и найдите оптимальные стратегии игроков, цену игры

а) $\begin{pmatrix}2&3&6&3&8\\4&1&7&4&9\\2&3&6&3&8\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4&6&7\\2&7&9\\3&3&4\\4&2&3\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}2&3&2&7&8\\4&5&7&5&7\\5&6&3&8&9\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}4&6&1\\2&6&2\\3&1&2\\4&3&3\end{pmatrix}$.

**Сведение игры к задаче линейного программирования**

Пусть игровая матрица имеет вид

$$I=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&....&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&....&a_{2n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\a_{k1}&a_{k2}&....&a_{kn}\end{pmatrix}.$$

Если в игре нет седловой точки, то игроки будут применять смешанные стратегии с вероятностями соответственно *xi* и *yj*. При этом первый игрок будет их использовать так, чтобы математическое ожидание его выигрыша превышало реальную цену игры, а второй игрок должен применять свои стратегиитак, чтобы математическое ожидание его проигрыша было меньше истинной цены игры:

$$\sum_{i=1}^{k}a_{ij}x_i\ge V\quad\left(j=\overline{1,n}\right),\qquad\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\le V\quad\left(i=\overline{1,k}\right).$$

Раскроем подробнее неравенства

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{k1}x_k\ge V\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{k2}x_k\ge V\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{kn}x_k\ge V\end{cases};\quad\begin{cases}a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n\le V\\a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n\le V\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{k1}y_1+a_{k2}y_2+\ldots+a_{kn}y_n\le V\end{cases}.$$

Величина $V$ – цена игры – неизвестна, поэтому от нее зависит достижение оптимума в игре.

Судя по виду систем, имеем двойственную задачу линейного программирования. Введем новые переменные

$$t_i=\frac{x_i}{V},\quad s_j=\frac{y_j}{V},$$

$$\sum_i t_i = \frac{\sum x_i}{V} = \frac{1}{V} \quad \text{и} \quad \sum_j s_j = \frac{\sum y_i}{V} = \frac{1}{V}.$$

Для первой системы целевая функция $Z = \sum_i t_i \to \min$, а для второй – $W = \sum_j s_j \to \max$.

Таким образом, имеем двойственную задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{n1}t_k \ge 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{n2}t_k \ge 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{kn}t_k \ge 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n \le 1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}s_1 + a_{k2}s_2 + \ldots + a_{kn}s_n \le 1 \end{cases}$$

$$Z = t_1 + t_2 + \ldots + t_k \to \min \qquad W = s_1 + s_2 + \ldots + s_n \to \max$$

Решив одну из них, находим решение другой и затем возвращаемся к старым переменным $x_i$ и $y_j$ – вероятностям выбора стратегий.

**Пример.**

Игра задана матрицей

$$I = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Свести к двойственной задаче линейного программирования и решить.

*Решение***.** Нижняя цена игры $\alpha = 3$, верхняя цена игры $\beta = 4$. Игра не имеет седловой точки, не имеет дублирующих и/или доминирующих стратегий, поэтому матрица не может быть сведена к матрице меньшей размерности. Сведем к задаче линейного программирования. Пусть $x_i$ – вероятности выбора стратегий первым игроком, а $y_j$ – вероятности выбора стратегий вторым игроком.

Введем переменные

$$t_i = \frac{x_i}{V} \quad \text{и} \quad s_j = \frac{y_j}{V}.$$

Составим системы и целевые функции

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \ge 1 \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \ge 1 \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \ge 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4s_1 + 3s_2 + 4s_3 + 2s_4 \le 1 \\ 3s_1 + 4s_2 + 6s_3 + 5s_4 \le 1 \\ 2s_1 + 5s_2 + 8s_3 + 3s_4 \le 1 \end{cases}$$

$$Z = t_1 + t_2 + t_3 \to \min \qquad W = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \to \max.$$

Составим симплекс-таблицу для второй системы и решим задачу

| Б | Ц | П | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ | $S_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_5$ | 0 | 1 | 4 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| $S_6$ | 0 | 1 | 3 | 4 | **6** | 5 | 0 | 1 | 0 |
| $S_7$ | 0 | 1 | 2 | 5 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | 1/3 | **2** | 1/3 | 0 | –4/3 | 1 | –2/3 | 0 |
| | | 1/6 | 1/2 | 2/3 | 1 | 5/6 | 0 | 1/6 | 0 |
| | | 5/6 | 3/2 | 13/3 | 0 | 13/6 | 0 | –1/6 | 1 |
| | | 1/6 | 1/2 | 1/3 | 0 | 1/6 | 0 | -1/6 | 1 |
| $S_1$ | | 1/6 | 1 | 1/6 | 0 | –2/3 | 1/2 | –1/3 | 0 |
| $S_3$ | | 1/12 | 0 | 7/12 | 1 | 7/6 | –1/4 | 1/3 | 0 |
| $S_7$ | | 7/12 | 0 | 49/12 | 0 | 19/6 | –3/4 | 1/3 | 1 |
| | | 1/4 | 0 | 1/4 | 0 | 1/2 | -1/4 | 0 | 0 |
| $S_1$ | | 3/14 | 1 | 1/2 | 4/7 | 0 | 5/14 | –1/7 | 0 |
| $S_4$ | | 1/14 | 0 | 1/2 | 6/7 | 1 | –3/14 | 2/7 | 0 |
| $S_7$ | | 5/14 | 0 | 5/2 | –19/7 | 0 | –1/14 | –4/7 | 1 |
| | | 2/7 | 0 | 0 | –3/7 | 0 | –1/7 | –1/7 | 0 |

На первом шаге

$$W = S_1 + S_2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}S_1 - \frac{2}{3}S_2 - \frac{5}{6}S_4 - \frac{1}{6}S_6\right) + S_4 =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{3}S_2 + \frac{1}{6}S_4 - \frac{1}{6}S_6.$$

На втором шаге

$$W=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}S_2+\frac{2}{3}S_4-\frac{1}{2}S_5+\frac{1}{3}S_6\right)+\frac{1}{3}S_2+\frac{1}{6}S_4-\frac{1}{6}S_6=$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}S_2+\frac{1}{2}S_4-\frac{1}{4}S_5.$$

На третьем шаге

$$W=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}S_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{2}S_2-\frac{6}{7}S_3+\frac{3}{14}S_5-\frac{2}{7}S_6\right)-\frac{1}{4}S_5=$$
$$\frac{2}{7}-\frac{3}{7}S_3-\frac{1}{7}S_5-\frac{1}{7}S_6.$$

Таким образом, решение игры имеет вид

$$X=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\};\qquad Y=\left\{\frac{3}{4};0;0;\frac{1}{4}\right\};\qquad V=\frac{7}{2}.$$

***Задания для самостоятельного решения***

Найдите решение игр, сведя их к задаче линейного программирования:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}8&3&7\\4&2&9\\2&6&6\end{pmatrix};\qquad \text{б)}\begin{pmatrix}6&3&2&7\\8&5&7&5\\5&6&9&8\end{pmatrix}.$$

Контрольные е для самопроверки

1. Игра. Игроки. Ход игрока. Ход игрока. Личный ход игрока. Случайный ход.
2. Комбинаторными игры. Азартные игры. Стратегия. Стратегические игры. Парная игра Множественная игра
3. Коалиционная игра
4. Бескоалиционная игра
5. Кооперативная игра
6. Выигрыш
7. Игра с нулевой суммой.
8. Гарантированный выигрыш
9. Максиминная стратегией игрока
10. Ожидаемый проигрыш или верхняя цена игры.
11. Минимаксная стратегия игрока.
12. Равновесные игры
13. Седловая точка.
14. Чистые и смешанные стратегии.
15. Дублирующая стратегия.

## Основная литература

[1-5] из раздела 7.

## Дополнительная литература

[6-8] из раздела 7.

## Практическое занятие № 2. Статистические решения.

Цель работы: Изучить основные теоретические положения матричных игр и получить навыки применения теории при решении задач.

Задание:

1. Повторить теоретический материал по предлагаемой теме.
2. Решить совместно с преподавателем основные задачи, позволяющие закрепить теоретические знания.
3. Приобрести практические навыки решения практических задач.
4. Выполнить практическую работу.

Порядок выполнения:

Беседа по основной теме, решение задач с пояснениями. Выполнение и устная защита практической работы.

Форма отчетности:

Решения задач в тетради с указанием основных формул, пояснений и соответствующих правил.

Задания для самостоятельной работы:

1. Изучить основные базовые понятия игр с природой, рассмотреть разные критерии выбора выигрышных стратегий и варианты построения стратегии предпринимателей в условиях известного прогноза ситуации

2. Решить задачи:

**а)** Фирма может за небольшую плату (10 руб.) составить любому студенту программу для каких-то типовых расчетов на ПЭВМ. Каждый сотрудник фирмы может качественно выполнить до 10 заказов.

Стоимость аренды машинного времени составляет 80 руб. в месяц (этого времени достаточно для выполнения 10 работ). Количество студентов, пользующихся услугами фирмы, не превышает 100 человек в месяц. Определить число сотрудников фирмы, дающее максимум общего дохода (для регистрации фирмы необходима численность не менее двух человек).

**б)** Землевладелец на знойном юге решает вопрос о числе рабочих, привлекаемых к уборке томатов. Урожайность колеблется в зависимости от погоды от 500 до 600 центнеров, закупочная цена стабильна и равна 5 руб/кг. Рабочий за сезон собирает 20 центнеров, получая 1.2 руб/кг за уборку и 280 руб. для оплаты стоимости проезда. Затраты на обеспечение рабочих жильем составляют 300 руб. и не зависят от численности.

**в)** В сельхозрайоне с посевной площадью 1430 га решено построить элеватор по одному из типовых проектов на 20, 30, 40, 50 или 60 тыс. центнеров зерна. Привязка проекта обойдется в 37 тыс.руб. Стоимость материалов и оборудования для элеватора мощности 20 тыс. равна 60 тыс.руб. и растет на 10% с ростом мощности на 10 тыс. Затраты на эксплуатацию элеватора на 20 тыс. равны 10 тыс. руб. и растут на 10 тыс. с ростом мощности на 10 тыс. За хранение зерна на счет элеватора вносится плата 10 руб. за центнер. Урожайность колеблется от 14 до 20 ц/га.

**г)** Председатель кооператива решает закупить бочки для засолки огурцов. Виды на урожай колеблются от 700 до 1000 кг, в бочку вмещается 50 кг, цена бочки - 12 руб., затраты на засолку - 2 руб. за бочку, аренда места на рынке - 10 руб, реализационная цена - 1.20 руб/кг.

**д)** Универмаг, работающий по 10 часов в сутки, ежедневно посещают от 7 до 10 тыс. человек. Стоимость покупок одного посетителя в среднем - 10 руб. Время обслуживания - 1 мин. на покупателя. Затраты на оборудование одного рабочего места - 240 руб., зарплата продавца - 140 руб. в месяц. Найти число рабочих мест при планировании работы на год (300 рабочих дней), если покупатель не намерен стоять в очереди из более 7 человек.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию

После самостоятельной подготовки обучающиеся закрепляют теоретические знания в ходе работы над разработанными заданиями.

**ИГРЫ С ПРИРОДОЙ**

До сих пор мы рассматривали игры, в которых соперничают две разумных стороны: игроки, которые могут рассчитывать и прогнозировать варианты выигрышей и проигрышей заранее. Однако многие прикладные ситуации, требующие предварительных расчетов результатов выбора стратегий, зависят от объективной действительности, которую в теории игр называют природой. Под природой могут пониматься как климатические условия, рельефы местности (собственно природа), так и запросы потребителей, количества продаж, всевозможные сочетания производственных факторов. Различные состояния природы и понимаются как ее стратегии. Человек должен предусматривать все основные состояния природы, для которых могут быть известны либо неизвестны вероятности их проявления.

Неопределенность как характеристика внешней среды дает название процессу выбора стратегий в играх с природой – принятие решений в условиях неопределенности.

**Пример**. Швейное предприятие выпускает детские платья и костюмы и реализует их через магазины, сбыт продукции зависит от состояния погоды. По данным наблюдений за несколько прошлых лет сделаны выводы, что при тёплой погоде можно реализовать 600 костюмов и 1 975 платьев, а при плохой погоде 1 000 костюмов и 625 платьев. Известно, что затраты на костюмы 27 денежных единиц, а на платья 6 денежных единиц. Цена реализации костюмов 48 денежных единиц, платьев 16 денежных единиц.

Требуется построить такой оптимальный план выпуска продукции, чтобы независимо от погодных условий средний доход предприятия не изменился.

Решение. Очевидными стратегиями природы являются Т – «теплая погода», Х – «холодная погода». А стратегии предприятия (человека): А – выпуск продукции на тёплую погоду, В – выпуск продукции на холодную погоду. Если предприятие выбирает стратегию А и погода действительно теплая, то его прибыль можно вычислить как

600(48 – 27) + 1 975(16 – 6) = 32 350.

Если предприятие ориентируется на теплую погоду, а в действительности она окажется холодной, то оно теряет прибыль за произведенные, но непроданные платья. Костюмы же будут проданы все, и еще будет продано 625 платьев. Таким образом, прибыль предприятия составит

600(48 – 27) + 625(16 – 6) – (1 975 – 625)6 = 10 750.

Если предприятие выбирает стратегию холодной погоды, а она будет теплой, то непроданными останутся костюмы и тогда прибыль предприятия составит

600(48 – 27) – (1 000 – 600)27 + 625(16 – 6) = 8 050.

Если предприятие выбирает стратегию холодной погоды и она таковой и будет, то прибыль составит

1 000(48 – 27) + 625(16 – 6) = 27 250.

Платежная матрица (матрица прибылей) примет вид.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Т} & \text{Х} \end{array} \\ I = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 32\,350 & 10\,750 \\ 8\,050 & 27\,250 \end{pmatrix}. \end{array}$$

По условию средний доход предприятия при любой погоде должен оставаться неизменным. Следовательно, необходимо использовать вероятностный подход построения смешанных стратегий и рассчитать, с какой вероятностью предприятию стоит применять ту или иную стратегию.

Пусть предприятие с вероятностью x применяет стратегию A , тогда стратегию B оно будет применять с вероятностью 1-x .

Найдём x, приравнивая средний доход предприятия при разных погодных условиях:

если погода теплая, то средняя прибыль предприятия составит

$$32\,350x + 8\,050(1 - x);$$

если же погода холодная, то средняя прибыль

$$10\,750x + 27\,250(1 - x).$$

Приравняем эти величины

$$32\,350x + 8\,050(1-x) = 10\,750x + 27\,250(1-x).$$

Решаем уравнение

$$40\,800x - 19\,200 = 0, \qquad 408x - 192 = 0, \qquad 17x = 8,$$

$$x = \frac{8}{17}, \; 1 - x = \frac{9}{17}.$$

Значит, предприятие из 17 рабочих дней должно работать по стратегии теплой погоды восемь дней, а по стратегии холодной погоды – девять.

Тогда средний доход

$$32350 \cdot \frac{8}{17} + 8050 \cdot \frac{9}{17} \approx 19485{,}29 .$$

И количество продукции тоже можно подсчитать

$$(600\,\text{костюмов} + 1975\,\text{платьев}) \cdot \frac{8}{17} +$$
$$+ (1000\,\text{костюмов} + 625\,\text{платьев}) \cdot \frac{9}{17} =$$
$$= 819\,\text{костюмов} + 1260\,\text{платьев}.$$

Таким образом, смешанная стратегия позволяет определить оптимальный план работы предприятия.

Состояния природы могут представлять как конечное, так и бесконечное множество, а стратегий у человека, как правило, конечное количество. Однако, наблюдая за природой, исследователи на основании определённых расчётов строят матрицы выигрышей V+ (или матрицы полезностей), матрицы затрат V− (или проигрышей, потерь) и матрицы рисков.

Матрица рисков строится по следующим правилам:

1) в матрице выигрышей $V^+$ для каждого состояния природы находят наибольший элемент и из этого элемента вычитают последовательно все элементы соответствующего столбца

$$R_{ij}^{+} = \max_{i}\{V_{ij}^{+}\} - V_{ij}^{+};$$

2) в матрице затрат $V^-$, наоборот, для каждого состояния природы находят наименьший элемент и из каждого элемента соответствующего столбца вычитают найденный $R_{ij}^{-} = V_{ij}^{-} - \min_{i}\{V_{ij}^{-}\}$.

**Пример 2.** Составить матрицу рисков для матрицы прибылей

$$V^{+} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. В каждом столбце находим наибольший элемент

4 5 6 5.

Из 4 вычитаем последовательно элементы первого столбца, из 5 – второго и так далее.

Получаем матрицу рисков.

$$R^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.** Составить матрицу рисков для матрицы потерь.

$$V^{-} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Решение**. Находим наименьшее значение в каждом столбце:

2 3 1 3

Вычитаем из элементов каждого столбца свой наименьший.

Получаем матрицу рисков.

$$R^{-} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Критерии выбора выигрышных стратегий**

Когда перед исследователем возникает задача выбора наиболее выигрышной стратегии, он обязательно должен предусмотреть множество вариантов развития событий. В исследовании операций разработано множество критериев, которые помогают определиться в выборе реальных действий. Рассмотрим наиболее распространенные из них в заданной ситуации.

**Пример**. Камчатские предприниматели решают закупать для экскурсионных маршрутов самолеты малой авиации. Они могут приобрести самолеты на 20, 30, 40 и 50 пассажирских мест. Количество заявок на дальние экскурсии зависит от самых разных факторов и может быть – 0, 10, 20, 30, 40, 50. Прибыль от реализации билетов на экскурсионные рейсы представлена в таблице:

| Заявки / Мест в самолете | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | –121 | 62 | 245 | 245 | 245 | 245 |
| 30 | –168 | 14 | 198 | 380 | 380 | 380 |
| 40 | –216 | –33 | 150 | 332 | 515 | 515 |
| 50 | –264 | –81 | 101 | 284 | 468 | 650 |

Необходимо принять решение о том, какие самолеты закупать.

Рассмотрим, какие решения можно принять на основании разных критериев.

**1. Критерий Лапласа**

Пусть известно, что природа может принимать n различных равновозможных состояний. То есть вероятность того, что природа примет определенное состояние $П_i$ равна

$$p_i = \frac{1}{n}.$$

Тогда для каждой стратегии $S_i$ выигрыш может рассчитываться как среднее арифметическое по всем состояниям природы:

$$V^+(S_i) = \frac{1}{n}\sum_j V_{ij}^+,$$

а проигрыш –

$$V^-(S_i) = \frac{1}{n}\sum_j V_{ij}^-.$$

Сравнивая результаты по всем стратегиям, выбирают тот, который дает наибольший выигрыш, или наименьший проигрыш, или наименьший риск.

В нашей ситуации просчитаем математическое ожидание выигрыша по каждой стратегии:

V(20) = (–121 + 62 + 4·245) : 6 ≈ 153,5;

V(30) = (–168 + 14 + 198 + 3·380) : 6 ≈ 197,3;

V(40) = (–216 – 33 + 150 + 332 + 2·515) : 6 ≈ 210,5;

V(50) = (–264 – 81 + 101 + 284 + 468 + 650) : 6 =193.

Наибольшее из найденных значений – 210 – соответствует стратегии покупки 40-местных самолетов.

**2. Критерий Вальда**

Критерий Вальда ещё называют пессимистическим или критерием сверхосторожности. Согласно этому критерию в матрице прибылей для каждой стратегии находят наименьший выигрыш и из всех найденных выбирают наибольший (нижняя цена игры)

$$V^+ = \max_i\{\min_j V_{ij}^+\}.$$

Если же задана матрица потерь, то по каждой стратегии находят наибольший проигрыш, а из них выбирают наименьшее значение

$$V^- = \min_i\{\max_j V_{ij}^-\}.$$

Для нашей ситуации: minV(20) = –121, minV(30) = –168, minV(40) = –216, minV(50) = –264.

Наибольшее из всех этих значений – отрицательное число –121. Вот в чем крайний пессимизм критерия Вальда. Ведь согласно этому критерию следует вообще отказаться от задуманного предприятия.

**3. Критерий Сэвиджа**

Согласно этому критерию анализируется матрица рисков. Для каждой стратегии определяют наибольший риск, а затем из полученных результатов выбирают наименьший и соответствующую стратегию.

$$V^+ = \begin{pmatrix} -121 & 62 & 245 & 245 & 245 & 245 \\ -168 & 14 & 198 & 380 & 380 & 380 \\ -216 & -33 & 150 & 332 & 515 & 515 \\ -264 & -81 & 101 & 284 & 468 & 650 \end{pmatrix}$$

$$\max \quad -121 \quad 62 \quad 245 \quad 380 \quad 515 \quad 650$$

$$R^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 135 & 270 & 405 \\ 47 & 48 & 47 & 0 & 135 & 270 \\ 95 & 95 & 95 & 48 & 0 & 135 \\ 144 & 143 & 144 & 96 & 47 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \max \\ 405 \\ 270 \\ 135 \\ 144 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \min = 135.$$

Делаем вывод о том, что лучше закупать 40-местные самолеты.

И критерий Вальда, и критерий Сэвиджа воспринимают «природу» как умного противника и предполагают ориентирование на её самые неблагоприятные состояния.

**4. Критерий Гурвица**

Учитывает сразу два крайних состояния природы, одно из них: «природа находится в самом выгодном состоянии», второе – «природа находится в самом невыгодном состоянии». Этот критерий ещё называют критерием пессимизма-оптимизма, или критерием растерянного пессимиста, или критерием рассудительного оптимиста. Выбор стратегии по результатам расчёта с помощью этого критерия субъективно обусловлен.

Суть критерия состоит в том, что когда существуют определённые наблюдения, с помощью которых можно вычислить вероятность появления или непоявления определённого состояния, то для самого выгодного состояния природы полагают вероятность его наступления p, а для самого невыигрышного – 1–p.

И если дана матрица выигрышей, то выигрыш от выбранной стратегии рассчитывается

$$V^+ = \max_i \{p \max_j V_{ij} + (1-p) \min_j V_{ij}\}.$$

Если же построена матрица затрат, тогда

$$V^- = \min_i \{p \min_j V_{ij} + (1-p) \max_j V_{ij}\}.$$

Если эти состояния природы могут появиться с одинаковой вероятностью, то p выбирают равным 0,5.

Для расчёта стратегии, подчинённой законам пессимизма, p выбирают достаточно малым, например 0,1, а для законов оптимизма – 0,9.

Рассмотрим применение стратегии Гурвица в разных случаях.

Сначала предположим, что информация о возможном количестве экскурсантов отсутствует.

$$p = 0{,}5$$

$$\begin{matrix} 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0{,}5 \cdot 245 + 0{,}5 \cdot (-121) = 62 \\ 0{,}5 \cdot 380 + 0{,}5 \cdot (-168) = 106 \\ 0{,}5 \cdot 515 + 0{,}5 \cdot (-216) = 149{,}5 \\ 0{,}5 \cdot 650 + 0{,}5 \cdot (-264) = 193 \end{matrix} \right\} \max = 193.$$

Значит, можно закупать 50-местные самолеты.

Теперь рассмотрим ситуацию с позиции оптимизма: наилучшее для человека состояние природы будем ждать с вероятностью 0,9, а наихудшее – с вероятностью 0,1. Получим

$$\begin{matrix} 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0{,}9 \cdot 245 + 0{,}1 \cdot (-121) = 208{,}4 \\ 0{,}9 \cdot 380 + 0{,}1 \cdot (-168) = 325{,}2 \\ 0{,}9 \cdot 515 + 0{,}1 \cdot (-216) = 441{,}9 \\ 0{,}9 \cdot 650 + 0{,}1 \cdot (-264) = 558{,}6 \end{matrix} \right\} \max = 558{,}6.$$

И в этом случае большая прибыль ожидается, если будут работать 50-местные самолеты.

Рассмотрим ситуацию с позиции пессимизма. Предположим, что наилучшее состояние природы проявится с вероятностью 0,1, а наихудшее – с вероятностью 0,9

$$\begin{matrix} 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0{,}1 \cdot 245 + 0{,}9 \cdot (-121) = -84{,}4 \\ 0{,}1 \cdot 380 + 0{,}9 \cdot (-168) = -113{,}2 \\ 0{,}1 \cdot 515 + 0{,}9 \cdot (-216) = -143{,}1 \\ 0{,}1 \cdot 650 + 0{,}9 \cdot (-264) = -172{,}6 \end{matrix} \right\} \max = -84{,}4.$$

Следовательно, с позиции пессимизма нет смысла надеяться на прибыль.

В «играх с природой», как правило, расчёты делают сразу по всем критериям, а в критерии Гурвица сравнивают несколько вариантов ситуаций при разных значениях p и, в конечном счёте, выбирают ту стратегию, которая чаще рекомендуется использованными критериями.

В данной ситуации среди выигрышных чаще встречалась стратегия закупки 40-местных самолетов.

**Задача**. В некоторой местности возможно строительство электростанции одного из четырёх типов: тепловая (Т), приплотинная (П), бесшлюзовая (Б) и шлюзовая (Ш). Эффективность каждого типа определяется следующими факторами: режимами работы, удалённостью от административного центра, стоимостью рабочей силы и стоимостью перевозок машин и механизмов в данные регионы. В каждом из этих случаев рассчитана экономическая эффективность для определенного типа электростанций в данном регионе:

| Факторы эффектив-ности / Вид элек-тростанции | Ре-жимы работы | Удаленность от административного цен-тра | Стоимость ра-бочей силы | Стоимость перевозок машин и механизмов |
|---|---|---|---|---|
| Тепловая | 5 | 2 | 8 | 4 |
| Приплотинная | 2 | 3 | 4 | 12 |
| Бесшлюзовая | 8 | 5 | 3 | 10 |
| Шлюзовая | 1 | 4 | 2 | 8 |

Следует принять решение о строительстве электростанции определенного вида с целью достижения наибольшей эффективности.

**Решение**.

Назовем стратегии строительства Т, П, Б, Ш.

$$И(Т) = (5 + 2 + 8 + 4) : 4 = 4{,}75;$$
$$И(П) = (2 + 3 + 4 + 12) : 4 = 5{,}25;$$
$$И(Б) = (8 + 5 + 3 + 10) : 4 = 6{,}5;$$
$$И(Ш) = (1 + 4 + 2 + 8) : 4 = 3{,}75.$$

**1. По критерию Лапласа**

По этому критерию следует строить бесшлюзовую электростанцию.

**2. По критерию Вальда**

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{c} \min \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right\} \max = 3.$$

Тоже следует строить бесшлюзовую электростанцию.

**3. По критерию Сэвиджа**

Построим матрицу рисков.

$$R^{+} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{c} \max \\ 8 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{array}\right\} \min = 5.$$

Отмечаем, что наименьший риск опять же будет при строительстве бесшлюзовой электростанции.

**4. Критерий Гурвица**

Сначала рассмотрим ситуацию при p = 0,5.

$$\begin{array}{c|l} Т & 0{,}5\cdot 8 + 0{,}5\cdot 2 = 5 \\ П & 0{,}5\cdot 12 + 0{,}5\cdot 2 = 7 \\ Б & 0{,}5\cdot 10 + 0{,}5\cdot 3 = 6{,}5 \\ Ш & 0{,}5\cdot 8 + 0{,}5\cdot 1 = 4{,}5 \end{array} \Bigg\} \max = 7.$$

Нужно строить приплотинную электростанцию.

$$\begin{array}{c|l} Т & 0{,}2\cdot 8 + 0{,}8\cdot 2 = 3{,}2 \\ П & 0{,}2\cdot 12 + 0{,}8\cdot 2 = 4 \\ Б & 0{,}2\cdot 10 + 0{,}8\cdot 3 = 4{,}4 \\ Ш & 0{,}2\cdot 8 + 0{,}8\cdot 1 = 2{,}4 \end{array} \Bigg\} \max = 4.$$

Вывод: лучше строить бесшлюзовую электростанцию.

В целом по всем стратегиям чаще встречается стратегия выбора строительства бесшлюзовой электростанции.

**<u>Контрольные вопросы для самопроверки</u>**

1. Матрица рисков
2. Матрицы выигрышей $V^{+}$
3. Принятие решений в условиях полной неопределѐ нности.
4. Принятие решений в условиях риска.
5. Принятие решений в условиях частичной неопределѐ нности.
6. Критерии выбора решений в играх с природой.

7. Критерий Лапласа
8. Критерий Вальда
9. Критерий Сэвиджа
10. Критерий Гурвица

Основная литература

[1-5] из раздела 7.

Дополнительная литература

[6-8] из раздела 7.

## 10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

– Microsoft Windows Professional Russian
– Microsoft Office Russian
– Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Security
– Справочно-правовая система «Консультант Плюс»

## 11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

| ***Вид занятия*** | ***Наименование аудитории*** | ***Перечень основного оборудования*** | ***№ Лк, ПЗ*** |
|---|---|---|---|
| **1** | **3** | **4** | **5** |
| Лк | Лекционная аудитория (мультимедийный класс) | Интерактивная доска SMART Board 680i2/Unifl, Интерактивный планшет Wacom PL-720, Колонки Microlab Solo-7C, Ноутбук Samsung R610<NP-R610-FS08>, Телевизор плазменный Samsung 63 PS-63A756T1M | Лк № 1-6 |
| ПЗ | Дисплейный класс | Системный блок AMD A10-7800 Radeon R7 (12 шт.), Системный блок для слабовидящих пользователей AMD A10-7850K (1 шт.), Монитор Philips233 V5QHABP (13 шт.) | ПЗ №№ 1-10 |
| СР | Читальный зал №1 | Оборудование 10 ПК i5-2500/H67/4Gb(монитор TFT19 Samsung);<br>принтер HP LaserJet P2055D | - |

**Приложение 1**

## ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

| № компетенции | Элемент компетенции | Раздел | Тема | ФОС |
|---|---|---|---|---|
| ОПК-7 | способность применять знания математики, физики и естествознания, химии и материаловедения, теории управления и информационные технологии в инновационной деятельности | **1.** Основные понятия теории игр | **1.1** Задачи теории игр<br>**1.2** Основные понятия игры<br>**1.3** Классификация игр<br>**1.4** Теорема Джона фон Неймана | вопросы к зачету 1.1-1.4 |
| | | **2.** Матричные игры и линейное программирование | **2.1** Максиминная и минимаксная стратегии игрока<br>**2.2** Равновесные игры,<br>**2.3** Чистые и смешанные стратегии<br>**2.4** Итеративный метод Робинсона-Брауна<br>**2.5** Многошаговые игры. Игры на выживание.<br>**2.6** Многошаговые игры. Игры погони | вопросы к зачету 2.1-2.6 |
| | | **3.** Статистические решения | **3.1** Основные понятия теории статистических решений<br>**3.2** Выбор критерия принятия решения. Критерий Лапласа<br>**3.3** Выбор критерия принятия решения. Критерий Вальда<br>**3.4** Выбор критерия принятия решения. Критерий Гурвица<br>**3.5** Выбор критерия принятия решения. Критерий Сэвиджа | вопросы к зачету 3.1-3.4 |
| ПК-13 | способность использовать информационные технологии и инструментальные средства при разработке проектов | **2.** Матричные игры и линейное программирование | **2.7** Решение матричной игры 2*2 аналитическим методом с помощью MS Excel<br>**2.8** Решение матричной игры 3*3 аналитическим методом Робинсона-Брауна с помощью MS Excel<br>**2.9** Решение матричной игры 3*3 методом сведения к задаче линейного программирования с помощью MS Excel | вопросы к зачету 2.7-2.9 |
| | | **3.** Статистические решения | **3.6** Решение игр с природой с помощью MS Excel | вопросы к зачету 3.6 |

## 2. Вопросы к зачету

| № п/п | Компетенции | | ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ | № и наименование раздела |
|---|---|---|---|---|
| | Код | Определение | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1. | ОПК-7 | способность применять знания математики, физики и естествознания, химии и материаловедения, теории управления и информационные технологии в инновационной деятельности | Задачи теории игр | **1.** Основные понятия теории игр |
| | | | **1.2** Основные понятия игры | |
| | | | **1.3** Классификация игр | |
| | | | **1.4** Теорема Джона фон Неймана | |
| | | | **2.1** Максиминная и минимаксная стратегии игрока | **2.** Матричные игры и линейное программирование |
| | | | **2.2** Равновесные игры, | |
| | | | **2.3** Чистые и смешанные стратегии | |
| | | | **2.4** Итеративный метод Робинсона-Брауна | |
| | | | **2.5** Многошаговые игры. Игры на выживание. | |
| | | | **2.6** Многошаговые игры. Игры погони | |
| | | | **3.1** Основные понятия теории статистических решений | **3.** Статистические решения |
| | | | **3.2** Выбор критерия принятия решения. Критерий Лапласа | |
| | | | **3.3** Выбор критерия принятия решения. Критерий Вальда | |
| | | | **3.4** Выбор критерия принятия решения. Критерий Гурвица | |
| | | | **3.5** Выбор критерия принятия решения. Критерий Сэвиджа | |
| 2. | ПК-13 | способность использовать информационные технологии и инструментальные средства при разработке проектов | **2.1** Решение матричной игры 2*2 аналитическим методом с помощью MS Excel | **2.** Матричные игры и линейное программирование |
| | | | **2.2** Решение матричной игры 3*3 аналитическим методом Робинсона-Брауна с помощью MS Excel | |
| | | | **2.3** Решение матричной игры 3*3 методом сведения к задаче линейного программирования с помощью MS Excel | |
| | | | **3.6** Решение игр с природой с помощью MS Excel | **3.** Статистические решения |

### 3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

| Показатели | Оценка | Критерии |
|---|---|---|
| **Знать**<br>*(ОПК-7):*<br>– основные математические модели принятия решений на основе методов моделирования инновационных процессов на основе теории игр<br>*(ПК-13):*<br>– современные информационные технологии, используемые при проведении расчетных работ моделей теории игр;<br><br>**Уметь**<br>*(ОПК-7):*<br>**уметь**:<br>– решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений с использованием методов теории игр;<br>*(ПК-13):*<br>– готовить расчетные данные и использовать функционал информационных технологий;<br><br>**Владеть**<br>*(ОПК-7):*<br>– математическими, статистическими и количественными методами моделирования инновационных процессов на основе теории игр;<br>*(ПК-13):*<br>– навыками расчета моделей теории игр с использованием информационных технологий и инструментальных средств. | **зачтено** | Оценка «**зачтено**» выставляется в случае, если студент демонстрирует:<br>– всестороннее систематическое знание основных понятий, моделей, методов моделирования процессов на основе теории игр;<br>– знание современных информационных технологий и умение использовать необходимый функционал при решении практических задач теории игр;<br>– правильное выполнение практических математических задач, используемых при принятии управленческих решение с использованием теории игр. |
| | **не зачтено** | Оценка «**не зачтено**» выставляется в случае, если студент демонстрирует:<br>– существенные пробелы в знании основных понятий, моделей, методов моделирования процессов на основе теории игр;<br>– существенные пробелы в знании современных информационных технологий и умение использовать необходимый функционал при решении практических задач теории игр;<br>– принципиальные ошибки при выполнении математических задач, используемых при принятии управленческих решение с использованием теории игр. |

## 4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности

Цель и задачи дисциплины Б1.В.ДВ.03.02 Теория игр представлены в разделе 1 настоящей рабочей программы. Место дисциплины в структуре образовательной программы представлено в разделе 2 настоящей рабочей программы. Распределение объема дисциплины по формам обучения с указанием видов учебных занятий представлено в разделе 3 настоящей рабочей программы. Содержание дисциплины указано в разделе 4 настоящей рабочей программы.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы студентов по дисциплине находятся в свободном доступе в соответствии с разделом 6 настоящей рабочей программы.

При изучении дисциплины необходимо использовать литературу, указанную в разделе 7 настоящей рабочей программы, а также перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», представленных в разделе 8 настоящей рабочей программы.

Консультации для студентов по дисциплине проводятся в соответствии с графиком проведения консультаций, представленном на стенде кафедры, за которой закреплена указанная дисциплина.

К зачету допускаются студенты очной формы обучения, которые выполнили, оформили и защитили все практические работы, предусмотренные в конкретном семестре. Методические указания по выполнению и оформлению представлены в разделе 9.1. настоящей рабочей программы.

К зачету допускаются студенты заочной формы обучения, которые теоретически подготовлены по всем вопросам и владеют навыками эффективного применения основных математических моделей принятия решений на основе методов моделирования инновационных процессов на основе теории игр

Информационные технологии, используемые при освоении дисциплины, перечислены в разделе 10 настоящей рабочей программы.

Оценка знаний, умений, навыков осуществляется в процессе промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине, которая осуществляется в виде зачета. Для оценивания знаний, умений, навыков используются ФОС по дисциплине.

Зачет проводится в устной форме по выданному преподавателем заданию.

По итогам выполненного задания преподаватель оценивает уровень знаний, умений, навыков. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, сформированных по итогам изучения дисциплины, представлено в разделе 3 Приложения 1 настоящей рабочей программы. Основными оценочными средствами при проведении промежуточной аттестации являются вопросы к зачету.

**Приложение 2**

# АННОТАЦИЯ
# рабочей программы дисциплины
# Теория игр

## 1. Цель и задачи дисциплины

Целью изучения дисциплины является овладение основами теоретических и практических знаний экономико-математических методов и моделей теории игр для решения задач в сфере инновационной деятельности высокотехнологичных предприятий (организаций) при разработке, принятии и реализации рациональных управленческих решений.

Задачами изучения дисциплины являются:

– изучение теоретических основ и развитие практических навыков применения методов теории игр при принятии решений в реальных условиях многокритериальности и неполноты информации рыночной экономики, с использованием современных методов экономико-математического моделирования и информационных технологий;

– освоение будущим бакалавром комплекса методов поиска и обоснованного выбора наилучших (оптимальных) решений, раскрытие особенности экономико-математических методов и моделей теории игр при обосновании решений, принимаемых руководителем коллектива предприятия (организации) и возможности математического моделирования при их разработке и реализации;

– развитие у студентов навыков творческого подхода к выбору методов моделирования в рамках теории игр при анализе управленческих (производственных) ситуаций и выработке своевременных обоснованных управленческих решений в области инновационной деятельности на современных высокотехнологичных промышленных предприятиях и в организациях.

## 2. Структура дисциплины

2.1 Распределение трудоемкости по отдельным видам учебных занятий, включая самостоятельную работу: 17 ч. лекции, 34 ч. практические работ, самостоятельная работа 57ч.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 108 часов, 3 зачетных единицы

2.2 Основные разделы дисциплины:

1 – Основные понятия теории игр
2 – Матричные игры и линейное программирование
3 – Статистические решения

## 3. Планируемые результаты обучения (перечень компетенций)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:
ОПК-7 - способность применять знания математики, физики и естествознания, химии и материаловедения, теории управления и информационные технологии в инновационной деятельности;
ПК-13 - способность использовать информационные технологии и инструментальные средства при разработке проектов.

## 4. Вид промежуточной аттестации: зачет

**Приложение 3**

***Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе***
***на 20___-20___ учебный год***

**1.** В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие дополнения:
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

**2.** В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие изменения:
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________

Протокол заседания кафедры №____ от «___» __________ 20 ____ г.,
*(разработчик)*

Заведующий кафедрой _____________________ _______________________
*(подпись)* *(Ф.И.О.)*

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 27.03.05 Инноватика от «11» августа 2016 г. № 1006

**для набора 2015 года:** и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «03» июля 2018 г. № 413

**для набора 2016 года**: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «06» октября 2016 г. №684

**для набора 2017 года**: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для очной формы обучения от «06» марта 2017 г. №125

**Программу составил:**

Вахрушева М.Ю., доцент баз. МиИТ, доцент, к.физ.-мат.н. ______________________

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании базовой кафедры МиИТ

от «19» декабря 2018 г., протокол № 8

И.о. заведующего базовой кафедрой МиИТ _____________ Е.И. Луковникова

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий выпускающей базовой кафедрой ЭиМ ________________ Черутова М..И.

Директор библиотеки _____________ Т.Ф. Сотник

Рабочая программа одобрена методической комиссией факультета ФЭиУ

от «28» декабря 2018 г., протокол № 4

Председатель методической комиссии факультета _____________ Е.В. Трапезникова

СОГЛАСОВАНО:

Начальник учебно-методического управления _____________ Г.П. Нежевец

Регистрационный №________