МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Базовая кафедра менеджмента и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
______________Е.И. Луковникова
«_____» декабря 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

МАТЕМАТИКА

Б1.Б.05

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ

38.03.02 Менеджмент

ПРОФИЛЬ ПОДГОТОВКИ

Информационный менеджмент

Программа прикладного бакалавриата

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Стр.

1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Вид деятельности выпускника

Дисциплина охватывает круг вопросов, относящихся к информационно-аналитическому виду профессиональной деятельности выпускника в соответствии с компетенциями и видами деятельности, указанными в учебном плане.

Цель дисциплины

знакомство обучающихся с местом и ролью математики в современном мире, овладение обучающимися основами теоретических и практических математических знаний, используемых в сфере управления и бизнеса.

Основными задачами дисциплины являются:

- демонстрация на примерах математических понятий и методов действие законов материального мира, сущности научного подхода, специфики математики и ее роли в осуществлении научно-технического прогресса;

-создание фундамента математического образования, необходимого для получения профессиональных компетенций и для изучения последующих дисциплин.

Код компетенции	Содержание компетенций	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3
ОК-3	способность использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности	**знать:** - основные понятия и инструменты математической науки; **уметь:** – решать типовые математические задачи экономического содержания в сфере бизнеса и управления; **владеть:** - математическими методами при решении профессиональных задач повышенной сложности в сфере управления и бизнеса;

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.Б.05 Математика относится к базовой.

Дисциплина Математика базируется на знаниях учебных дисциплин основных общеобразовательных программ. Математика представляет основу для изучения дисциплин: Экономическая теория; Экономика организаций; Экономический анализ, Финансовый анализ, Экономико-математические методы.

Такое системное междисциплинарное изучение направлено на достижение требуемого ФГОС уровня подготовки по квалификации бакалавр.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Распределение объема дисциплины по формам обучения

Форма обучения	*Курс*	*Семестр*	*Трудоемкость дисциплины в часах*						*Контрольная работа*	*Вид промежуточной аттестации*
			Всего часов (экз)	*Аудиторных часов*	*Лекции*	*Лабораторные работы*	*Практические занятия*	*Самостоятельная работа*		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Очная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Заочная	1,2	-	324	34	14	-	20	277	1к, 1к, 2к, 2к	зачёт, экзамен
Заочная (ускоренное обучение)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Очно-заочная	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

3.2. Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий и трудоемкости

Вид учебных занятий	*Трудоемкость (час.)*	*в т.ч. в интерактивной, активной, инновациионной формах, (час.)*	*Распределение по курсам, час*	
			1	*2*
1	**2**	**3**	**4**	**5**
I. Контактная работа обучающихся с преподавателем (всего)	34	10	20	14
Лекции (Лк)	14	4	8	6
Практические занятия (ПЗ)	20	6	12	8
Контрольная работа	+	-	+	+
Групповые консультации	+	-	+	+
II.Самостоятельная работа обучающихся (СР)	277	-	156	121
Подготовка к практическим занятиям	40	-	20	20

Выполнение контрольной работы	67	-	46	21
Подготовка к экзамену в течение семестра	170	-	90	80
III. Промежуточная аттестация зачет экзамен	4 9	-	4	 9
Общая трудоемкость дисциплины . час.	324	-	180	144
зач. ед.	9	-	5	4

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Распределение разделов дисциплины по видам учебных занятий

- для заочной формы обучения:

№ раз-дела	*Наименование раздела*	*Трудоем-кость, (час.)*	*Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость; (час.)*		
			учебные занятия		*самостояте льная работа обучаю-щихся*
			лекции	*Практические работы*	
1	2	3	4	5	6
1.	**Предварительные сведения**	**44**	**1**	**1**	**42**
2.	**Нелинейные функции**	**52**	**2**	**3**	**47**
3.	**Пределы функций и дифференциальное исчисление**	**54**	**3**	**4**	**47**
4.	**Функции нескольких переменных**	**53**	**2**	**4**	**47**
5.	**Интегральное исчисление**	**53**	**2**	**4**	**47**
6.	**Матричная алгебра**	**55**	**4**	**4**	**47**
	ИТОГО	**311**	**14**	**20**	**277**

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и темам

Раздел 1. Предварительные сведения

(комп. презентация - 6ч.)

Содержание*: 1.1. Множества и операции над ними 1.2. Функции одной переменной*

1.3. Графики функций 1.4. Линейная функция

1.5. Равновесие спроса и предложения

1.6. Национальный доход

1.1. Множества и операции над ними

Понятие множества относится к наиболее общим понятиям математики. Дать строгое определение понятию множества, как и любому другому фундаментальному понятию, мы не можем, а потому должны удовлетвориться пояснениями типа: *"множество — это совокупность или группа объектов, которые рассматриваются как целое"*. Это может быть множество букв, напечатанных на странице, множество студентов в группе, множество четных чисел и т.д. Каждый объект, входящий в множество, называется **элементом множества**. Обычно множества обозначаются прописными, а элементы множества – строчными буквами. Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут

$$a \in A.$$

Наоборот, если элемент a не принадлежит множеству A, мы будем писать

$$a \notin A.$$

Пусть A и B – два произвольных множества. Если каждый элемент, принадлежащий множеству A, принадлежит также и множеству B, то A называется **подмножеством** B, и это записывается как $A \subseteq B$.

Например, если A – множество студентов в группе, а B – множество тех студентов, которые сдали экзамен на "хорошо" и "отлично", то

$$B \subseteq A.$$

Если

$$A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A,$$

то множества A и B называются равными, и мы пишем

$$A = B.$$

Возвращаясь к предыдущему примеру, можно заключить, что $A = B$, если *все* студенты группы сдали экзамен на "хорошо" и "отлично".

Очевидно, что любое множество полностью определено, если нам известны все элементы, принадлежащие f данному множеству. Например, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ есть множество, состоящее из четырех чисел, или $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество всех натуральных чисел, где многоточие означает остальные элементы множества N.

Полезно ввести понятие **пустого множества** $\varnothing$ как множества, не содержащего ни одного элемента.

Объединением двух множеств A и B называется такое множество $C = A \cup B$, каждый элемент которого принадлежит или множеству A, или множеству B, или им обоим.

Пересечением множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, каждый элемент которого принадлежит и множеству A, и множеству B.

Например, пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $A \cap B = \{2, 3\}$.

Множество чисел

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

называется **множеством целых чисел**.

Если мы возьмем все числа вида

$$\pm\frac{m}{n},$$

где m, n – натуральные числа, и добавим число ноль, получим **множество рациональных чисел** Q. Как известно, любое рациональное число можно представить *периодической* десятичной дробью. Например,

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots,$$

где многоточие означает повторяющуюся цифру 3.

В математике рассматривают также и иррациональные числа. В отличие от рациональных чисел *иррациональные* числа представляются бесконечными *непериодическими* десятичными дробями. Например, иррациональным является хорошо известное из геометрии число $\pi = 3{,}14159\ldots$, где многоточие означает невыписанные цифры.

Объединение рациональных и иррациональных чисел образует **множество вещественных чисел** R. Вещественные числа удобно изображать точками на прямой линии. Для этого на прямой линии выбираются *начало* – точка отсчета 0, *направление* (обычно слева направо и обозначается стрелкой), а также *единичный отрезок* e. Число a будет изображаться точкой на этой прямой, отстоящей от 0 на расстоянии $|a|$. Здесь $|a|$ – абсолютная величина (модуль) числа a, определяемая равенствами

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0, \\ -a & a < 0. \end{cases}$$

Точка выбирается справа от 0, если число a положительное, и слева, если число a отрицательное.

Такая линия называется *числовой осью* (рис. 1.1).

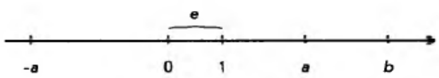


Рис. 1.1

Заметим, что если a, b – две точки числовой оси, число $|a - b|$ – есть **расстояние** между ними. Если числа a и b связаны неравенством $a < b$, число b лежит на числовой оси *правее* числа a.

1.2. Функции одной переменной

Понятие функции является центральным для всей математики. Особенно важную роль оно играет в математическом анализе. В отличие от понятия множества определение функции мы можем дать вполне строго. Начнем с простого примера.

Предположим, некоторая фирма производит продукцию, которую продает по цене 100 д.е. за одну штуку. (Здесь и в дальнейшем конкретный вид продукции и наименование денежной единицы (д.е.) будут опускаться. Читатель может выбирать их по своему усмотрению.) Далее предположим, что у нас есть таблица, в которую занесены данные ежедневных продаж и доходов:

Объем продаж (штук в день)	30	40	28	14	36
Доход (д.е. в день)	3000	4000	2800	1400	3600

Легко понять содержание таблицы. Если, например, в день продано 30 единиц продукции, то доход за этот день равен 3000, если 40, то 4000 и т.д. Обозначая дневной объем продаж через x, а соответствующий доход через y, можно связь между ними выразить простой формулой

$$y = 100x.$$

Теперь дадим общее определение функции.

Функцией f, заданной на некотором множестве X, называется правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Множество X называется *областью определения*, а Y – *множеством значений функции*. Чаще всего функция обозначается $y = f(x)$.

В примере, рассмотренном выше, область определения функции – это множество $X = \{30, 40, 28, 14, 36\}$, а множество значений функции $Y = \{3000, 4000, 2800, 1400, 3600\}$, сама же функция – это "правило", по которому мы для каждого числа из верхней строки таблицы выбираем число из нижней строки, находящееся в том же столбце.

Функцию можно наглядно представить себе в виде "черного ящика", который каждое входное значение x преобразует в выходное значение y (рис. 1.2).

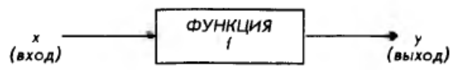


Рис. 1.2

Поскольку x и y могут принимать любые значения, принадлежащие множествам X и Y соответственно, они называются *переменными величинами*. При этом "входная" величина x выбирается из множества X произвольно (в нашем примере мы можем взять любое число из верхней строки таблицы) и называется *независимой переменной*. "Выходная" же величина y определяется выбором величины x (мы берем y из того столбца таблицы, что и x) и называется *зависимой переменной*.

В дальнейшем мы подробно рассмотрим некоторые функции, имеющие многочисленные применения в экономике. В большинстве случаев (но не всегда) числовые функции представляются формулами. Например:

$$y = 2x + 3 \quad \text{или} \quad y = 3x^2 + 4.$$

Во всех случаях, когда функцию можно представить формулой, ее область определения X и множество значений Y являются подмножествами множества вещественных чисел. Эти подмножества обычно задаются неравенствами вида

$$a < x \leqslant b, \quad a < x < b, \quad a \leqslant x \leqslant b \text{ и др.,}$$

где a и b – константы.

Если функция задается формулами, включающими основные алгебраические операции, при нахождении ее области определения часто приходится исключать различные значения аргумента x. Так, например, необходимо исключать:

все значения x, при которых выражение под знаком радикала четной степени становится отрицательным;

все значения x, приводящие к делению на 0.

Пример. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{3x-9}\,.$$

Решение. Учитывая, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным, получаем:

$$3x-9\geqslant 0,$$
$$3x\geqslant 9,$$
$$x\geqslant 3.$$

Последнее неравенство и определяет искомую область определения X. Графически ее можно представить на числовой оси (рис. 1.3).

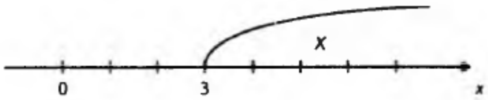


Рис. 1.3

Пример. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}.$$

Решение. Мы должны исключить такие x, при которых выражение, стоящее в знаменателе дроби, обращается в нуль. Решая уравнение

$$x^2-4=0,$$

найдем его корни:

$$x=2 \ \text{ и } \ x=-2.$$

Таким образом, областью определения функции является вся числовая ось, за исключением двух точек: 2 и -2.

Выше отмечалось, что числовые функции обычно задаются формулами. Однако одна и та же функция в различных частях своей области определения может задаваться различными формулами.

Предположим, производится закупка товара. Хорошо известно, что при закупке больших партий товара часто предоставляется оптовая скидка. Пусть она определяется следующим образом: если покупается партия товара в количестве менее 100 штук, цена будет 2 д.е. за штуку; если от 100 до 1000 штук, цена будет 1,95 д.е. за штуку; если же не менее 1000, цена будет 1,9 д.е. за штуку условного товара. Нас интересует функция $f(x)$, определяющая стоимость произвольной партии товара. Ее можно записать в виде системы уравнений:

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x<100,\\ 1{,}95x & 100\leqslant x<1000,\\ 1{,}9x & x\geqslant 1000.\end{cases}$$

Предположим, нас интересует стоимость партии из 700 штук. Тогда:

$$f(700)=1{,}95\cdot 700=1365,$$

т.е. для определения значения функции в точке 700 используется вторая формула системы.

1.3. Графики функций

Введем понятие *прямоугольной системы координат на плоскости*. Для этого возьмем две взаимно перпендикулярные числовые оси (*оси координат*) с общей нулевой точкой, как показано на рис. 1.4. Горизонтальную ось обычно обозначают буквой X (или по имени переменной – x) и называют **осью абсцисс**, а вертикальную – буквой Y (или y) и называют **осью ординат**. Разумеется, можно использовать и другие обозначения, что мы и будем иногда делать. Из рис. 1.4 ясно, что любую точку P на плоскости можно представить как упорядоченную пару чисел (x, y). Для этого достаточно опустить из точки P перпендикуляры на координатные оси. Расстояния (с соответствующими знаками) от начала координат до точек пересечения перпендикуляров с осями X и Y и дадут нам соответствующие числа x и y, которые называются *координатами* точки P. Саму точку в этом случае часто записывают в виде $P(x, y)$.

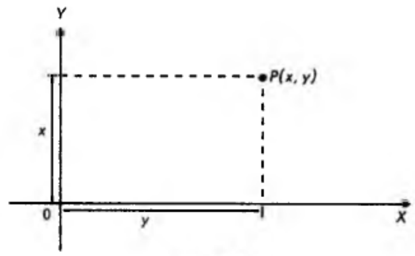


Рис. 1.4

На рис. 1.5 в качестве примера изображены четыре точки с различными координатами: $A\,(1, 3)$, $B\,(-2, 4)$, $C\,(-3, -3)$, $D\,(3, -2)$.

стоимость произвольной партии товара. Ее можно записать в виде системы уравнений:

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x<100,\\ 1{,}95x & 100\leqslant x<1000,\\ 1{,}9x & x\geqslant 1000.\end{cases}$$

Предположим, нас интересует стоимость партии из 700 штук. Тогда:

$$f(700)=1{,}95\cdot 700=1365,$$

т.е. для определения значения функции в точке 700 используется вторая формула системы.

1.3. Графики функций

Введем понятие *прямоугольной системы координат на плоскости*. Для этого возьмем две взаимно перпендикулярные числовые оси (*оси координат*) с общей нулевой точкой, как показано на рис. 1.4. Горизонтальную ось обычно обозначают буквой X (или по имени переменной – x) и называют **осью абсцисс**, а вертикальную – буквой Y (или y) и называют **осью ординат**. Разумеется, можно использовать и другие обозначения, что мы и будем иногда делать. Из рис. 1.4 ясно, что любую точку P на плоскости можно представить как упорядоченную пару чисел (x, y). Для этого достаточно опустить из точки P перпендикуляры на координатные оси. Расстояния (с соответствующими знаками) от начала координат до точек пересечения перпендикуляров с осями X и Y и дадут нам соответствующие числа x и y, которые называются *координатами* точки P. Саму точку в этом случае часто записывают в виде $P(x, y)$.

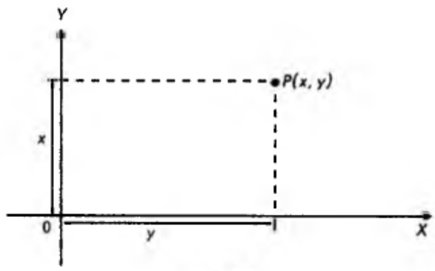


Рис. 1.4

На рис. 1.5 в качестве примера изображены четыре точки с различными координатами: $A\,(1, 3)$, $B\,(-2, 4)$, $C\,(-3, -3)$, $D\,(3, -2)$.

Используя прямоугольную систему координат, функции можно изображать в наглядной форме графически. Такое изображение называется *графиком* функции. График функции (одной переменной) – некоторая линия на плоскости. Эта линия состоит из точек координатной плоскости с координатами $(x, f(x))$, где x принадлежит области определения функции $y=f(x)$.

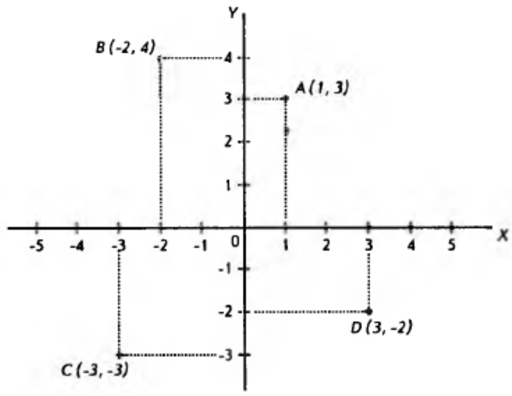


Рис. 1.5

Вернемся к примеру, приведенному в начале параграфа 1.2. В нем рассматривалась функция дохода от объема продаж. Используя приведенную ранее таблицу, построим график функции по точкам: (30, 3000), (40, 4000), (28, 2800), (14, 1400), (36, 3600).

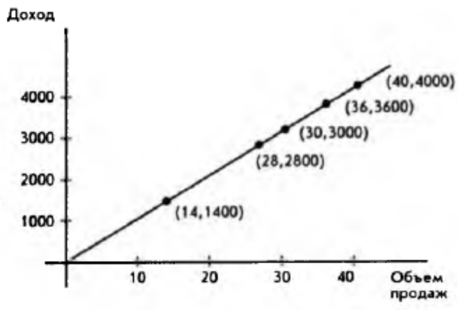


Рис. 1.6

Раздел 2. Нелинейные функции.

(комп. презентация - 6ч.)

Содержание: *2.1. Квадратичная функция*

2.2. Максимальная прибыль

2.3. Показательная и логарифмическая функции

2.4. Математика финансов

2.1. Квадратичная функция

Простейшей нелинейной функцией является *квадратичная функция*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

где a, b и c — произвольные вещественные числа, называемые ***параметрами***. Область определения квадратичной функции — вся числовая ось. Графиком функции является кривая, называемая *параболой*.

Предположим, что нам дана квадратичная функция, определяемая параметрами: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, т.е.

$$f(x) = x^2.$$

Взяв несколько значений из области определения

$$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$

легко найти соответствующее значение функции

$$Y = \{9, 4, 1, 0, 1, 4, 9\}.$$

Если нанести эти точки на координатную плоскость и соединить их плавной кривой, то получим схематичное изображение графика квадратичной функции, приведенное на рис. 2.1.

Такую же процедуру построения графика можно применить к квадратичной функции с любыми параметрами. Все, что для этого требуется, — это миллиметровая бумага и, желательно, калькулятор. Разумеется, удобнее воспользоваться графическим калькулятором или персональным компьютером. При этом следует учесть замечания, сделанные в конце параграфа 1.3, относительно области определения и масштаба.

График квадратичной функции и некоторые характерные точки приведены на рис. 2.2 и 2.3 для случаев $a > 0$ и $a < 0$ соответственно.

Для того чтобы найти точку пересечения графика с осью Y, достаточно положить $x = 0$ в формуле $f(x) = ax^2 + bx + c$. Это дает

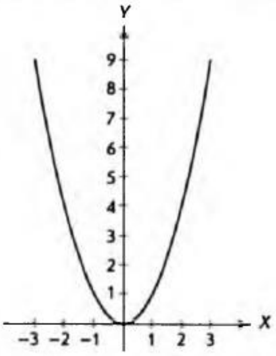


Рис. 2.1

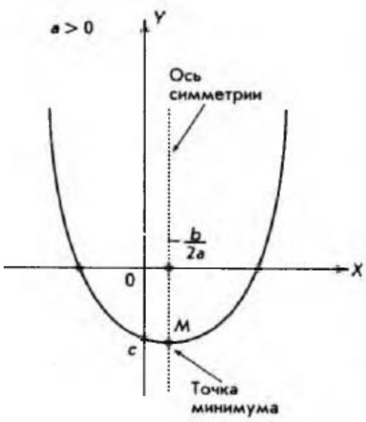


Рис. 2.2

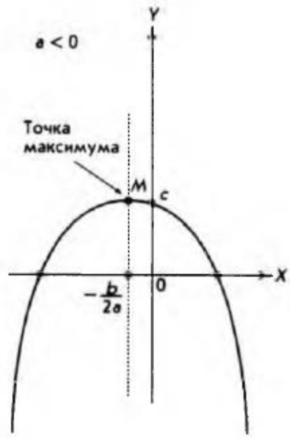


Рис. 2.3

Аналогично предположим, что кривая спроса также может быть представлена квадратичной функцией

$$P = a_D Q^2 + b_D Q + c_D,$$

где P – цена; Q – количество товара; a_D, b_D, c_D – параметры. График кривой спроса приведен на рис. 2.6. Так же, как и на рис. 2.5, сплошной линией нанесена та часть графика квадратичной функции, которая соответствует положительным значениям цены P и количества товара Q.

Кривая спроса является убывающей функцией (чем выше цена, тем меньше товара может быть по этой цене продано). Из этого следует, что ветви параболы направлены вниз, т.е. параметр a_D отрицателен.

Точка равновесия между спросом и предложением теперь может быть найдена графически. Для этого достаточно кривые спроса и предложения, приведенные на рис. 2.5 и 2.6, построить в одной системе координат, как это показано на рис. 2.7. Точка пересечения двух кривых, нанесенных сплошной линией, и есть точка равновесия. Вторая точка пересечения двух кривых, нанесенных штриховыми линиями, как уже указывалось, реального смысла не имеет, так как находится в области отрицательных значений количества товара Q.

Рис. 2.7

Покажем теперь, как эта же задача нахождения точки равновесия между спросом и предложением может быть решена алгебраически. Мы имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} P = a_S Q^2 + b_S Q + c_S; \\ P = a_D Q^2 + b_D Q + c_D. \end{cases}$$

Уравнения нелинейные, и в общем случае такую систему решить не просто. Однако в данном случае левые части уравнений совпадают, что позволяет нам приравнять правые части друг к другу. Сгруппируем члены уравнения:

$$(a_S - a_D)Q^2 + (b_S - b_D)Q + (c_S - c_D) = 0.$$

Введем обозначения: $a = (a_S - a_D)$, $b = (b_S - b_D)$, $c = (c_S - c_D)$.
Тогда уравнение примет вид:

$$aQ^2 + bQ + c = 0.$$

Это квадратное уравнение, которое имеет два решения (корня):

$$Q_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad Q_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Второе решение отрицательно и отбрасывается (см. рис. 2.7).

Подставляя количество товара Q_1 в функцию спроса или предложения, мы получим равновесную цену P_1. Разумеется, графический и численный методы должны дать один и тот же результат. Этим завершается поиск точки равновесия между спросом и предложением в квадратичном приближении.

2.2. Максимальная прибыль

Прибыль – одно из важнейших понятий в экономике и бизнесе, позволяющее оценить эффективность деятельности любого предприятия или фирмы. Деятельность может быть разной: производственной, финансовой, торговой, посреднической и т.д. В наиболее общем виде **прибыль** можно определить как разницу между *полным доходом (выручкой)* предприятия (фирмы) от реализации продукции или услуг и *полными издержками (затратами)*. Если обозначить прибыль через π *(profit)*, полный доход – *R (revenue)*, а полные затраты – *C (cost)*, можно записать

$$\pi = R - C.$$

Полный доход, получаемый от продажи количества товара Q по цене P за единицу товара, задается простой формулой

$$R = PQ.$$

Следует заметить, что в последней формуле цена сама является функцией от количества товара Q. Конкретный вид этой функциональной зависимости дается кривой спроса. Действительно, цена определяется не тем, сколько хочет получить производитель, а тем, сколько готов заплатить потребитель. Возьмем для кривой спроса линейное приближение, т.е.

$$P = aQ + b,$$

где $a < 0$, $b > 0$, так как кривая спроса – убывающая функция. Подставляя последнее выражение в формулу для полного дохода, получим

$$R = (aQ + b)Q = aQ^2 + bQ.$$

Это квадратичная функция с параметром c, равным 0, отрицательным параметром a и положительным параметром b. Этих условий достаточно, чтобы, используя свойства квадратичной функции (см. параграф 2.1), начертить график, который и приведен на рис. 2.8. Естественно, приводится только та часть графика, которая имеет экономический смысл, т.е. соответствует значениям $Q > 0$, $R > 0$.

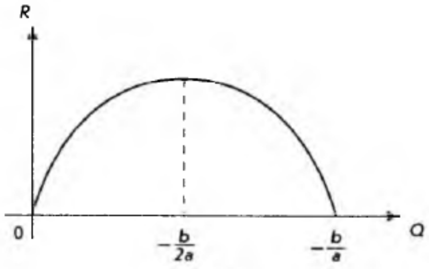


Рис. 2.8

Из рис. 2.8 видно, что полный доход обращается в нуль в начале координат. Это неудивительно, если нет объема продаж, нет и дохода. Далее, полный доход возрастает с ростом объема продаж (тоже естественно) и достигает максимума при

$$Q = -\frac{b}{2a}.$$

Правее этой точки функция становится убывающей, т.е. величина дохода падает с ростом объема продаж. Этот результат вроде бы противоречит "здравому смыслу", хотя наблюдается на практике. Как мы увидим ниже, этот факт связан с эластичностью спроса по цене. Наконец, в точке

$$Q = -\frac{b}{a}$$

Теперь перейдем к решению задачи определения максимальной прибыли, т.е. нахождения такого объема производства товара Q_m, при котором прибыль будет наибольшей. Для этого достаточно графики, изображенные на рис. 2.8 и 2.9, поместить в одной и той же системе координат, что сделано на рис. 2.10.

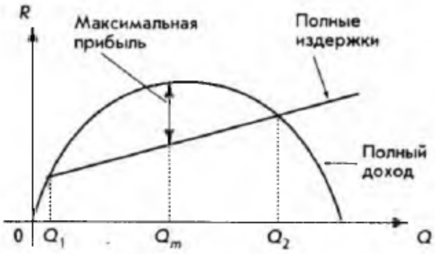


Рис. 2.10

Необходимо отметить, что на рис. 2.8 Q – количество проданного товара, а на рис. 2.9 Q – количество произведенного товара. Поэтому, совмещая их на рис. 2.10, мы неявно предполагаем, что продан весь произведенный товар. Из этого же рисунка видно, что производство прибыльно, т.е. доход больше издержек, когда количество произведенного товара удовлетворяет условию

$$Q_1 < Q < Q_2.$$

Наличие точки Q_1 почти очевидно. Если производится мало товара, производство становится убыточным. Точка же Q_2 нетривиальна. На первый взгляд кажется, что "чем больше, тем лучше". Однако рост производства выше некоторого уровня может вести к "опережающему" росту затрат.

Покажем теперь, как можно найти точки Q_1, Q_2 и точку Q_m, в которой достигается наибольшая прибыль, алгебраически. Для этого достаточно взять формулу для прибыли

$$\pi = R - C$$

и выразить полный доход R и полные издержки C через количество товара Q. Имеем

$$\pi = aQ^2 + bQ - C_V Q - C_f = aQ^2 + (b - C_V)Q - C_f,$$

т.е. квадратичную функцию. Приравнивая ее к нулю и решая квадратное уравнение, находим два решения Q_1 и Q_2. Это и есть те точки, между которыми производство прибыльно. Обозначим

$$b_1 = b - C_V;$$

тогда

$$\pi = aQ^2 + b_1 Q - C_f.$$

Поскольку параметр квадратичной функции $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз, как это показано на рис. 2.11, и функция имеет максимум, который достигается в точке (см. параграф 2.1)

$$Q_m = -\frac{b_1}{2a} = \frac{C_V - b}{2a}.$$

Рис. 2.11

В заключение отметим, что точки Q_1 и Q_2, определяющие границы прибыльности производства, а также точка Q_m, в которой достигается максимальная прибыль, выражаются через параметры a, b кривой спроса и параметры C_f, C_V полных издержек. Чем точнее определяются эти параметры, тем точнее полученное решение.

2.3. Показательная и логарифмическая функции

Рассмотрим еще две нелинейные функции, имеющие многочисленные приложения в экономике, финансах и бизнесе, – *показательную* и *логарифмическую*. Предварительно, однако, напомним основные свойства операции возведения в степень.

Если a – произвольное вещественное число, а n – целое и положительное число, то по определению

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a,$$

при этом число сомножителей равно числу n. Также по определению

Раздел 3 Пределы функций и дифференциальное исчисление (к.презент.-7ч.)

Содержание: 3.*1. Пределы функций и непрерывность 3.2. Производные и их вычисление 3.3. Правила дифференцирования 3.4. Производные высших порядков 3.5. Максимум и минимум 3.6. Предельный анализ в экономике 3.7. Эластичность экономических функций 3.8. Оптимизация*

3.1. Пределы функций и непрерывность

Рассмотрим простую линейную функцию

$$y = f(x) = 2x$$

и зададимся вопросом, к какому числу b приближаются значения этой функции, когда значения переменной x приближаются к числу 3. Для ответа возьмем несколько значений x, вычислим соответствующие им значения $f(x)$ и занесем результаты в таблицу:

x	2,0	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999
$y = f(x) = 2x$	4,0	5,0	5,8	5,98	5,998	5,9998

Из таблицы видно, что значения функции приближаются к числу 6. Здесь значения x приближаются к числу 3 "слева" (по числовой оси), т.е. со стороны чисел, меньших числа 3. Можно взять значения x "справа" (на числовой оси), т.е. больше числа 3, как показано в следующей таблице:

x	4,0	3,5	3,1	3,01	3,001	3,0001
$y = f(x) = 2x$	8,0	7,0	6,2	6,02	6,002	6,0002

Числа получились другие, но ясно видно, что значения функции попрежнему приближаются к числу 6. Символически это записывается так:

$$\lim_{x\to 3}(2x) = 6$$

и читается: предел функции $2x$, когда x стремится к 3, равен 6. Смысл слов "x стремится к 3" таков: значения переменной x сколь угодно близко приближаются к числу 3. Дадим теперь общее определение.

Функция $f(x)$ имеет **предел** b, когда x стремится к a, если значения $f(x)$ сколь угодно близко приближаются к числу b, когда значения переменной x сколь угодно близко приближаются к числу a.

Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Следует отметить, что в этом определении рассматриваются значения x, *сколь угодно близкие* к числу a, *но не совпадающие* с a. Если же функция $f(x)$ определена в точке a и выполняется равенство

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

то $f(x)$ называется *непрерывной функцией в точке a*. Функция, непрерывная в каждой точке своей области определения, называется *непрерывной функцией*.

Все функции, рассмотренные нами до сих пор, — линейная, квадратичная, показательная и логарифмическая, являются непрерывными функциями. Еще раз отметим, что в случае непрерывных функций очень просто находятся пределы в любой точке области определения: для этого достаточно вычислить значение функции в этой точке. Для иллюстрации на рис. 3.1 приведен график функции, имеющей в точке a разрыв, т.е. непрерывной всюду, кроме точки a. Здесь функция $f(x)$ нанесена сплошной линией, а пунктиром указана точка разрыва.

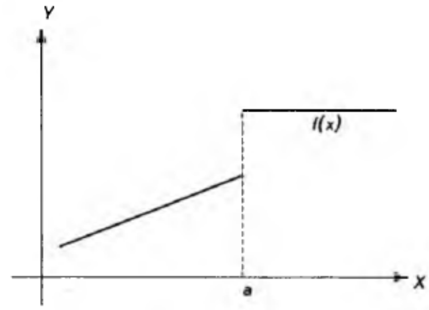


Рис. 3.1

Приведенное выше понятие предела функции полезно обобщить на тот случай, когда значения x могут становиться сколь угодно большими. А имен-

3.2. Производные и их вычисление

В главе 1 при рассмотрении линейной функции было введено понятие углового коэффициента прямой. А именно, если

$$f(x) = y = kx + b,$$

то k — угловой коэффициент, показывающий на сколько возрастает значение функции при увеличении независимой переменной x на 1. В качестве примера на рис. 3.4 изображены две линейные функции $y = 0,5x + 2$ и $y = -2x$.

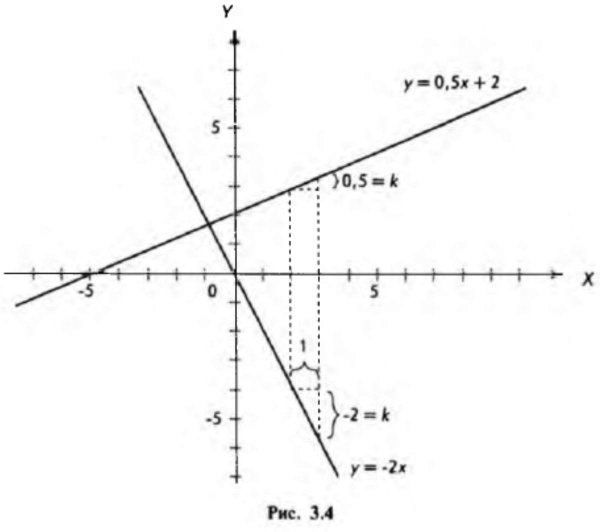


Рис. 3.4

На этом же рисунке показано, как определяются эти угловые коэффициенты. В математике (и не только в математике) принято приращение (изменение) различных величин обозначать греческой буквой Δ (дельта).

Например, если переменная x изменяется от значения $x_1 = 1$ до $x_2 = 2$, то

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1.$$

Аналогично можно обозначать приращение функции:

$$\Delta y = \Delta f(x) = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

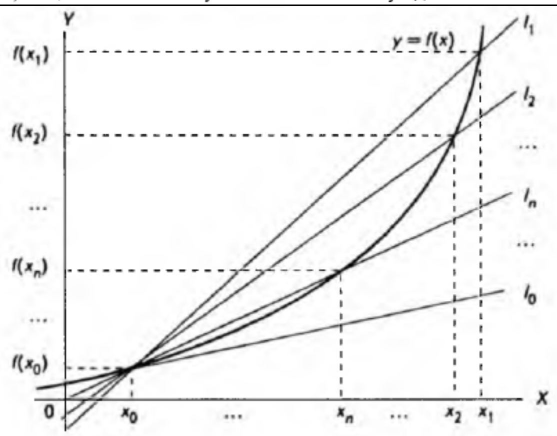


Рис. 3.6

Интуитивно ясно, если Δx будут сколь угодно малыми, наши прямые будут сколь угодно близки к касательной.

Производной функции $f(x)$ в некоторой точке a [обозначается $f'(a)$] называется предел отношения

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Обозначается это следующим образом:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

По этому определению произвольной точке a из области определения функции ставится в соответствие некоторое число $f'(a)$ (если указанный выше предел существует). Но ведь это и есть, по существу, определение функции, которое было дано в параграфе 1.2. Таким образом, если обозначить произвольную точку a через x, мы получим некоторую новую функцию $f'(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет в некоторой точке производную, т.е. приведенный выше предел существует, то говорят, что функция *дифференцируема в этой точке*. Если функция дифференцируема в к а ж д о й точке своей обутомительно. Кроме того, существуют правила дифференцирования, позволяющие в значительной степени избежать этих однообразных процедур. Эти правила дают возможность вычислять производные суммы, разности, произведения и другие комбинации функций, производные которых уже известны.

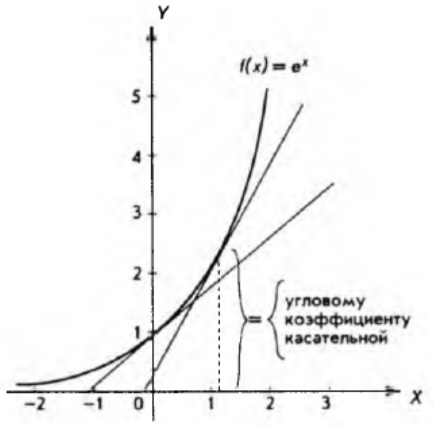


Рис. 3.11

Правила дифференцирования функций и некоторые другие вопросы будут рассмотрены в следующем параграфе, а в заключение этого приведем таблицу функций, производные которых нам уже известны:

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x

В дальнейшем эта таблица будет существенно дополнена.

3.3. Правила дифференцирования

I. Если функция умножается на постоянное число, то производная функции умножается на это же число. Другими словами, если

$$g(x) = cf(x),$$

то **производная функции, умноженной на постоянное число,**

$$g'(x) = cf'(x),$$

или совсем кратко

$$[cf(x)]' = cf'(x).$$

В качестве примера рассмотрим частный случай линейной функции

$$g(x) = cx$$

и представим ее как произведение постоянной c на функцию

$$f(x) = x.$$

Это частный случай степенной функции, когда n равно единице, поэтому

$$f'(x) = 1\cdot x^{1-1} = 1.$$

Окончательно имеем

$$g'(x) = cf'(x) = c\cdot 1 = c,$$

т.е. результат, который был получен для линейной функции другим способом.

Приведенное выше правило непосредственно следует из свойств пределов. Действительно,

$$g'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x} =$$

$$= c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = cf'(x).$$

II. Производная суммы функций равна сумме производных этих функций.

Для двух функций это можно записать:
если

$$h(x) = f(x) + g(x),$$

то

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Для примера возьмем квадратичную функцию

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Учитывая, что

$$a^y = x,$$

окончательно получаем

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln a}.$$

На этом мы закончим вычисление производных *элементарных* функций (все функции, рассмотренные до сих пор, принято относить к элементарным). Большинство функций, представляемых формулами, является комбинациями элементарных функций (сумма, разность, произведение и т.д.). Пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных функций (ее полезно запомнить, как запоминают таблицу умножения), легко вычислить производную любой функции. Таблица производных функций приводится ниже.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a	e^x	e^x
x^n	nx^{n-1}	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
a^x	$a^x\ln a$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

В заключение перечислим символы, которые используются для обозначения производной функции.

Если задана дифференцируемая функция

$$y = f(x),$$

то производную этой функции можно обозначить

$$f'(x);\quad \frac{dy}{dx};\quad y'_x;\quad \frac{d}{dx}f(x).$$

С последним обозначением мы еще не встречались, однако оно будет употребляться в дальнейшем.

3.4. Производные высших порядков

Как уже отмечалось в параграфе 3.2, производная функции $y=f(x)$ сама является функцией от x, и это отражено в обозначении $f'(x)$. Поэтому естественно задаться вопросом: а нельзя ли вычислить производную этой новой функции или производную от производной. Очень часто это действительно возможно.

Производная функции $f'(x)$ называется **второй производной**, или **производной второго порядка**, данной функции $f(x)$ и обозначается символом $f''(x)$.

Таким образом, по определению:

$$f''(x) = [f'(x)]' = \frac{d}{dx}[f'(x)].$$

Аналогично, если функция $f''(x)$ имеет производную (дифференцируема), то производная функции $f''(x)$ называется **третьей производной**, или **производной третьего порядка**, данной функции $f(x)$ и обозначается символом $f'''(x)$, т.е. по определению

$$f'''(x) = [f''(x)]' = \frac{d}{dx}[f''(x)].$$

Аналогично определяется четвертая производная данной функции и т.д. Производные функции второго, третьего и более высоких порядков называются *производными высших порядков.*

Для примера возьмем квадратичную функцию

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

тогда первая производная

$$f'(x) = 2ax + b,$$

вторая производная

$$f''(x) = 2a,$$

и третья производная

$$f'''(x) = 0.$$

Очевидно, что все производные более высокого порядка чем 3 также равны нулю.

В качестве второго примера рассмотрим экспоненциальную функцию

$$f(x) = e^x.$$

Для первой производной имеем

$$f'(x) = e^x.$$

Легко сообразить, что в этом случае все производные более высокого порядка имеют такой же вид, т.е.

$$e^x = f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots .$$

Как и для производной функции, для производных высших порядков используют различные обозначения. Приведем их для общего случая производной n-го порядка

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad y_x^{(n)}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

Отметим, что обозначение n, заключенное в круглые скобки, употребляется только при n, большем трех; при n, меньшем или равном трем, используется "штриховое" обозначение, т.е.

$$f^{(4)}(x), \ f^{(5)}(x),$$

но

$$f''(x), \ f'''(x).$$

В этой книге не часто будут встречаться производные выше второго порядка, поэтому мы не будем разбирать правила, относящиеся к вычислению производных высших порядков. Проще каждый раз последовательно вычислить производную нужного порядка, используя уже сформулированные правила (производная суммы, разности, сложной функции и т.д.).

3.5. Максимум и минимум

Начнем с необходимых понятий и определений, а также уточним те, которые уже встречались.

В качестве синонимов терминов "наибольшее значение" и "наименьшее значение" употребляются термины "максимум" и "минимум", а именно:

число M называется **максимумом**, или наибольшим значением, функции $f(x)$ на множестве X, если

$$f(x) \leqslant M \text{ для любого } x \in X;$$

число m называется **минимумом**, или наименьшим значением, функции $f(x)$ на множестве X, если

$$f(x) \geqslant m \text{ для любого } x \in X.$$

Значения независимой переменной x, при которых

$$f(x) = M \ \text{ или } \ f(x) = m,$$

называются соответственно *точками максимума* или *минимума*. Понятия минимума и максимума объединяются общим термином "*экстремум*".

В определении, данном выше, функция рассматривалась на множестве X, которое может совпадать с областью определения функции, но может быть только частью области определения. Последнее, например, имеет место, когда линейная и квадратичная функции рассматриваются применительно к экономическим задачам: обе эти функции определены на всей числовой оси, однако экономический смысл иногда могут иметь только положительные значения независимой переменной или функции.

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на множестве X, если бóльшим значениям независимой переменной соответствуют бóльшие значения функции, т.е.

$$f(x_2) > f(x_1), \quad \text{если} \quad x_2 > x_1.$$

Функция $f(x)$ называется **убывающей** на множестве X, если бóльшим значениям независимой переменной соответствуют меньшие значения функции, т.е.

$$f(x_2) < f(x_1), \quad \text{если} \quad x_2 > x_1.$$

Графики функций

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = -x^2 - 1,$$

изображенные на рис. 3.14, иллюстрируют приведенные определения.

Рис. 3.14

Из рис. 3.14 ясно, что одна и та же функция может быть убывающей в одной части своей области определения и возрастающей в другой. Точка, отделяющая область убывания функции от области возрастания (или наоборот), является *экстремумом*.

Следует заметить, что локальный максимум может достигаться не только в тех точках, где производная обращается в нуль, но и в граничных точках области определения (см. рис. 3.18). Поэтому при поисках глобального максимума следует также учитывать значения функции в граничных точках области определения.

Все сказанное о локальных и глобальных максимумах в равной степени относится к локальным и глобальным минимумам.

В заключение приведем еще одно правило поиска локальных экстремумов функции, позволяющее избежать вычисления значений производной слева и справа от стационарной точки. Заметим, что при выборе точек слева и справа от стационарной точки существует опасность попасть в окрестность другого локального экстремума и получить неверный результат. Формулируемое ниже правило лишено этого недостатка и, кроме того, сокращает вычисления.

Правило. Следует найти стационарные точки и вычислить в каждой из них значение второй производной. *Максимум* имеет место в точках, в которых *вторая производная отрицательна*, *минимум* – в точках, в которых *вторая производная положительна*.

В качестве примера рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Для нахождения стационарных точек вычисляем первую производную и приравниваем ее к нулю:

$$f'(x) = 2ax + b = 0.$$

Решая полученное уравнение, находим координаты стационарной точки:

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Далее вычисляем вторую производную:

$$f''(x) = 2a.$$

Таким образом, если параметр a положителен (ветви параболы направлены вверх), имеет место минимум. Если же параметр a отрицателен, функция имеет максимум, и ветви параболы направлены вниз. Поскольку стационарная точка единственная, локальный экстремум одновременно является глобальным (на всей оси). Положив для определенности значения параметров

$$a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0,$$

легко получить график функции, приведенный на рис. 3.19.

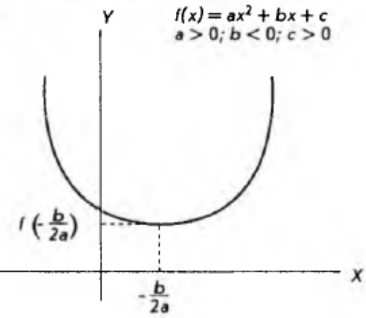


Рис. 3.19

3.6. Предельный анализ в экономике

При изучении предыдущих параграфов у читателя мог возникнуть естественный вопрос: какое все это имеет отношение к экономике и бизнесу? Мы постараемся показать, что имеет, и самое непосредственное.

Начиная с этого параграфа и до конца главы будут рассматриваться приложения дифференциального исчисления к экономике и бизнесу. Такое применение дифференциального исчисления называется *предельным анализом*.

В экономике широко используются средние величины: средняя стоимость продукции, средняя производительность труда и т.д. В равной степени средние величины важны и при коммерческой деятельности: средний доход, средний объем продаж и т.д. Но при планировании развития производства, да и любой предпринимательской деятельности, возникает, например, такая задача: требуется узнать, на какую величину вырастет результат, если будут увеличены затраты, и, наоборот, насколько уменьшится результат, если затраты сократятся. Оперируя средними величинами, не получишь ответа на такой вопрос. Здесь речь идет о приростах переменных величин. В подобных задачах нужно найти предел отношения приращений рассматриваемых величин или, как говорят, *предельный эффект*. Следовательно, здесь применимо понятие дифференциального исчисления – производной функции.

Начнем с понятия предельного дохода. Как уже отмечалось в параграфе 2.2, общий или суммарный доход R естественно определить как произведение цены единицы товара P на количество товара Q:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0,$$

откуда следует условие достижения этого максимума

$$\frac{d}{dQ}R'_Q < \frac{d}{dQ}C'_Q.$$

В геометрической интерпретации *производная функции – это угловой коэффициент касательной к графику функции.* Критерий достижения максимума в стационарной точке может быть сформулирован так: *угловой коэффициент касательной к графику предельного дохода должен быть меньше углового коэффициента касательной к графику предельных издержек.* В экономической литературе это же правило принято формулировать в более наглядном виде: *график предельных издержек в точке максимума пересекает график предельного дохода снизу вверх, если двигаться слева направо.*

Посмотрев теперь на рис. 3.27, можно сразу сказать, что максимальная прибыль будет, когда количество товара равно Q_2. Соответственно, минимальная прибыль имеет место в точке Q_1 (для предпринимателя представляет академический интерес).

Применим полученные результаты к одной частной, но очень распространенной задаче, когда фирма стремится осваивать несколько различных рынков. Например, один рынок внутренний, а другой связан с экспортными поставками. Возьмем для определенности кривые спроса

$$P_1 = 500 - Q_1,$$

$$P_2 = 360 - 1{,}5Q_2,$$

где нижние индексы относятся к первому и второму рынкам соответственно.

Суммарная функция издержек пусть имеет вид

$$C = 50\,000 + 20Q.$$

Здесь, очевидно, первое слагаемое представляет постоянные затраты, второе – переменные, а

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Спрашивается, какую ценовую политику должна проводить фирма, чтобы прибыль была максимальна.

Для решения находим предельные издержки, одинаковые для обоих рынков:

$$C'_Q = \frac{dC}{dQ} = \frac{d}{dQ}(50\,000 + 20Q) = 20.$$

Раздел 4 Функции нескольких переменных

(комп. презентация - 7ч.)

Содержание: *4.1. Частные производные 4.2. Применение частных производных в экономике 4.3. Безусловная оптимизация 4.4. Условная оптимизация*

4.1. Частные производные

В большинстве случаев соотношения, с которыми приходится сталкиваться в экономике и бизнесе, связывают не две, как это предполагалось до сих пор, а сразу несколько величин. Другими словами, представляющая интерес величина может зависеть не от одной, а от нескольких переменных. Например, ранее мы считали, что спрос на какой-либо товар определяется только одним фактором – ценой. В действительности это верно только частично. На спрос могут также влиять: доходы потребителя Y, цена взаимозаменяемых P_C и взаимодополняющих P_S товаров, расходы на рекламу A, вкусы потребителя T.

Взаимозаменяемыми товарами и услугами называются те, которые служат одним и тем же целям, когда покупателю безразлично, какие из товаров и услуг выбрать. Примерами могут служить автобусы и троллейбусы, куры и индейки и т.д. Взаимозаменяемость почти никогда не бывает абсолютной. Здесь важна связь между ценой на один товар и спросом на другой, взаимозаменяемый: если снизится цена на один товар, спрос на другой уменьшится, и наоборот.

Взаимодополняющими товарами называются те, которые в совокупности удовлетворяют одну и ту же потребность. Например, видеомагнитофоны и кассеты, автомобили и покрышки и т.д. Снижение цен на первые названные в паре товары приводит к расширению их продажи, что повышает спрос на дополняющие их товары.

Зависимость спроса от всех перечисленных выше факторов можно изобразить графически, как показано на рис. 4.1.

Рис. 4.1

Здесь использована уже знакомая нам модель "черного ящика" (см. рис. 1.2) с той только разницей, что имеется не один вход, а несколько. Это естественным образом подводит нас к понятию функции нескольких переменных.

Если каждой упорядоченной паре (x, y) чисел из некоторого множества M по определенному правилу ставится в соответствие единственное число z, принадлежащее множеству N, то говорят, что задана **функция двух переменных**

$$z = f(x, y).$$

При этом множество M называется *областью определения*, а N – *множеством значений функции.*

Возвращаясь снова к модели "черного ящика", функцию двух переменных можно представить в виде схемы, как на рис. 4.2.

Рис. 4.2

Здесь "черный ящик" f представляет собой некоторую совокупность операций (обычно арифметических), которые необходимо проделать над переменными x и y, чтобы получить значения функции z. Например,

$$z = f(x, y) = xy + 2x$$

– это функция двух переменных. Вычисляя ее значение при

$$x = 2, \quad y = 3, \quad (x, y) = (2, 3),$$

получим

$$z = f(2, 3) = 2\cdot3 + 2\cdot2 = 10.$$

Если же эту функцию вычислить при

$$x = 3, \quad y = 2, \quad (x, y) = (3, 2),$$

то

$$z = f(3, 2) = 3\cdot2 + 2\cdot3 = 12.$$

Этот пример наглядно показывает важность слов "упорядоченная пара чисел (x, y)". Следует заметить, что для обозначения независимых переменных и функций можно использовать самые разные символы. Рассмотренную выше функцию, например, можно представить, изменив обозначения переменных, как

$$y = f(x_1, x_2) = x_1x_2 + 2x_1.$$

Последнее обозначение особенно удобно. Когда имеется функция n переменных, она обычно обозначается

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Отличие функции n переменных от функции двух переменных состоит в том, что вместо упорядоченной пары чисел берется упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которому по определенному правилу ставится в соответствие единственное число – значение функции.

Как известно, функцию одной переменной можно наглядно изобразить в виде графика. В общем случае график функции – это некоторая линия на плоскости (рис. 4.3). Также существует способ наглядного геометрического представления функции двух переменных . Для этого достаточно две координатные оси X и Y дополнить третьей осью Z, перпендикулярной первым двум (рис. 4.4). После этого независимые переменные можно изображать точками на плоскости $X0Y$ с координатами, равными значениям независимых переменных. Далее из этих точек проводится перпендикулярная к плоскости $X0Y$ линия и на ней откладывается расстояние, равное соответствующему значению функции, как показано на рис. 4.4. Совокупность таких точек, построенных для всевозможных значений независимых переменных, представляет собой график функции двух переменных. Обычно это некоторая *поверхность* в пространстве (на рис. 4.4 не показано). К сожалению, для функций более чем двух переменных график наглядно изобразить невозможно.

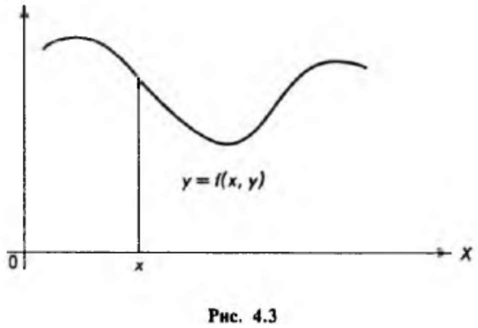


Рис. 4.3

$$dx = \Delta x; \quad dy = \Delta y.$$

Как и в случае функции одной переменной, дифференциал функции двух переменных приближенно определяет величину изменения функции при малых изменениях независимых переменных:

$$\Delta z = \Delta f(x, y) \approx f_x' dx + f_y' dy.$$

Эта формула тем точнее, чем меньше изменения независимых переменных, т.е. dx и dy.

Используя дифференциал функции двух переменных, можно получить важный результат – формулу для дифференцирования неявной функции. До сих пор предполагалось, что функциональное соотношение между двумя переменными всегда имеет вид $y = f(x)$. Однако между x и y возможно, например, такое соотношение

$$y^3 + 2xy^2 - x + 1 = 0,$$

или в общем виде

$$f(x, y) = 0,$$

где $f(x, y)$ – функция двух переменных. В этом случае говорят, что задана *неявная функция*.

Для вычисления производной неявно заданной функции возьмем дифференциал этой функции и приравняем его к нулю:

$$df(x, y) = f_x' dx + f_y' dy = 0.$$

Действительно, если функция при всех значениях независимых переменных равна нулю, ее изменение, а значит, и дифференциал также равны нулю. Поэтому

$$f_y' dy = -f_x' dx,$$

или, разделив обе части на dx и f_y' $(f_y' \neq 0)$, получаем **формулу дифференцирования неявной функции**:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'}{f_y'}}.$$

Пример. Найдем производную неявной функции

$$f(x, y) = y^3 + 2xy^2 - x + 1 = 0.$$

Вычисляя частные производные

$$f_x' = 2y^2 - 1,$$

$$f_y' = 3y^2 + 4xy$$

и подставляя в полученную формулу, находим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{2y^2 - 1}{3y^2 + 4xy} = \frac{1 - 2y^2}{3y^2 + 4xy}.$$

Следует заметить, что приведенная процедура дифференцирования неявной функции применима в тех случаях, когда получить явную зависимость y от x бывает затруднительно или вообще невозможно.

В заключение еще раз отметим, что техника вычисления частных производных практически такая же, как и для обычных производных. Единственное отличие для функций нескольких переменных состоит в том, что все переменные, кроме той, по которой проводится дифференцирование, мысленно считаются постоянными величинами. И в этом случае применимы все правила дифференцирования, относящиеся к функциям одной переменной.

4.2. Применение частных производных в экономике

В начале предыдущего параграфа уже отмечалось, что в реальных случаях спрос на товар может зависеть от многих факторов, т.е. спрос – это функция нескольких переменных. Предположим для определенности, что спрос на некоторый товар Q зависит от цены P, доходов потребителей Y и цены альтернативного товара P_A. В общем случае спрос на отдельный товар при прочих равных условиях зависит от уровня цен всех товаров. Практически, однако, наибольший интерес представляет изучение влияния цены какого-то одного товара, который и называется *альтернативным*. Таким образом, спрос – это функция трех переменных

$$Q = f(P, P_A, Y).$$

Спрашивается: как меняется спрос при изменении цен и доходов. Количественно ответ дается с помощью понятия эластичности. Для случая функции одной переменной эластичность уже рассматривалась в параграфе 3.7. Сейчас будут сделаны необходимые обобщения.

Коэффициенты эластичности

Эластичность спроса от цены (собственной) определяется как

$$E_P = -\frac{\text{Процентное изменение спроса}}{\text{Процентное изменение цены}}$$

при неизменных значениях цены альтернативного товара P_A и доходов Y.

Дословно повторяя рассуждения, приведенные в параграфе 3.7, приходим к *формуле для точечной эластичности спроса от цены*:

$$E_P = -\frac{P}{Q}\frac{\partial Q}{\partial P}.$$

Единственное отличие этой формулы от приведенной в параграфе 3.7 – наличие частной производной, что связано с существованием нескольких переменных, которые в данном случае считаются постоянными. Напомним, знак "минус" используется для того, чтобы эластичность E_P была положительной.

Аналогично вводится **перекрестный коэффициент эластичности**, определяемый как

$$E_A = \frac{\text{Процентное изменение спроса}}{\text{Процентное изменение цены альтернативного товара}}.$$

Здесь, однако, постоянными считаются собственная цена товара P и доход Y. При переходе к пределу, когда все изменения становятся сколь угодно малыми, получаем *формулу для перекрестного коэффициента эластичности*

$$E_A = \frac{P_A}{Q}\frac{\partial Q}{\partial P_A}.$$

Знак этого коэффициента может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что зависит от характера альтернативного товара.

Если альтернативный товар относится к взаимозаменяемым, то рост цены P_A приводит к увеличению спроса Q, так как потребители предпочитают (при прочих равных условиях) менее дорогой товар. Поэтому для взаимозаменяемых товаров

$$\frac{\partial Q}{\partial P_A} > 0,$$

откуда следует, что

$$E_A > 0.$$

Если же альтернативный товар относится к взаимодополняющим, рост P_A приводит к уменьшению спроса Q, так как общие затраты на приобретение двух видов товаров увеличиваются (см. также начало параграфа 4.1). Поэтому для взаимодополняющих товаров

$$\frac{\partial Q}{\partial P_A} < 0$$

и, соответственно,

$$E_A < 0.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial P_A} = \frac{\partial}{\partial P_A}\left(100 - 2P + P_A + 0{,}1Y\right) = 1,$$

находим перекрестный коэффициент эластичности

$$E_A = \frac{P_A}{Q}\frac{\partial Q}{\partial P_A} = \frac{12}{192}\cdot 1 = 0{,}062.$$

Он положителен, поэтому товары взаимозаменяемы. Наконец, вычисляя

$$\frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(100 - 2P + P_A + 0{,}1Y\right) = 0{,}1,$$

находим эластичность спроса от доходов:

$$E_Y = \frac{Y}{Q}\frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{1000}{192}\cdot 0{,}1 = 0{,}52.$$

Знак эластичности показывает, что с ростом доходов спрос будет увеличиваться.

Полезность

Когда говорят о цели производителей и предпринимателей, ясно, что это получение максимальной прибыли. Сложнее обстоит дело с мотивацией поведения потребителей. Можно, конечно, предположить, что потребители стремятся максимально увеличивать свои личные доходы. Однако если бы это было единственной целью, то все стремились бы работать семь дней в неделю по двадцать четыре часа в сутки. В действительности это не так, и люди находят разумный компромисс между работой, отдыхом и досугом. Аналогично потребители делают покупки, выбирая из ряда различных товаров и руководствуясь ценой, качеством и другими факторами. Попробуем описать поведение потребителя. Потреблению благ ставится в соответствие число U, называемое *полезностью*. Чем выше оценка, которую дает потребитель этим благам, тем больше число U. Предположим, например, что имеется два вида товаров G_1 и G_2 и потребитель приобретает первый товар в количестве x_1, а второй – в количестве x_2. Полезность тогда представляет некоторую функцию от x_1 и x_2, которая может быть записана как

$$U = U(x_1, x_2).$$

Если, положим,

$$U(3, 7) = 20; \quad U(4, 5) = 25,$$

$$F(x) = x^{n+1} = \int f(x)\,dx = \int (n+1)x^n dx.$$

Полученное равенство удобнее представить в виде

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

где c – уже упоминавшаяся произвольная постоянная интегрирования. Таким образом, мы получили *общую формулу для интегрирования степенной функции*. Если вернуться к примеру в начале параграфа, то легко вычислить

$$\int 3x^2 dx = \frac{3x^{2+1}}{3} + c = x^3 + c.$$

Следует отметить, что формула для интегрирования степенной функции справедлива при любых n, кроме

$$n = -1.$$

Действительно, если попытаться применить формулу при этом значении n, то в знаменателе получим нуль, а делить на нуль нельзя. Вспомним, однако, что для функции

$$F(x) = \ln x$$

производная

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{x}.$$

Поэтому можно сразу написать

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c.$$

Совершенно аналогично, взяв функцию

$$F(x) = e^{mx},$$

где m – вещественная постоянная, и вычисляя производную

$$F'(x) = f(x) = me^{mx},$$

получаем *формулу для интегрирования экспоненты*

$$\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + c.$$

Наконец, для показательной функции

$$F(x) = a^x$$

имеем

$$F'(x) = f(x) = a^x \ln a.$$

Откуда получаем формулу для интегрирования показательной функции

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

Полученные формулы удобно объединить в таблицу и запомнить. Существуют математические справочники, содержащие сотни и даже тысячи неопределенных интегралов от различных функций. Ниже приведены те из них, которые имеют наиболее широкое распространение в экономике.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $(n \neq -1)$	e^{mx}	$\frac{e^{mx}}{m} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$

В параграфе 3.3 были сформулированы правила дифференцирования функций, значительно облегчающие вычисление производных различных комбинаций функций (сумма, произведение и т.д.). Существует два правила интегрирования, также облегчающие вычисление интегралов. Эти правила непосредственно следуют из правил дифференцирования как обратной операции.

В следующем примере нужно найти суммарный доход R, если известен предельный доход

$$R'_Q = f(Q) = 9 - 6Q.$$

Поскольку предельный доход определяется как

$$R'_Q = \frac{dR}{dQ} = \frac{d}{dQ}F(Q),$$

где $F(Q)$ – искомая функция дохода, то

$$F(Q) = \int f(Q)\,dQ = \int (9 - 6Q)\,dQ = 9Q - 3Q^2 + c,$$

где c – постоянная интегрирования.

На первый взгляд кажется, что в условии задачи отсутствуют данные, позволяющие определить константу c. Легко, однако, сообразить, что при нулевом производстве и доход будет нулевым. Это дает

$$F(0) = 9 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 + c = 0,$$

т.е. постоянная интегрирования равна нулю. Окончательно для дохода имеем

$$R = 9Q - 3Q^2.$$

Таким образом, и в этом случае сама задача содержит в неявном виде условие, позволяющее определить постоянную интегрирования.

Последний пример относится к макроэкономике. Требуется определить потребление C, если предельная склонность к потреблению (см. параграф 3.6) задана формулой

$$C'_Y = \frac{dC}{dY} = 0{,}5 + \frac{0{,}1}{\sqrt{Y}},$$

где Y – национальный доход.

Кроме того, известно, что потребление составляет 85, когда национальный доход равен 100. Это условие позволит нам определить постоянную интегрирования.

Аналогично предыдущим примерам можно сразу написать

$$C = \int C'_Y dY = \int \left(0{,}5 + \frac{0{,}1}{\sqrt{Y}}\right) dY = 0{,}5Y + 0{,}1 \int Y^{-1/2} dY =$$

$$= 0{,}5Y + 0{,}1\frac{1}{1/2}Y^{1/2} + c = 0{,}5Y + 0{,}2\sqrt{Y} + c.$$

Подставляя в полученное равенство

$$C = 85 \text{ и } Y = 100,$$

получаем

$$85 = 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}2\sqrt{100} + c = 52 + c,$$

откуда

$$c = 85 - 52 = 33.$$

Окончательно для функции потребления имеем

$$C = 0{,}5Y + 0{,}2\sqrt{Y} + 33.$$

5.2. Определенный интеграл

Во многих прикладных задачах требуется не просто найти первообразную, но и определить общую величину изменения $F(x)$ от некоторого значения a до другого значения b, т.е. разность

$$F(b) - F(a),$$

которая получила название **определенного интеграла**.

Таким образом, определенный интеграл от функции $f(x)$ – это

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

Числа a и b принадлежат области определения функции $f(x)$ и называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*. Функция $f(x)$, как и в случае неопределенного интеграла, называется *подынтегральной функцией*.

Непосредственно из определения следует: для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ следует найти первообразную, т.е. неопределенный интеграл от функции $f(x)$, вычислить полученную первообразную при значениях верхнего и нижнего пределов и вычесть из первого значения второе.

Для примера возьмем определенный интеграл

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - 2e^x + 4x^2\right) dx.$$

Раздел 6 Матричная алгебра

(комп. презентация - 7ч.**)**

Содержание: *6.1 Векторы и матрицы 6.2. Операции над матрицами 6.3. Обращение квадратных матриц 6.4. Системы линейных уравнений 6.5. Матрицы в экономических приложениях.*

6.1. Векторы и матрицы

В этой главе мы познакомимся с новым математическим понятием, имеющим многочисленные приложения к экономике и бизнесу, — понятием *матрицы*. Ближе всего к этому понятию стоят хорошо всем известные обычные таблицы. Начнем поэтому не с определений, а с наглядного примера.

Предположим, некоторая фирма-поставщик производит и реализует два вида товаров: товар 1 и товар 2. Поставки осуществляются еженедельно трем различным фирмам-покупателям, назовем их фирма 1, фирма 2 и фирма 3. Схема поставок следующая: товар 1 поставляется фирмам 1—3 в количестве 3, 7 и 2 соответственно, а товар 2 — в количестве 5, 8 и 4. Для контроля поставок удобно составить следующую таблицу.

Товар	Количество товара, поставляемого фирме		
	1	2	3
1	3	7	2
2	5	8	4

Смысл этой простой таблицы очевиден: если, например, нас интересует количество товара 1, поставляемого фирме 2, достаточно взять пересечение соответствующих строки и столбца, что сразу дает количество поставляемого товара — 7. Если теперь убрать названия строк и столбцов, а оставшуюся часть таблицы обозначить через A и изобразить в виде

$$A=\begin{bmatrix}3&7&2\\5&8&4\end{bmatrix},$$

мы получим пример того, что в математике называется матрицами. Предположим, фирма 3 обанкротилась, что приведет к исчезновению соответствующего столбца. Опуская названия и обозначая оставшуюся часть таблицы через B, получим еще один пример матрицы:

$$B=\begin{bmatrix}3&7\\5&8\end{bmatrix}.$$

Теперь дадим необходимые определения.

Совокупность $m\cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов, называется **матрицей** размера $m\times n$, или **прямоугольной матрицей**. Числа, из которых составлена матрица, называются **элементами матрицы.**

Элементы матрицы обычно обозначают двойными индексами: a_{ij}, где *первый индекс i* означает *номер строки, второй индекс j — номер столбца*, на пересечении которых стоит элемент (нумерация строк производится сверху вниз, а столбцов слева направо). Для матрицы A размера $m\times n$ употребляется следующее обозначение:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Вместо квадратных скобок часто используют круглые скобки.

Например, для матрицы B, рассмотренной выше, имеем в общих обозначениях

$$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}.$$

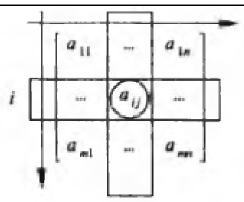
Элементы матрицы B, очевидно, имеют следующие значения:

$$b_{11}=3,\ b_{12}=7,\ b_{21}=5,\ b_{22}=8.$$

Действительно, например, b_{12} стоит на пересечении первой строки и второго столбца матрицы:

что дает число 7. Аналогично находятся остальные элементы B.

В общем случае индексы i и j, определяющие положение элемента a_{ij} в матрице A, можно для наглядности считать к о о р д и н а т а м и, указывающими местоположение a_{ij} в A, как показано ниже:



Здесь показаны только "угловые" элементы матрицы A и сам элемент a_{ij}.

Матрица размера $1\times n$, т. е. состоящая из одной строки и n столбцов, имеет специальное название — *вектор-строка.* В этом случае первый индекс не нужен, и вектор-строка в общем случае может быть представлена как

$$A=[a_1\ \ a_2\ \ \dots\ \ a_n].$$

Аналогично матрица размера $m\times 1$, состоящая из m строк и одного столбца, называется *вектор-столбцом* и имеет вид

$$A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\a_m\end{bmatrix}.$$

В заключение приведем краткое обозначение для матрицы A размера $m\times n$:

$$A=[a_{ij}]\ \text{ или }\ A=(a_{ij}).$$

6.2. Операции над матрицами

Над матрицами можно производить некоторые математические операции, которые напоминают действия, выполняемые над обычными числами (сложение, умножение и т.д.). Рассмотрим эти операции подробнее.

Начнем с определения, которое представляется совершенно естественным.

Две матрицы одинакового размера $m\times n$ называются **равными**, если все элементы, стоящие на одних и тех же местах, равны между собой. Тогда пишут

$$A=B,$$

где A и B — матрицы (не путать с числами!).

Другими словами, если $A=[a_{ij}]$; $B=[b_{ij}]$, то равенство матриц означает $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$.

Вернемся к примеру с фирмой-поставщиком, который разбирался в предыдущем параграфе. Как и там, предположим, что в первую неделю поставки задаются матрицей

$$A=\begin{bmatrix}3&7&2\\5&8&4\end{bmatrix},$$

а во вторую неделю пусть матрица, определяющая поставки, будет

$$B=\begin{bmatrix}2&5&3\\4&6&5\end{bmatrix}.$$

Для руководителей фирмы представляет интерес не только информация о недельных поставках, но и суммарный объем продаж за две недели. Очевидно, если в первую неделю товар 1 поставлялся фирме 2 в количестве 7, а во вторую неделю — соответственно в количестве 5, то за две недели фирма 2 получила 12 единиц товара 1. Аналогичные рассуждения справедливы для остальных фирм-покупателей, а также для товара 2. Если теперь матрицу, выражающую суммарные поставки, обозначить через C, то для нее будем иметь

$$C=\begin{bmatrix}3+2&7+5&2+3\\5+4&8+6&4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&12&5\\9&14&9\end{bmatrix}.$$

Другими словами, каждый элемент матрицы C равен сумме соответствующих (с теми же индексами i и j) элементов матриц A и B. Матрица C называется суммой матриц A и B. В общем случае имеем следующее определение.

Пусть даны две матрицы A и B одинакового размера $m\times n$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\dots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\dots&b_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\b_{m1}&b_{m2}&\dots&b_{mn}\end{bmatrix},$$

Обратным относительно a называется такое число b, для которого выполняется условие

$$ab = 1.$$

Очевидно, что в случае чисел

$$b = \frac{1}{a} = a^{-1}.$$

Такого же подхода (введение обратной матрицы) придерживаются и в матричной алгебре. Начнем с некоторых понятий, необходимых для дальнейшего.

Матрица называется **квадратной**, если число ее строк равно числу столбцов. Таким образом, квадратные матрицы имеют размер $n \times n$.

Квадратная матрица вида

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

называется *единичной* матрицей и обозначается буквой I. Все элементы такой матрицы равны нулю, кроме элементов с одинаковыми первым и вторым индексами, которые равны единице, т.е.

$$a_{ii} = 1.$$

Единичная матрица обладает важным свойством: ***умножение произвольной квадратной матрицы A на единичную дает в результате матрицу A.*** Более того, порядок сомножителей в этом случае не имеет значения, т.е.

$$I \cdot A = A \cdot I = A.$$

Проверим справедливость последнего равенства для произвольной квадратной матрицы A размера 2×2. Вычисляем

$$I \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

Совершенно аналогично находим

$$A \cdot I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A,$$

что и требовалось проверить.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Будем придерживаться а л г о р и т м а, изложенного выше.

1. Вычеркивая строки и столбцы, находим определители D_{ij} (они равны элементам, остающимся после вычеркивания)

$$D_{11} = a_{22}, \quad D_{12} = a_{21}, \quad D_{21} = a_{12}, \quad D_{22} = a_{11}.$$

Используя полученные значения, находим последовательно алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\ D_{11} = (-1)^2\ a_{22} = a_{22},$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\ D_{12} = (-1)^3\ a_{21} = -a_{21},$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\ D_{21} = (-1)^3\ a_{12} = -a_{12},$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\ D_{22} = (-1)^4\ a_{11} = a_{11}.$$

2. Составляем из алгебраических дополнений матрицу и транспонируем ее

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

3. Вычисляем определитель исходной матрицы A

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Окончательно для обратной матрицы A^{-1} имеем:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

В этом примере определение алгебраических дополнений тривиально – они отличались от элементов матрицы разве что знаком. Если же взяться за вычисление обратной матрицы размера 3×3, то придется находить девять (по числу элементов матрицы) алгебраических дополнений, каждое из которых связано с вычислением определителя матрицы размера 2×2. Вообще, вычисление обратной матрицы большого размера – очень трудоемкая процедура и обычно выполняется на компьютерах. Более того, даже хорошие калькуляторы часто содержат встроенные программы для вычисления обратной матрицы. Поэтому проводить такие расчеты вручную так же нелепо, как писать гусиным пером. А вот понимать, как выполняются такие вычисления, очень желательно.

6.4. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Решением системы называется совокупность n значений неизвестных

$$x_1 = \alpha_1,$$
$$x_2 = \alpha_2,$$
$$\dots$$
$$x_n = \alpha_n,$$

при подстановке которых все уравнения системы обращаются в тождества.

Может случиться, что система не имеет решения. В этом случае она называется *несовместной*.

В параграфе 6.2 было показано, что система линейных уравнений может быть представлена в матричной форме как

$$A \cdot X = B,$$

где A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных системы, X – вектор-столбец неизвестных, а B – вектор-столбец свободных членов.

Используя матричное представление и понятие обратной матрицы, можно сразу получить решение системы линейных уравнений. Действительно, умножая обе части последнего равенства на матрицу A^{-1}, обратную для матрицы A, получаем

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Учитывая, что

$$A^{-1} \cdot A = I; \quad I \cdot X = X,$$

окончательно имеем

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

Стремясь привести матрицу к "треугольному" виду, вычитаем первую строку из второй и третьей и оставляем саму первую строку неизменной. В результате получим матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right].$$

Далее, прибавив утроенную третью строку ко второй, имеем

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right].$$

Разделив вторую строку на 14 и поменяв ее местами с третьей, окончательно приводим расширенную матрицу к "треугольному" виду

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Но это расширенная матрица системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_2 - 4x_3 = -4; \\ x_3 = 1, \end{cases}$$

равносильной исходной системе. Подставляя значение x_3 во второе уравнение, находим x_2:

$$x_2 - 4 \cdot 1 = -4, \quad x_2 = 0.$$

Подставляя значения x_2 и x_3 в первое уравнение, находим x_1:

$$x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2, \quad x_1 = -1.$$

Таким образом, решение исходной системы линейных уравнений имеет вид:

Действительно, вспоминая свойства операций над матрицами и определение единичной матрицы I, имеем

$$(I-A)\cdot X = I\cdot X - A\cdot X = X - A\cdot X.$$

Умножим обе части уравнения на матрицу $(I-A)^{-1}$, обратную для матрицы $(I-A)$:

$$(I-A)^{-1}\cdot(I-A)\cdot X = (I-A)^{-1}\cdot Y.$$

Учитывая, что по определению обратной матрицы

$$(I-A)^{-1}\cdot(I-A) = I,$$

окончательно имеем

$$X = (I-A)^{-1}\cdot Y.$$

Вернемся к нашему простому примеру с двумя фирмами-производителями. Предположим, что конечный продукт фирмы 1 должен составить 70, а фирмы 2 – 120. Требуется определить необходимый совокупный продукт каждой фирмы. Матрица коэффициентов прямых затрат A предполагается известной

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Для решения находим матрицу

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,8 & 0,8 \end{bmatrix}$$

и вычисляем для нее обратную матрицу

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0,4}\begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,8 & 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2,25 \end{bmatrix}.$$

Мы воспользовались формулой для вычисления обратной матрицы размера 2×2 (см. параграф 6.3). Теперь, подставляя в формулу заданный вектор-столбец конечного продукта Y, находим

$$X = (I-A)^{-1}\cdot Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2,25 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 70 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 410 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, чтобы удовлетворить конечный спрос, совокупный продукт фирмы 1 должен составить 260, а фирмы 2 – 410.

Отметим, что самая трудоемкая часть задачи – это вычисление обратной матрицы $(I-A)^{-1}$, если учесть, что ее размер в реальных задачах может достигать нескольких сотен. Однако когда эта матрица найдена, расчет различных вариантов представляет собой сравнительно простую процедуру. Например, предположим, что в последнем примере конечный продукт фирмы 1 равен 60, а фирмы 2 – 80, т.е.

$$Y = \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix},$$

то, используя ранее вычисленную матрицу $(I-A)^{-1}$, легко находим

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2,25 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для удовлетворения последнего варианта конечного спроса совокупный продукт фирмы 1 должен быть 200, а фирмы 2 – 300.

В заключение отметим, что в реальных задачах приходится иметь дело не с двумя фирмами, а с сотнями отраслей производства. Решение таких задач немыслимо без использования компьютеров и соответствующего программного обеспечения.

4.3. Лабораторные работы

Учебным планом не предусмотрено

4.4. Практические занятия

№ п/п	*Номер раздела дисциплины*	*Наименование тем практических занятий*	*Объем (час.)*	*Вид занятия в интерактивной, активной, инновационной формах, (час.)*
1	**1.**	Предварительные сведения	2	-
2	**2.**	Нелинейные функции	3	работа в малых группах (3 час.)
3	**3.**	Пределы функций и дифференциальное исчисление	3	работа в малых группах (3 час.)
4	**4.**	Функции нескольких переменных	4	-
5	**5.**	Интегральное исчисление	4	работа в малых группах (4 час.)
6	**6.**	Матричная алгебра	4	-
		ИТОГО	**20**	**10**

4.5. Контрольные мероприятия: контрольная работа

1 курс

Тема. Исследование функции с помощью дифференциального исчисления и построение графика функции.

Цель работы. Приобрести навыки применения дифференциального исчисления к исследованию функций, сформировать умения по полученному исследованию строить график функции.

Содержание. 4 задания: №1 – вычисление пределов; №2 – задача на нахождение первой и второй производной функции в заданной точке, №3 – задача на нахождение первой производной, №4- проведение полного исследования функции и построение ее графика.

Структура, объём. Контрольная работа выполняется в тетради для контрольных работ, объём 7-8 страниц.

Выдача задания, прием контрольной работы проводится в соответствии с календарным учебным графиком.

2 курс

Тема. Матричная алгебра: матрицы, действия над ними. Системы линейных алгебраических уравнений.

Цель работы. Сформировать умения действий над матрицами, вычисления определителей 2-го, 3-го порядка, приобрести навыки применения матричного исчисления для решения систем линейных уравнений.

Содержание. 3 задания: №1 - действия над матрицами, №2,3 - решить системы линейных алгебраических уравнений.

Структура, объём. Контрольная работа выполняется в тетради для контрольных работ, объём 6-7 страниц.

Выдача задания, прием контрольной работы проводится в соответствии с календарным учебным графиком.

Оценка	Критерии оценки контрольной работы
зачтено	соответствие требованиям по структурному содержанию и объему работы; правильность выполнения задания, сопровождающегося выводами, правильность решения практических заданий, самостоятельность выполнения; грамотность, отсутствие вычислительных ошибок; уверенное владение материалом при устной защите.
не зачтено	несоответствие требованиям по структурному содержанию и объему работы; не правильно выполнены практические задания, отсутствие самостоятельности выполнения; , наличие вычислительных ошибок; отсутствие владения материалом при устной защите.

5. МАТРИЦА СООТНЕСЕНИЯ РАЗДЕЛОВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ К ФОРМИРУЕМЫМ В НИХ КОМПЕТЕНЦИЯМ И ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Компетенции / ***№, наименование разделов дисциплины***	***Кол-во часов***	***Компетенции*** ***ОК*** ***3***	Σ ***комп.***	$t_{ср}$***, час***	***Вид учебной работы***	***Оценка результатов***
1	2	3	4	5	6	7
1. Предварительные сведения	**44**	+	1	**44**	Лекция, ПЗ, СРС	зачет
2. Нелинейные функции	**52**	+	1	**52**	Лекция, ПЗ, СРС, кр	зачет
3. Пределы функций и дифференциальное исчисление	**54**	+	1	**54**	Лекция, ПЗ, СРС, кр	зачет
4. Функции нескольких переменных	**53**	+	1	**53**	Лекция, ПЗ, СРС, кр	экзамен
5. Интегральное исчисление	**53**	+	1	**53**	Лекция, ПЗ, СРС, кр	экзамен
6. Матричная алгебра	**55**	+	1	**55**	Лекция, ПЗ, СРС, кр	экзамен
всего часов	**311**	**311**	**1**	**311**		

6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Т.Г. Багинова Линейная алгебра : учебное пособие / Т.Г. Багинова, Е. В. Лищук. - Братск :БрГУ, 2015. - 130 с.
2. Т.Г. Багинова Математика. Ч.1.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия : сборник заданий и тестов / Т. Г. Багинова, Р. С. Бекирова, Е. В. Лищук. - Братск :БрГУ, 2014. - 97 с.
3. Т.Г. Багинова Математика. Ч.1.2. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление : сборник заданий и тестов / Т. Г. Багинова, Р. С. Бекирова, Е. В. Лищук. - Братск :БрГУ, 2014. - 83 с.
4. Р.С. Бекирова Дифференциальное исчисление и его приложения : учебное пособие / Р.С. Бекирова, С. А. Геврасева. - Братск :БрГУ, 2014. - 99 с.
5. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник для академического бакалавриата / В. С. Шипачев. - 4-е изд., испр. и доп. - М. : Юрайт, 2011. - 607 с. - (Бакалавр. Академический курс).
6. Осипов А.В. Лекции по высшей математике : учебное пособие / А.В. Осипов. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург :Лань, 2014. - 320 с. - (Учебники для вузов.Специальная литература).

7. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№	*Наименование издания*	***Вид занятия*** *(Лк, ПЗ, кр, СР)*	***Количество экземпляров в библиотеке,*** **шт.**	***Обеспеченность,*** **(экз./чел.)**
1	**2**	**3**	4	5
	Основная литература			
1	Краткий курс высшей математики : учебник / К.В. Балдин, Ф.К. Балдин, В.И. Джеффаль и др. ; под общ. ред. К.В. Балдина. - 2-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 512 с. : табл., граф., схем., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-02103-9 То же [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450751	Лк,ПЗ, кр, СР	ЭР(1)	1
2	Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс : учебник / Д.Т. Письменный . - 11-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2013. - 608 с. - (Высшее образование).	Лк,ПЗ, кр, СР	39	1
3	Кузнецов А.В. Высшая математика. Математическое программирование : учебник / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н. И. Холод. - 4-е изд., стереотип. - Санкт-Петербург :Лань, 2013. - 352 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература).	Лк,ПЗ, кр, СР	6	0,6
	2. Дополнительная литература			
4	Математика : практикум / сост. Е.Ф. Тимофеева ; Министерство образования и науки Российской	Лк,ПЗ, кр, СР	ЭР(1)	1

	Федерации, Северо-Кавказский федеральный университет. - Ставрополь : СКФУ, 2018. - Ч. 1. - 183 с. - Библиогр.: с. 178 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=494772			
5	Багинова Т.Г. Линейная алгебра: учебное пособие / Т.Г. Багинова, Е. В. Лищук. - Братск :БрГУ, 2015. - 130 с.	Лк,ПЗ, кр, СР	98	1
6	Багинова Т.Г. Математика. Ч.1.2. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление : сборник заданий и тестов / Т. Г. Багинова, Р. С. Бекирова, Е. В. Лищук. - Братск :БрГУ, 2014. - 83 с.	Лк,ПЗ, кр, СР	104	1
7	Багинова Т.Г. Математика. Ч.1.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия : сборник заданий и тестов / Т. Г. Багинова, Р. С. Бекирова, Е. В. Лищук. - Братск :БрГУ, 2014. - 97 с.	Лк,ПЗ, кр, СР	105	1
8	Бекирова Р.С. Дифференциальное исчисление и его приложения : учебное пособие / Р.С. Бекирова, С. А. Геврасева. - Братск :БрГУ, 2014. - 99 с.	Лк,ПЗ, кр, СР	53	1
9	Кытманов А.М. Математика. Адаптационный курс : учебное пособие / А.М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. - Санкт-Петербург :Лань, 2013. - 288 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература).	Лк,ПЗ, кр, СР	26	1
10	Хуснутдинов Р.Ш. Математика для экономистов в примерах и задачах : учебное пособие / Р. Ш. Хуснутдинов, В. А. Жихарев. - Санкт-Петербург :Лань, 2012. - 656 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература).	Лк,ПЗ, кр, СР	26	1

8. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО - ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Электронный каталог библиотеки БрГУ: http://irbis.brstu.ru/CGI/irbis64r_15/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=F&I21DBN=BOOK&P21DBN=BOOK&S21CNR=&Z21ID=
2. Электронная библиотека БрГУ http://ecat.brstu.ru/catalog
3. Федеральная университетская компьютерная сеть России // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://www.runnet.ru/
4. Каталог учебников, оборудования, электронных ресурсов // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://ndce.edu.ru/
5. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» // Электронный ресурс http://e.lanbook.com/ ,
6. Библиотека «Книгосайт» // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://knigosite.ru/
7. Электронная библиотека книг на тему бизнеса, финансов, экономики и смежным темам // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://www.finbook.biz/

8. ЭБС «Университетская библиотека online» // Электронный ресурс http://biblioclub.ru/ ,

9. Научная электронная библиотека «КИБЕРЛЕНИНКА» // Электронный ресурс [Режим доступа: свободный] http://cyberleninka.ru/

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Вид учебных занятий	Организация деятельности обучающихся
Лекции	Написание конспекта лекций: кратко, последовательно фиксировать основные положения, теоремы, выводы, формулировки, обобщения; помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Проверка терминов, формул с помощью энциклопедий, математических словарей, справочников с выписыванием формул в тетрадь. Обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, практическом занятии.
Практические занятия	Развитие интеллектуальных умений, подготовка ответов к контрольным вопросам, работа с основной и дополнительной литературой, необходимой для освоения дисциплины, выполнение практических заданий с использованием интерактивной формы обучения командной направленности «работа в малой группе», составление и оформление отчетов по практическим заданиям.
Контрольная работа	Работа с основной и дополнительной литературой, необходимой для выполнения контрольной работы, углубление и конкретизация необходимого в соответствии с темой материала из литературных источников и полученных теоретических знаний, выработка способности и готовности их использования в практической и исследовательской работе. Развитие интеллектуальных умений изложения материала, представления с элементами визуализации (схемы, графики, рисунки, таблицы, формулы) и оформления в соответствии с требованиями ГОСТ.
Самостоятельная работа обучающихся	*Подготовка к практическим занятиям.* Проработка основной и дополнительной литературы, терминов, понятий, формул, требующихся для запоминания и являющихся основополагающими в теме/разделе. Конспектирование прочитанных литературных источников. Проработка материалов по изучаемому вопросу, с использованием на рекомендуемых ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет». Выполнение заданий преподавателя, необходимых для подготовки к участию в интерактивной, активной, инновационных формах обучения по изучаемой теме. *Подготовка к зачету.* При подготовке к зачету необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу, использовать наработки по практическим занятиям. *Подготовка к экзамену.* При подготовке к экзамену необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу, использовать практические навыки решения типовых заданий по разделам дисциплины.

9.1. Методические указания для обучающихся по выполнению практических работ

Практическое занятие № 1. Предварительные сведения.

Цель работы: Закрепить основные теоретические положения по введению в математический анализ и получить практические навыки решения задач.

Задание:

1. Повторить теоретический материал по предлагаемой теме.
2. Решить совместно с преподавателем основные задачи, позволяющие закрепить теоретические знания.
3. Научиться применять основные теоретические утверждения, теоремы, положения при решении задач.
4. Выполнить практическую работу.

Порядок выполнения:

Беседа по основной теме, решение задач с пояснениями. Выполнение и устная защита практической работы.

Форма отчетности:

Решения задач в тетради с указанием основных формул, пояснений и соответствующих графических материалов в виде схем.

Задания для самостоятельной работы:

1. Разобрать основные теоремы о непрерывных функциях на отрезке.
2. Представить математический инструментарий данной темы в экономических приложениях: функция спроса и предложения, национальный доход.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию

После самостоятельной подготовки обучающиеся закрепляют теоретические знания в ходе работы над разработанными заданиями.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Назовите и запишите множество зверей из басни И.А. Крылова «Квартет», используя способ: а) перечисления элементов; б) задания характеристического свойства.

Принадлежит ли Соловей этому множеству? Приведите примеры множеств, элементами которых являются :

а)неодушевленные предметы б)геометрические фигуры, в)животные, г)растения.

Задайте множество с помощью перечисленных элементов:

$X=\{x/x \in N, 0 \le x \le 4\}$

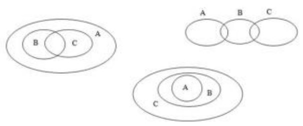
$X=\{x/x \in N, -2 \le x \le 6\}$

$X=\{x/x \in Z, -3 \le x \le 5\}$

$X=\{x/x \in Z, 0 \le x \le 4\}$

В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им: а) { *треугольник, квадрат, трапеция, круг, правильный шестиугольник* }; б){ *лев, лисица, гиена, слон, рысь* }; в) { *бежать, смотреть, синий, знать, читать* }; г) {2, 6, 15, 84, 156}; д) {1, 9, 67, 81, 121}.

2. Приведите примеры множеств А, В, С, если отношения между ними таковы:



3. Образуйте все подмножества множества букв в слове «крот». Сколько подмножеств получилось?
4. Даны множества $A = \{a, b, c, d, e, f, k\}$ и $B = \{a, c, e, k, m, p\}$. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
5. Из множества N выделили два подмножества: A – подмножество натуральных чисел, кратных 3, и B – подмножество натуральных чисел, кратных 5. Постройте круги Эйлера для множеств N , A , B ; установите, на сколько попарно непересекающихся множеств произошло разбиение множества N ; укажите характеристические свойства этих множеств.
6. Имеется множество блоков, различающихся по цвету (красные, желтые, зеленые), форме (круглые, треугольные, прямоугольные), размеру (большие, маленькие). На сколько классов разбивается множество, если в нем выделены подмножества: А – круглые блоки, В – зеленые блоки, С – маленькие блоки? Сделайте диаграмму Эйлера и охарактеризуйте каждый класс.
7. Известно, что А – множество спортсменов класса, В – множество отличников класса. Сформулируйте условия, при которых: а) $A \cap B=\varnothing$ б)$A \cup B=A$
8. Пусть $X= \{ x \in N / 1 \le x \le 15\}$. Задайте с помощью перечисления следующие его подмножества:

А – подмножество всех четных чисел;

В – подмножество всех нечетных чисел;

С – подмножество всех чисел, кратных 3;

D – подмножество всех чисел, являющихся квадратами;

Е – подмножество всех простых чисел.

В каких отношениях они находятся?

9. При увеличении аргумента функции y=kx+by=kx+b*y*=*kx*+*b* на 2, функция увеличилась на 4. Найдите коэффициентk*k*.
10. При увеличении аргумента функции y=kx+by=kx+b*y*=*kx*+*b* на 1, функция уменьшилась на 3. Найдите коэффициент *k*.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Множества. Операции над множествами.
2. Понятие функции. Область определения функции. Область значения функции. График функции.
3. Свойства функции. Линейная функция. Свойства линейной функции.
4. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке
5. Равновесие спроса и предложения. Национальный доход.

Основная литература

[1-3] из раздела 7;

Дополнительная литература

[4-15] из раздела 7.

Практическое занятие № 2. Нелинейные функции

Цель работы: Закрепить основные теоретические положения по нелинейным функциям и получить практические навыки решения задач.

Задание:

1. Повторить теоретический материал по предлагаемой теме.
2. Решить совместно с преподавателем основные задачи, позволяющие закрепить теоретические знания.
3. Закрепить полученные знания при помощи самостоятельного решения задач.
4. Научиться применять основные теоретические утверждения, теоремы, положения при решении задач.
5. Выполнить практическую работу.

Порядок выполнения:

Повторение основных теоретических положений, решение задач с пояснениями. Выполнение и устная защита практической работы.

Форма отчетности:

Решения задач в тетради с указанием основных формул, пояснений и соответствующих графических материалов.

Задания для самостоятельной работы:

1. Разобрать основные теоремы о непрерывных функциях на отрезке.

2. Представить математический инструментарий данной темы в экономических приложениях: функция спроса и предложения, национальный доход.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию

После самостоятельной подготовки обучающиеся закрепляют теоретические знания в ходе работы над разработанными заданиями.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Составить квадратный трехчлен, корнями которого являются числа 3 и 5.

1) x^2-8x+15 2) 2x^2-8x+30 3) 2x^2-8x+15

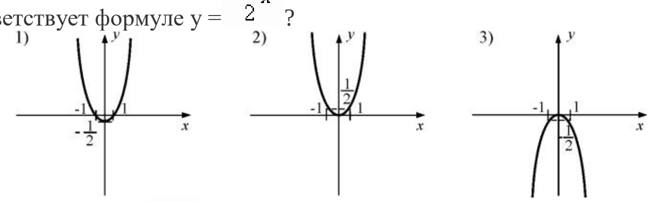
2. Сократить дробь $\frac{2x+2}{x^2-2x-3}$ и выбрать правильный ответ.

1) $\frac{2}{x+3}$ 2) $\frac{2}{x-3}$ 3) $\frac{1}{x+3}$

3. При каком значении x квадратный трехчлен x^2-10x+25 принимает наименьшее значение?

Ау 1) 5 2) 2 3) 1

4. Какой из графиков соответствует формуле y = $-\frac{1}{2}x^2$?



5. Найти область значений функции y=2+$\frac{1}{3}x^2$.

1) [0; ∞) 2) [2; ∞) 3) (-∞; 2]

6. В каких координатных четвертях расположен график функции y=$\frac{1}{5}(x-3)^2$.

7. 1) I и II 2) II и III 3) I и IV

Квадратный трехчлен ax^2-2 принимает отрицательные значения при любом значении x. Что можно сказать о коэффициенте a?

1) a>0 2) a<0 3) a=0

8. Найти область определения функции $y=\frac{1}{\sqrt{144-9x^2}}$.

1) (-∞; -4)∪(4; ∞) 2) (-4; 4) 3) [-4; 4]

9. Найти целое положительное значение а , при котором множество решений неравенства x(x-a)<0 содержит три целых числа.

1) 4 2) -2 3) 2

10. При каких значениях c график функции $y=x^2+c$ расположен выше прямой y=4?

1) c>4 2) c<4 3) c=4

11. Спрос и предложение некоторого товара описывается уравнениями: Qd = 600 - 25P; Qs = 100 + 100P.Вычислите параметры равновесия на данном рынке. Государство установило налог с продажи на единицу товара в размере 2,5 денежные единицы. Охарактеризуйте последствия такого решения. Определите величину налогового бремени покупателя и производителя.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Множества. Операции над множествами. Понятие функции. Область определения функции.
2. Область значения функции. График функции. Свойства функции. Линейная функция. Свойства линейной функции.
3. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке. Равновесие спроса и предложения. Национальный доход.

Основная литература

[1-3] из раздела 7;

Дополнительная литература

[4-15] из раздела 7.

Практическое занятие № 3. Пределы функций и дифференциальное исчисление

Цель работы: Закрепить основные теоретические положения математического анализа и получить практические навыки решения задач.

Задание:

1. Повторить теоретический материал по предлагаемой теме.
2. Решить совместно с преподавателем основные задачи, позволяющие закрепить теоретические знания.
3. Научиться применять основные теоретические утверждения, теоремы, положения при решении задач.
4. Выполнить практическую работу.

Порядок выполнения:

Повторение основных теоретических положений, решение задач с пояснениями. Выполнение и устная защита практической работы.

Форма отчетности:

Решения задач в тетради с указанием основных формул, пояснений и соответствующих графических материалов.

Задания для самостоятельной работы:

1. Разобрать определения односторонних пределов функции.

2. Разобрать основные понятия предельного анализа в экономике: предельный доход, предельные издержки, производственная функция, предельная производительность труда, предельная склонность и к потреблению, предельная склонность к сбережению, эластичность экономических функций.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию

После самостоятельной подготовки обучающиеся закрепляют теоретические знания в ходе работы над разработанными заданиями.

Задачи для самостоятельного решения.

А) Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-x-6}{3x-x^3}$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-n)(3-n)(4-n)}{(3n+1)^3}$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$ $\quad\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$ $\quad\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-10x^3+33x^2-44x+20}{x^4-12x^3+51x^2-92x+60}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin(x/2)}$ $\quad\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^{2x}-9}{\operatorname{arctg}(\sqrt{2-x}-1)}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5x-1}{3x^2-2x+4}\right)^{2X+1}$ $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\operatorname{ctg}\ln(\cos(x^2-1))}$ $\quad\lim\limits_{x\to1}(2-x^2)^{\frac{1}{x-1}}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$ $\quad\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ $\quad\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}{3-\sqrt[3]{30-x}}$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg(\frac{x}{5})}{\ln(1+2x)}$ $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\arcsin^2(ctg(x))}$

Б) Найти производные следующих функций:

1. $y=3x^2-5x+1$ $\quad y=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$ $\quad y=x\arcsin\dfrac{x^2}{2}$ $\quad y=\dfrac{x-1}{\log_2 x}$ $\quad y=e^x-\sin e^x\cos^3 e^x-\sin^3 e^x\cos e^x$

2. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{e^2\sin x}{4}$ $\quad y=x^{-x}2^x x^2$ $\quad x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0$ $\quad y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{3}+6x^5$

3. $y=a\cdot\cos\dfrac{x}{3}$, $a=\text{const}$ $\quad y=x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{5}$ $\quad y=\ln(3x^2+\sqrt{9x^4+1})$ $\quad y=x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}$

4. $y=1-3t^{\sin^2 3x}\cos^2 3x$ $\quad y=\log_{x^2}x$ $\quad e\cdot y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ $\quad y=x^4-\dfrac{x^3}{3}+2{,}5x^2-0{,}3x$ $\quad y=\operatorname{tg}\dfrac{x+1}{2}$ $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

5. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ $\quad y=\log_3(x^2-1)$ $\quad y=e^{\arcsin 2x}$ $\quad y=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right)$ $\quad y=\dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$

В) Написать уравнение касательной к графику функции:

1. $x^2=4ay$ в т. x_0 = 2am 2. $y=x^2-5x+4$, в т. x_0 = -1 3. $y=e^{1-x^2}$ в т. x_0 = -1

Г) Оптимизация:

1. Периметр прямоугольника равен 100 см. Найдите его наибольшую площадь.
2. Участок в форме прямоугольника с трёх сторон огорожен забором, его $S=200\,м^2$. Найти наименьшую длину забора.
3. Найти число, которое превышает свой квадрат на наибольшее значение.
4. Сумма длин основания и высоты треугольника равна 14 см. Найти наибольшую площадь треугольника.

5. Найти положительное число, утроенный квадрат которого превышает удвоенный куб его на наибольшее значение.
6. Площадь прямоугольника 100 $см^2$. Найти наименьший периметр этого прямоугольника
7. Участок имеет форму прямоугольной трапеции с острым углом 30°. Периметр трапеции равен 48см. Найти максимально возможную площадь участка.
8. В треугольник с основанием 20см. и h=10 см. вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти размеры этого прямоугольника.
9. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объёма V. Каковы должны быть высота ведра и радиус его дна, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести.
10. При каких размерах закрытая цилиндрическая банка вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность
11. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиуса R**.**

Г) Эластичность:

1. Эластичность спроса населения на товар по цене составляет 1,6, а по доходу – 0,8. Если цена товара снизится на 4%, а доход увеличится на 5%, то спрос возрастет на...
2. Эластичность спроса населения на товар по цене составляет – 2,5, а по доходу 0,6. Если цена товара снизится на 3%, а доход увеличится на 7%, то спрос увеличится на ?
3. Предельная полезность яблок для потребителя – 5 единиц, предельная полезность груш – 3 единицы. Цена каждого фрукта – 1 доллар. Находится ли потребитель в равновесии?
4. Эластичность спроса населения на товар по цене составляет – 2,8, а по доходу 0,7. Если цена товара снизится на 4%, а доход увеличится на 5%, то спрос увеличится на ?

<u>Контрольные вопросы для самопроверки</u>

1. Предел числовой последовательности. Определение и геометрическая интерпретация
2. Свойства пределов числовой последовательности
3. Предел функции в бесконечности и точке
4. Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Соотношение между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами
5. Неопределенные выражения. Раскрытие неопределенностей
6. Сравнение бесконечно малых величин
7. Первый замечательный предел. Следствия. Примеры
8. Второй замечательный предел
9. Непрерывность функции
10. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке
11. Односторонние пределы функции в точке
12. Асимптоты графиков функций
13. Производная функции. Геометрическая интерпретация производной. Уравнение касательной к графику функции в точке X_0.
14. Механический смысл производной. Дифференцирование.
15. Правила дифференцирования
16. Производные от элементарных функций. Таблица производных
17. Логарифмическое дифференцирование
18. Производные высших порядков
19. Теорема Ролля (с доказательством)
20. Теорема Коши (с доказательством)
21. Теорема Лагранжа (с доказательством)
22. Правило Лопиталя
23. Необходимые и достаточные условия монотонности функции (с доказательством)
24. Точки экстремума. Необходимый признак экстремума
25. Первый и второй достаточный признак существования экстремума
26. Выпуклость и вогнутость функции
27. Необходимое и достаточное условия выпуклости(вогнутости) графика функции
28. Точки перегиба
29. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке
30. Схема исследования функции для построения графиков
31. Дифференциал функции. Геометрическая интерпретация дифференциала. Свойства дифференциала. Инвариантность дифференциала

Основная литература

[1-3] из раздела 7;

Дополнительная литература

[4-15] из раздела 7.

Практическое занятие № 4. Функции нескольких переменных

<u>Цель работы:</u> Закрепить основные теоретические положения раздела и получить практические навыки решения задач.

<u>Задание:</u>

1. Повторить теоретический материал по предлагаемой теме.
2. Решить совместно с преподавателем основные задачи, позволяющие закрепить теоретические знания.
3. Закрепить полученные знания при помощи решения задач.
4. Научиться применять основные теоретические положения при решении задач.
5. Выполнить практическую работу.

<u>Порядок выполнения:</u>

Беседа по основной теме, решение задач с пояснениями. Выполнение и устная защита практической работы.

Форма отчетности:

Решения задач в тетради с указанием основных формул, пояснений и соответствующих графических материалов в виде графиков, схем.

Задания для самостоятельной работы:

1. Представить теоретический и практический материал в экономических приложениях: коэффициенты эластичности, полезность, предельный продукт фактора производства, кривые безразличия производства;

2. Разобрать основные методы условной и безусловной оптимизации.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию

После самостоятельной подготовки обучающиеся закрепляют теоретические знания в ходе работы над разработанными заданиями.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти область определения функции
2. $U = \ln(x^2 - y^2 + z^2 + 1)$;
3. Найти экстремумы функции:
4. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
5. Дана функция
6. $U = zx^3y + \cos x\, z - \sin z$.
7. Найти dU -?
8. Доказать тождество $z = \ln(x^2+y^2)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

9. Найти экстремумы функции

$$z = 1 + 6x + x^2 - xy + y^2 \cdot$$

10. Найти экстремумы функции

$$z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \cdot$$

11. Дана функция $z = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$,
12. Доказать тождество: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$.

Основная литература

[1-3] из раздела 7;

Дополнительная литература

[4-15] из раздела 7.

Практическое занятие № 5. Интегральное исчисление.

Цель работы: Закрепить основные теоретические положения по интегральному исчислению получить практические навыки решения задач.

Задание:

1. Повторить теоретический материал по предлагаемой теме.
2. Решить совместно с преподавателем основные задачи, позволяющие закрепить теоретические знания.
3. Научиться применять основные теоретические положения при решении задач.
4. Выполнить практическую работу.

Порядок выполнения:

Беседа по основной теме, решение задач с пояснениями. Выполнение и устная защита практической работы.

Форма отчетности:

Решения задач в тетради с указанием основных формул, пояснений и соответствующих графических материалов в виде диаграмм, схем.

Задания для самостоятельной работы:

1. Разобрать применение определенного интеграла в экономике, ориентируясь на следующие понятия: излишки, добавочная выгода потребителя, излишек производителя, излишек потребителя.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию

После самостоятельной подготовки обучающиеся закрепляют теоретические знания в ходе работы над разработанными заданиями.

Задачи для самостоятельного решения.

№	Взять интеграл	Ответы	№	Взять интеграл	Ответы
1.	$\int x\sin^2 x dx$	1. $\frac{x}{2}\sin 2x + \sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} + C$	1.	$\int arctgx dx$	1. $x\ln\left\lvert x^2-1\right\rvert - \ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert - 2x + C$
2.	$\int(2x+1)\sin 2x dx$	2. $\frac{x}{2} tg 2x + \frac{\ln\lvert\cos 2x\rvert}{4} + C \cdot$	2.	$\int \frac{arctg\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$	2. $\frac{x^2+1}{2} arctgx - \frac{x}{2} + C$
3.	$\int(x+1)\cos 2x dx$	3. $\frac{x}{4\cos^2 2x} - \frac{tg 2x}{8} + C$	3.	$\int \frac{\ln(x^2-1)}{x^2} dx$	3. $\frac{1}{3}\ln\lvert 1+x\rvert + \frac{2x\sqrt{x}}{3} arctg\sqrt{x} - \frac{x}{3} + C$

4.	$\int \frac{xdx}{\cos^2 2x}$	4. $C-\frac{x}{4\sin^2 2x}-\frac{ctg 2x}{8}$	4.	$\int \ln(1+x^2)dx$	4. $2arctgx + x\ln\left\|1+x^2\right\| - 2x + C$
5.	$\int \frac{\ln\cos 2x}{\cos^2 2x}dx$	5. $C-\frac{x}{2}ctg 2x+\frac{\ln\left\|\sin 2x\right\|}{4}$	5.	$\int \sqrt{x}arctg\sqrt{x}dx$	5. $xarctgx - \frac{\ln\left\|1+x^2\right\|}{2}+C$
6.	$\int \frac{x\sin 2x}{\cos^2 2x}dx$	6. $C - x\cos 2x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$	6.	$\int xarctgxdx$	6. $\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| - \frac{\ln\left\|x^2-1\right\|}{x}+C$
7.	$\int \frac{xdx}{\sin^2 2x}$	7. $C-\frac{ctg 2x}{2}\ln\left\|\cos 2x\right\| - x$	7.	$\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	7. $\frac{x^2-1}{2}\ln\left\|x^2-1\right\| - \frac{x^2}{2}+C$
8.	$\int (x+2)\cos 2xdx$	8. $\frac{tg 2x}{2}\ln\left\|\cos 2x\right\| + \frac{1}{2}tg 2x - x + C$	8.	$\int x\ln(x^2+1)dx$	8. $C-\ln\left\|1+x\right\| + 2\sqrt{x}arctg\sqrt{x}$
9.	$\int \frac{x\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$	9. $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$	9.	$\int \ln(x^2-1)dx$	9. $\ln\left\|\frac{x}{x+1}\right\| - \frac{2}{\sqrt{x}}arctg\sqrt{x}+C$
10.	$\int \frac{\ln\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$	10. $\frac{x}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C$	10.	$\int x\ln(x^2-1)dx$	10. $\frac{x^2+1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2}+C$

Контрольные вопросы для самопроверки

1 Первообразная. Определение неопределенного интеграла. Геометрический смысл неопределенного интеграла. 2 Свойства неопределенного интеграла. 3 Таблица интегралов
4 Методы интегрирования. Метод подстановки. 5 Методы интегрирования. Интегрирование по частям
6 Интегрирование специальных классов функций. Рациональные дроби 7 Численное интегрирование.
8. Определенный интеграл. Свойства. 9. Применение определенного интеграла в экономике.

Основная литература

[1-3] из раздела 7;

Дополнительная литература

[4-15] из раздела 7.

Практическое занятие № 6. Матричная алгебра.

Цель работы: Закрепить основные теоретические положения по векторной и линейной алгебре и получить практические навыки решения задач.

Задание:

1. Повторить теоретический материал по предлагаемой теме.
2. Решить совместно с преподавателем основные задачи, позволяющие закрепить теоретические знания.
3. Закрепить полученные знания при помощи решения задач.
4. Научиться применять основные теоретические положения при решении задач.
5. Выполнить практическую работу.

Порядок выполнения:

Беседа по основной теме, решение задач с пояснениями. Выполнение и устная защита практической работы.

Форма отчетности:

Решения задач в тетради с указанием основных формул, пояснений и соответствующих графических материалов в виде диаграмм, схем.

Задания для самостоятельной работы:

1. Представить теоретический материал в экономических приложениях.

Рекомендации по выполнению заданий и подготовке к практическому занятию

После самостоятельной подготовки обучающиеся закрепляют теоретические знания в ходе работы над разработанными заданиями.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить определители 2-го порядка:

1.1 $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ *Ответ:18* 1.2 $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ *Ответ: 4ab*

2. Решить уравнение:

$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ *Ответ:* $x_1=-1$, $x_2=-4$

3. Вычислить определители 3-го порядка:

3.1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ *Ответ: 0* 3.2. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$ *Ответ:. abc+x(ab+bc+ca)*

4. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ *Ответ:* $-4+\sqrt{22}$

5. Решить неравенство:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$$ *Ответ:* $x \in (4;\ \infty)$

6. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 8 & 14 & 13 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ Найти:

1) минор, дополнительный к минору, стоящий на пересечении первой и третьей строк, первого и второго столбцов;

2) алгебраическое дополнение к минору третьего порядка, стоящему в правом верхнем углу;

3) алгебраическое дополнение к минору, стоящему на пересечении первой и второй строк, второго и четвертого столбцов. *Ответ: 1) 30; 2) 2; 3) 13.*

7. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ Найти:

1) миноры элементов второй строки;

2) алгебраические дополнения элементов второй строки;

3) алгебраические дополнения элементов третьего столбца.

Ответ: 1) $M_{21}=5$, $M_{22}=-2$, $M_{23}=-12$;

2) $A_{21}=-5$, $A_{22}=-2$, $A_{23}=12$;

3) $A_{13}=6$, $A_{23}=12$, $A_{33}=-18$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Не раскрывая определителей, доказать справедливость равенств:

1.1. $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$

1.2. $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

1 Вычислите определитель

1.3. $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$ 1.4 $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определители, используя свойство разложения по строке (столбцу):

2.1. $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$ *Ответ* 87 2.2. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ *Ответ* -4

2.3. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$ *Ответ* 0 2.4. $$\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$ *Ответ* 180

3. Вычислите определитель различными способами

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Используя свойства определителей, решить уравнения и неравенство:

$$\begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ 5+x & 5 \end{vmatrix} = 2$$

3.1. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ *Ответ* -3 3.2. $$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ *Ответ* $\{-10;2\}$

3.3. $$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$$ *Ответ* $-6 < x < -4$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить ранг матриц методом элементарных преобразований.

1.1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ 1.2. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{bmatrix}$ 1.4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ответ :

1.1. 2, 1.2. 2, 1.3. 2, 1.4. 4.

2. Вычислить ранг матриц методом окаймляющих миноров.

2.1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ 2.2. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

2.3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 2.4. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 10 & 3 \end{bmatrix}$

Ответ :

2.1. 3, 2.2. 3, 2.3. 2, 2.4. 2.

3.1. При каких значениях λ ранг матрицы равен двум?

$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *Ответ*: *при* $\lambda = 7/9$

При каких значениях λ ранг матрицы равен трем?

3.2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 3.3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Ответ : *при* $\lambda \neq 2$ *Ответ* : $\lambda -$ *любое*

Пример.

Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Данная система является системой крамеровского типа, т.к. содержит *m=3* уравнений и *n=3* неизвестных.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -8 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Находим

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$$

Следовательно, существует единственное решение системы, которое найдем по формулам Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -20 \qquad \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-20} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \end{vmatrix} = -20 \qquad \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

Ответ : $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ *или* $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Пример.

Найти решение системы

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \quad 9$$

Данная система является системой крамеровского типа, т.к. содержит *m=3* уравнений и *n=3* неизвестных.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Находим

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

Следовательно, существует единственное решение системы, которое найдем с помощью матричного метода: $X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} C = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 4\cdot(-3) \\ 1\cdot 0 - 4\cdot 1 - 5\cdot(-3) \\ 1\cdot 0 - 4\cdot 1 + 6\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Ответ}: \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2 \quad \textit{или} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Матрицы. Виды матриц
2. Операции над матрицами
3. Определитель
4. Минор. Алгебраическое дополнение
5. Теорема Лапласа
6. Свойства определителей
7. Обратная матрица. Алгоритм вычисления элементов обратной матрицы
8. Ранг матрицы. Свойства ранга
9. Элементарные преобразования над строками и столбцами. Теорема о ранге матриц
10. Системы линейных уравнений. Основные понятия
11. Решение невыраженных систем линейных уравнений
12. Решение произвольных систем линейных уравнений. Теорема Кромекера-Капелли
13. Метод Гаусса
14. Системы однородных линейных уравнений
15. Вектор на плоскости и в пространстве

Основная литература

[1-3] из раздела 7;

Дополнительная литература

[4-15] из раздела 7.

9.2. Методические указания по выполнению контрольной работы

Порядок выполнения контрольных работ.

При выполнении контрольных работ обучающийся должен совершенствовать теоретические и практические знания по дисциплине «Математика».

1 курс

Тема. Исследование функции с помощью дифференциального исчисления и построение графика функции.

Цель работы. Приобрести навыки применения дифференциального исчисления к исследованию функций, сформировать умения по полученному исследованию строить график функции.

Содержание. 4 задания: №1 – вычисление пределов; №2 – задача на нахождение первой и второй производной функции в заданной точке, №3 – задача на нахождение первой производной, №4- проведение полного исследования функции и построение ее графика.

Структура, объём. Контрольная работа выполняется в тетради для контрольных работ, объём 7-8 страниц.

Задания выдает преподаватель.

Примерное задание на контрольную работу

Вариант 1

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} 3x[\ln(x+5)-\ln x]$; е) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{\sin(x-3)}}$.

2. Найти значение первой и второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_o.

$y = \dfrac{\sin x}{x^3}$; $x_o = \pi$.

3. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$.

а) $2^{\arcsin tg\sqrt{x}}$, б) $y=\cos^5 arctg\dfrac{1}{x}$, в) $y=(\sin x)^x$.

4. Исследовать методами дифференциального исчисления данные функции. На основании результатов исследования построить графики этих функций.

а) $y = \dfrac{x}{4-x^2}$; $б) y = \dfrac{x+1}{e^x}$.

2 курс

Тема. Матричная алгебра: матрицы, действия над ними. Системы линейных алгебраических уравнений.

Цель работы. Сформировать умения действий над матрицами, вычисления определителей 2-го, 3-го порядка, приобрести навыки применения матричного исчисления для решения систем линейных уравнений.

Содержание. 3 задания: №1 - действия над матрицами, №2,3 - решить системы линейных алгебраических уравнений.

Структура, объём. Контрольная работа выполняется в тетради для контрольных работ, объём 6-7 страниц.

Задание на контрольную работу:

1. Найти A^2; AB.
2. Решить тремя способами:
   а) через определитель;
   б) матричным способом;
   в) методом Гаусса.
3. Найти общее решение системы линейных неоднородных алгебраических уравнений.
4. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений.

10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

- Microsoft Windows Professional Russian
- Microsoft Office Russian
- Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Security

11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Вид занятия	***Наименование аудитории***	***Перечень основного оборудования***	***№ Лк, ПЗ***
1	**3**	**4**	**5**
Лк	Лекционная аудитория (мультимедийный класс)	Интерактивная доска SMART Board 680i2/Unifl, Интерактивный планшет Wacom PL-720, Колонки Microlab Solo-7C, Ноутбук Samsung R610<NP-R610-FS08>, Телевизор плазменный Samsung 63 PS-63A756T1M	Лк № 1-17
ПЗ	Дисплейный класс	Системный блок AMD A10-7800 Radeon R7 (12 шт.), Системный блок для слабовидящих пользователей AMD A10-7850K (1 шт.), Монитор Philips233 V5QHABP (13 шт.)	ПЗ №№ 1-17
кр	Дисплейный класс	Системный блок AMD A10-7800 Radeon R7 (12 шт.), Системный блок для слабовидящих пользователей AMD A10-7850K (1 шт.), Монитор Philips233 V5QHABP (13 шт.)	
	Читальный зал №1	Оборудование 10 ПК i5-2500/H67/4Gb(монитор TFT19 Samsung); принтер HP LaserJet P2055D	
СР	Читальный зал №1	Оборудование 10 ПК i5-2500/H67/4Gb(монитор TFT19 Samsung); принтер HP LaserJet P2055D	-

Приложение 1

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Описание фонда оценочных средств (паспорт)

№ компетенции	Элемент компетенции	Раздел	Тема	ФОС
ОК-3	способность использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности	**1.** Предварительные сведения.	1.1 Множество. Операции над множествами. 1.2 Множество целых чисел, множество иррациональных чисел, множество рациональных чисел, множество вещественных чисел. 1.3 Абсолютная величина. 1.4 Функция одной переменной. 1.5 Графики функции. 1.6 Способы задания функции. 1.7 Линейная функция. 1.8 Кривая предложения. 1.9 Кривая спроса. 1.10 Равновесная цена. 1.11 Национальный доход. Двухсекторная модель. Предельная склонность к потреблению. Предельная склонность к сбережению.	вопросы к зачету 1.1-1.11
		2 Нелинейные функции.	2.1. Квадратичная функция 2.2. Максимальная прибыль 2.3. Показательная и логарифмическая функции 2.4. Квадратичная функция 2.5. Максимальная прибыль 2.6. Показательная и логарифмическая функции 2.7. Квадратичная функция 2.8. Максимальная прибыль 2.9. Показательная и логарифмическая функции 2.10. Математика финансов	вопросы к зачету 2.1-2.10
		3. Пределы функций и дифференциальное исчисление	3.1 Предел функции. 3.2 Непрерывность функции. 3.3 Производная. Правила дифференцирования. 3.4 Таблица производных. 3.5 Дифференциал функции. Свойства дифференциала. 3.6 Производная обратной функции. Производная сложной функции. 3.7 Производные высших порядков. 3.8 Экстремумы функции. Стационарные точки. 3.9 Функция возрастающая. Функция убывающая. 3.10 Предельный анализ в экономике. Предельный доход. Предельные издержки. Производственная функция. 3.11 Предельный анализ в экономике. Производственная функция. Предельная производительность труда. 3.12 Предельный анализ в экономике. Предельная склонность к потреблению. Предельная склонность к сбережению. 3.13 Эластичность экономических	вопросы к зачету 3.10-3.14

			функций. Эластичность спроса. Дуговая эластичность. Эластичность предложения. 3.14 Нахождение экстремума функции.	
		4. Функции нескольких переменных	4.1 Функции нескольких переменных (ФНП), основные понятия, геометрический смысл функции двух переменных (плоскость, поверхности 2-го порядка). 4.2 Частные производные, их геометрический смысл. 4.3 Дифференцируемость ФНП. Полный дифференциал. 4.4 Экстремум функции двух переменных. 4.5 Применение частных производных в экономике. Эластичность спроса от цены. Перекрестный коэффициент эластичности. Эластичность спроса от доходов. 4.6 Применение частных производных в экономике. Полезность. Предельный продукт фактора производства. 4.7 Применение частных производных в экономике. Кривые безразличия производства. 4.8 Безусловная оптимизация. 4.9 Условная оптимизация. Метод подстановки. 4.10 Условная оптимизация. Метод множителей Лагранжа	вопросы к экзамену 4.1-4.10
		5. Интегральное исчисление	5.1 Неопределенный интеграл 5.2. Определенный интеграл 5.3. Численное интегрирование 5.4. Применение определенного интеграла в экономике	вопросы к экзамену 5.1-5.4
		6. Матричная алгебра	6.1. Векторы и матрицы 6.2. Операции над матрицами 6.3. Обращение квадратных матриц 6.4. Системы линейных уравнений 6.5. Матрицы в экономических приложениях.	вопросы к экзамену 6.1-6.5

2. Экзаменационные вопросы (Вопросы к зачету)

№ п/п	Компетенции		ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ	№ и наименование раздела
	Код	Определение		
1	2	3	4	5
1.	ОК-3	способность использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности	1.1 Множество. Операции над множествами. 1.2 Множество целых чисел, множество иррациональных чисел, множество рациональных чисел, множество вещественных чисел. 1.3 Абсолютная величина. 1.4 Функция одной переменной. 1.5 Графики функции. 1.6 Способы задания функции. 1.7 Линейная функция. 1.8 Кривая предложения. 1.9 Кривая спроса. 1.10 Равновесная цена. 1.11 Национальный доход. Двухсекторная модель. Предельная склонность к потреблению. Предельная склонность к сбережению	**1.** Предварительные сведения.
			2.11. Квадратичная функция	**2.**

			2.12. Максимальная прибыль 2.13. Показательная и логарифмическая функции 2.14. Квадратичная функция 2.15. Максимальная прибыль 2.16. Показательная и логарифмическая функции 2.17. Квадратичная функция 2.18. Максимальная прибыль 2.19. Показательная и логарифмическая функции Математика финансов .	Нелинейные функции.
			3.1 Предел функции. 3.2 Непрерывность функции. 3.3 Производная. Правила дифференцирования. 3.4 Таблица производных. 3.5 Дифференциал функции. Свойства дифференциала. 3.6 Производная обратной функции. Производная сложной функции. 3.7 Производные высших порядков. 3.8 Экстремумы функции. Стационарные точки. 3.9 Функция возрастающая. Функция убывающая. 3.10 Предельный анализ в экономике. Предельный доход. Предельные издержки. Производственная функция. 3.11 Предельный анализ в экономике. Производственная функция. Предельная производительность труда. 3.12 Предельный анализ в экономике. Предельная склонность к потреблению. Предельная склонность к сбережению. 3.13 Эластичность экономических функций. Эластичность спроса. Дуговая эластичность. Эластичность предложения. 3.14 Нахождение экстремума функции.	**3.** Пределы функций и дифференциальное исчисление.

№ п/п	**Компетенции**		**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ**	**№ и наименование раздела**
	Код	**Определение**		
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1.	ОК-3	способность использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности	4.11 Функции нескольких переменных (ФНП), основные понятия, геометрический смысл функции двух переменных (плоскость, поверхности 2-го порядка). 4.12 Частные производные, их геометрический смысл. 4.13 Дифференцируемость ФНП. Полный дифференциал. 4.14 Экстремум функции двух переменных. 4.15 Применение частных производных в экономике. Эластичность спроса от цены. Перекрестный коэффициент эластичности. Эластичность спроса от доходов. 4.16 Применение частных производных в экономике. Полезность. Предельный продукт фактора производства. 4.17 Применение частных производных в экономике. Кривые безразличия производства. 4.18 Безусловная оптимизация. 4.19 Условная оптимизация. Метод подстановки. 1.12	**4.** Интегральное исчисление.
			5.1 Неопределенный интеграл 5.2. Определенный интеграл 5.3. Численное интегрирование	**5.** Функции нескольких переменных.

			5.4. Применение определенного интеграла в экономике.	
			6.1 Векторы и матрицы 6.2. Операции над матрицами 6.3. Обращение квадратных матриц 6.4. Системы линейных уравнений 6.5. Матрицы в экономических приложениях.	**6.** Матричная алгебра**.**

4. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

Показатели	Оценка	Критерии
Знать *(ОК-3):* - основные понятия и инструменты математической науки; **Уметь** *(ОК-3):*: - решать типовые математические задачи экономического содержания в сфере бизнеса и управления; Владеть *(ОК-3):* - математическими методами при решении профессиональных задач повышенной сложности в сфере управления и бизнеса	**зачтено**	Оценка «**зачтено**» выставляется в случае, если студент демонстрирует: – всестороннее систематическое знание основных теоретических положений математики как науки, – правильное выполнение практических заданий, направленных на использование глубоких теоретических знаний в сфере бизнеса и управления; владеет современными математическими методами при решении экономических задач.
	не зачтено	Оценка «**не зачтено**» выставляется в случае, если студент демонстрирует: – существенные пробелы в знании основных теоретических положений математики как науки, – принципиальные ошибки при выполнении практических заданий, направленных на использование глубоких теоретических знаний в сфере бизнеса и управления; не владеет современными математическими методами при решении экономических задач.
	отлично	Оценка «**отлично**» выставляется в случае, если студент демонстрирует: – всестороннее систематическое знание основных теоретических положений математики как науки, – правильное выполнение практических заданий, направленных на использование глубоких теоретических знаний в сфере бизнеса и управления; владеет современными математическими методами при решении экономических задач.
	хорошо	Оценка «**хорошо**» выставляется в случае, если студент демонстрирует: – недостаточно полное знание основных теоретических положений математики как науки, – выполнение с несущественными ошибками практических заданий, направленных на использование глубоких теоретических знаний в сфере бизнеса и управления; – не в полной мере владеет современными математическими методами при решении экономических задач.
	удовлетворительно	Оценка «**удовлетворительно**» выставляется в случае, если студент демонстрирует: – частичное знание основных теоретических положений математики как науки, – частичное выполнение с ошибками практических заданий, направленных на использование глубоких теоретических знаний в сфере бизнеса и управления; – не в полной мере владеет современными математическими методами при решении экономических задач.
	неудовлетворительно	Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется в случае, если студент демонстрирует: – существенные пробелы в знании основных теоретических положений математики как науки, – принципиальные ошибки при выполнении практических заданий, направленных на использование глубоких теоретических знаний в сфере бизнеса и управления; – не владеет современными математическими методами при решении экономических задач.

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности

Цель и задачи дисциплины Б1.Б.05 Математика представлены в разделе 1 настоящей рабочей программы. Место дисциплины в структуре образовательной программы представлено в разделе 2 настоящей рабочей программы. Распределение объема дисциплины по формам обучения с указанием видов учебных занятий представлено в разделе 3 настоящей рабочей программы. Содержание дисциплины указано в разделе 4 настоящей рабочей программы.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы студентов по дисциплине находятся в свободном доступе в соответствии с разделом 6 настоящей рабочей программы.

При изучении дисциплины необходимо использовать литературу, указанную в разделе 7 настоящей рабочей программы, а также перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», представленных в разделе 8 настоящей рабочей программы.

Консультации для студентов по дисциплине проводятся в соответствии с графиком проведения консультаций, представленном на стенде кафедры, за которой закреплена указанная дисциплина.

К экзамену допускаются студенты заочной формы обучения, которые теоретически подготовлены по всем вопросам и владеют навыками эффективного применения основных математических положений и методов.

Информационные технологии, используемые при освоении дисциплины, перечислены в разделе 10 настоящей рабочей программы.

Оценка знаний, умений, навыков осуществляется в процессе промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине, которая осуществляется в виде экзамена. Для оценивания знаний, умений, навыков используются ФОС по дисциплине.

Экзамен проводится в устной форме по выданному преподавателем заданию.

По итогам выполненного задания преподаватель оценивает уровень знаний, умений, навыков. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, сформированных по итогам изучения дисциплины, представлено в разделе 3 Приложения 1 настоящей рабочей программы. Основными оценочными средствами при проведении промежуточной аттестации являются вопросы к экзамену.

Приложение 2

АННОТАЦИЯ
рабочей программы дисциплины
Математика

1. Цель и задачи дисциплины

Целью дисциплины является знакомство обучающихся с местом и ролью математики в современном мире, овладение обучающимися основами теоретических и практических математических знаний, используемых в сфере управления и бизнеса.

Основными задачами дисциплины являются:

- демонстрация на примерах математических понятий и методов действие законов материального мира, сущность научного подхода, специфику математики и ее роль в осуществлении научно-технического прогресса;
- создать фундамент математического образования, необходимый для получения профессиональных компетенций и для изучения последующих дисциплин.

2. Структура дисциплины

2.1 Распределение трудоемкости по отдельным видам учебных занятий, включая самостоятельную работу: 14 ч. лекции, 20 ч. практические работ, самостоятельная работа 277 час.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 324 часа, 9 зачетных единиц

2.2 Основные разделы дисциплины:

1. Предварительные сведения
2. Нелинейные функции
3. Пределы функций и дифференциальное исчисление
4. Функции нескольких переменных
5. Интегральное исчисление
6. Матричная алгебра

3. Планируемые результаты обучения (перечень компетенций)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:
ОК-3 - способность использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности.

4. Вид промежуточной аттестации: зачет, экзамен

Приложение 3

Протокол о дополнениях и изменениях в рабочей программе
на 20___-20___ учебный год

1. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие дополнения:
____
____

2. В рабочую программу по дисциплине вносятся следующие изменения:
____
____
____

Протокол заседания кафедры №____ от «___» __________ 20 ____ г.,
(разработчик)

Заведующий кафедрой ______________________ ______________________
(подпись) *(Ф.И.О.)*

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 38.03.02 Менеджмент от «12» января 2016 г. № 7

для набора 2016 года: и учебным планом ФГБОУ ВО «БрГУ» для заочной формы обучения от «05» мая 2016 г. № 343

Программу составил:

Вахрушева М.Ю., доцент баз. каф. МиИТ, доцент, к.физ.-мат.н. ______________________

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании базовой кафедры МиИТ

от «19» декабря 2018 г., протокол № 8

И.о. заведующего базовой кафедрой МиИТ _____________ Е.И. Луковникова

СОГЛАСОВАНО:

И.о. заведующего выпускающей базовой кафедрой МиИТ _____________ Е.И. Луковникова

Директор библиотеки _____________ Т.Ф. Сотник

Рабочая программа одобрена методической комиссией факультета ФЭиУ

от «28» декабря 2018 г., протокол № 4

Председатель методической комиссии факультета _____________ Е.В. Трапезникова

СОГЛАСОВАНО:

Начальник учебно-методического управления _____________ Г.П. Нежевец

Регистрационный №________